در باب بعضی از کارهای

مریم میرزاخانی

که به خاطر آنها به او مدال فیلدز دادند.

امیر جعفری - دانشگاه صنعتی شریف

اردیبهشت ۱۴۰۳

" مریم میرزاخانی "

ریاضیات زیبایی خود را به ابزار صبور نشان می دهد.

۲۲ اردیبهشت ۱۳۵۶ - ۲۳ تیر ۱۳۹۶

در ۱۳ آگوست ۲۰۱٤ مریم میرزاخانی اولین زن

و اولین ایرانی برنده جایزه ارزشمند فیلدز در ریاضی شد.

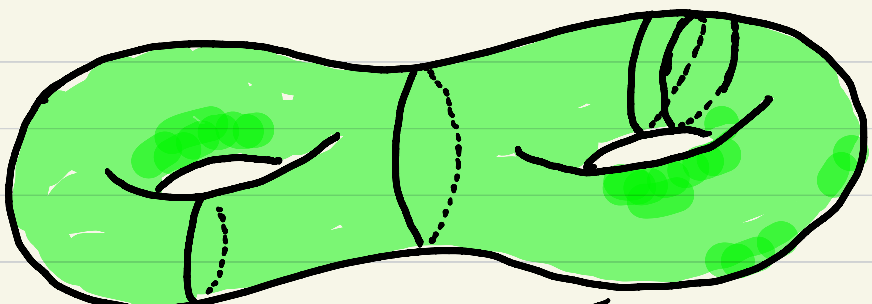
"FOR HER OUTSTANDING CONTRIBUTIONS TO THE DYNAMICS AND GEOMETRY OF RIEMANN SURFACES AND THEIR MODULI SPACES"

"به خاطر کارهای برجسته اش در دینامیک و هندسه

رویه های ریمانی و فضاهای پیمانه ای آنها"

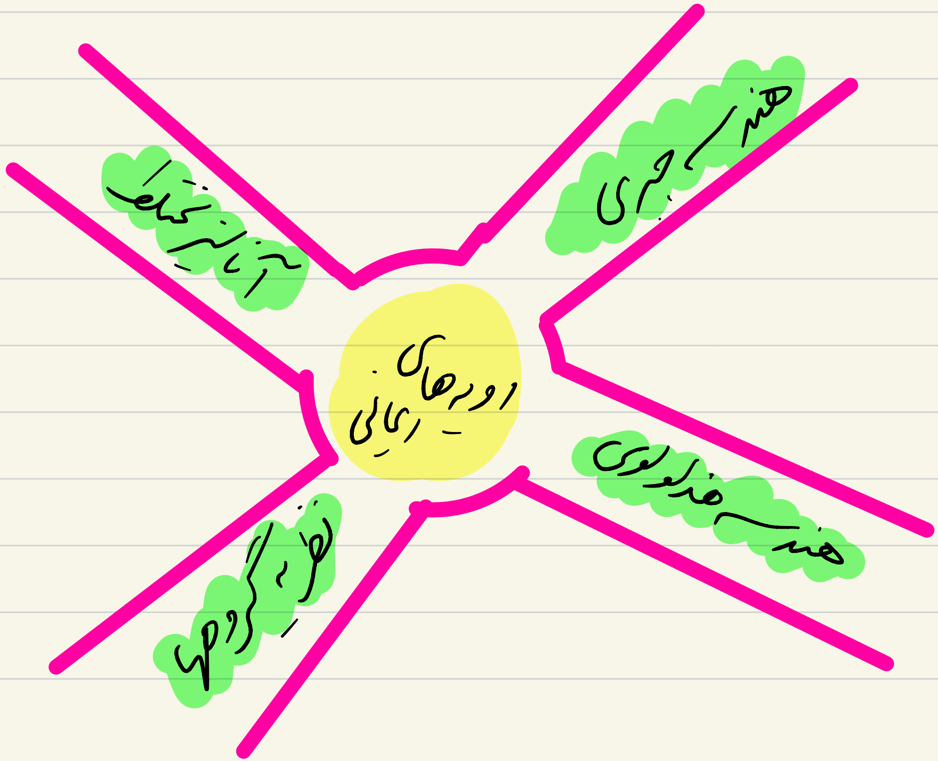
برنهارد ریمان ۱۸۲۶- ۱۸۶۶

رویه های ریمانی را ریمان در ۱۸۵۱ در رساله دکتری
خود که تحت نظارت گاوس نوشته شده بود، معرفی کرد که از آن
موقع تا امروز نقش بسیار برجسته ای در ریاضیات و فیزیک داشته اند.



گونای ۲ = g

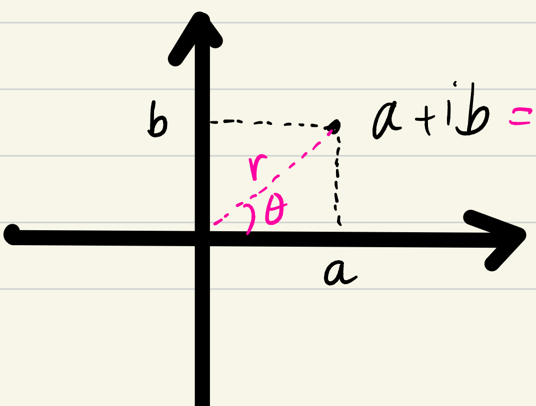
رویه های ریمانی در تقاطع شاخه های مختلفی از ریاضیات قرار دارند



اعداد مختلط در اوایل قرن ۱۶ میلادی توسط ریاضیدانان ایتالیایی
که مشغول حل معادلات درجه ۳ و ۴ بودند معرفی شدند.

$$x^{2} = -1 \Longrightarrow x = ? \qquad \pm i = \pm\sqrt{-1}$$

$$\mathbb{C} = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$



$$a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

$$x^{۳} + px + q = 0 \quad (\text{کاردانو } ۱۵۳۵)$$

$$\Rightarrow \quad x_{۱}, x_{۲}, x_{۳} = \sqrt[۳]{-\frac{q}{۲} + \sqrt{\left(\frac{p}{۳}\right)^{۳} + \left(\frac{q}{۲}\right)^{۲}}} + \sqrt[۳]{-\frac{q}{۲} - \sqrt{\left(\frac{p}{۳}\right)^{۳} + \left(\frac{q}{۲}\right)^{۲}}}$$

$$x^{۳} = ۱۵x + ۴$$

$$x = \sqrt[۳]{۲ + \sqrt{-۱۲۱}} + \sqrt[۳]{۲ - \sqrt{-۱۲۱}}$$

$$(۲ \pm \sqrt{-۱})^{۳} = ۲ \pm ۱۱\sqrt{-۱} = ۲ \pm \sqrt{-۱۲۱}$$

$$x = ۲ + \sqrt{-۱} + ۲ - \sqrt{-۱} = ۴$$

گاوس (۱۷۷۷-۱۸۵۵)

گاوس در ۱۷۹۹ در رساله دکتری خود اولین اثبات درست از قضیه اساسی جبر ارائه کرد و بعدها چندین اثبات دیگر برای این قضیه یافت.

قضیه: هر معادله $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ برای $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ به عامل‌های درجه ۱ تجزیه می‌شود:

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$$

که $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$.

گاوس در ۱۸۲۵ مفهوم نگاشت همدیس (CONFORMAL)

را در کارهای نقشه برداری خود معرفی کرد.

یک نگاشت خطی $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ همدیس است هرگاه زاویه را حفظ

کند. معادلاً این نگاشت تباین طولی است، یعنی $c > 0$ وجود دارد که

$$|L(x)| = c|x|$$

اگر $f : U \to \mathbb{R}^n$ $U \subseteq \mathbb{R}^n$ یک نگاشت مشتق پذیر باشد

می‌گوییم f همدیس است هرگاه df_x برای هر $x \in U$ همدیس باشد.

این مفهوم ارتباط نزدیکی به اعداد مختلط در حالت $n=2$ دارد: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$

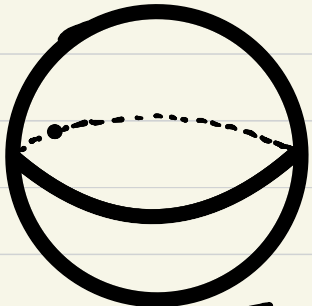
$$f : U \to \mathbb{C} \qquad U \overset{\text{باز}}{\subseteq} \mathbb{C}$$

را در نقطه $c \in U$ بطور مختلط مشتق‌پذیر گوییم هرگاه

$$f'(c) := \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

موجود باشد. اگر در همه نقاط مشتق‌پذیر مختلط باشد f را تحلیلی یا هولومورف می‌گوییم. اگر $f' \neq 0$ آنگاه f همدیس خواهد بود.

رویه ریمانی چیست؟

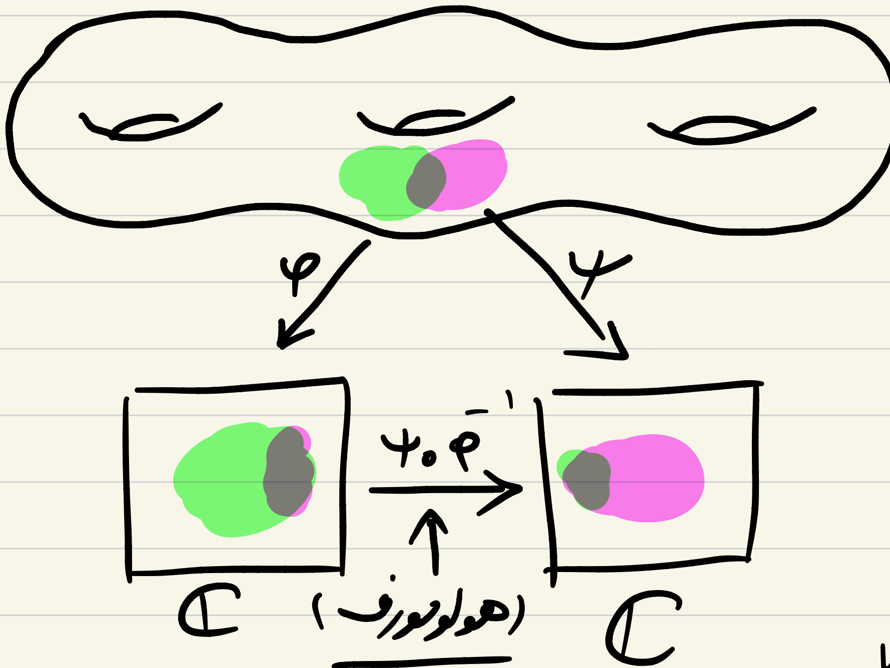
$S^2 =$  $= \mathbb{C} \cup \{\infty\} = U \cup V$

کره

$$U = \mathbb{C} = S^2 - \{\infty\}, \qquad V = S^2 - \{0\}$$

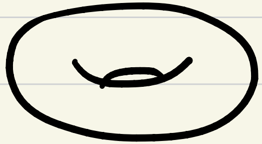
$$U \xrightarrow{z} \mathbb{C} \qquad V \xrightarrow{1/z} \mathbb{C}$$

$$U \cap V = \mathbb{C} - \{0\} \xrightarrow{1/z} \mathbb{C} - \{0\}$$



معرفی عدد به عنوان
مختصات یک عمل
خشونت آمیز
است.

هرمان وایل

ناشمارا ساختار مختلطِ مختلف روی چنبره  می‌توان ساخت

که به زودی خواهیم دید. ولی قضیه زیر که با ایده‌های ریمان، پوانکاره، کلاین

و کوبه در نهایت در ۱۹۰۷ ثابت شد، در تضاد کامل با حقیقت بالا است.

قضیه UNIFORMIZATION: هر رویه ریمانی همبند ساده با یکی از سه

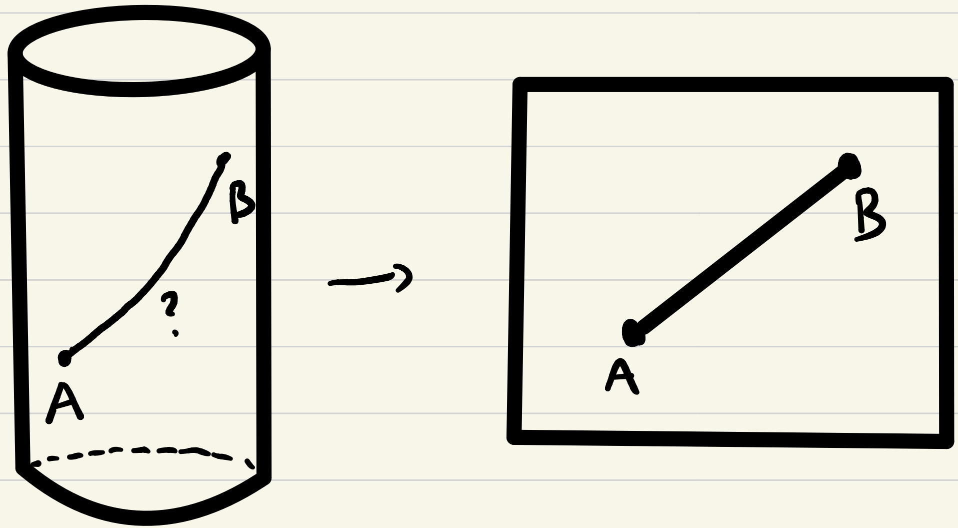
رویه زیر همریخت است:

$$\mathbb{C}\ ,\ \mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}\ ,\ |z|<1\}$$

$S^2 =$ کره

این سه معرف سه هندسه : اقلیدسی ، هذلولوی و کروی هستند . با هندسه اقلیدسی همه ما از دوران مدرسه آشنا هستیم ولی در هندسه دیگر ممکن است کمی غریب‌تر باشند .

مهم‌ترین مفهوم در هندسه اقلیدسی ، مفهوم خط راست است که کمترین فاصله بین دو نقطه را مشخص می‌کند . این مفهوم در هندسه های دیگر به ژئودزیک تغییر نام می‌دهد .



ژئودزی

geo = زمین

desy = اندازه‌گیری

ریمان در ۱۸۵۴ به درخواست گاوس رساله‌ای کوتاه با عنوان

"درباره فرضیاتی که بنیاد هندسه بر آنها بنا شده است"

را ارائه کرد. انقلابی که این نوشته در ریاضیات ایجاد کرد، با انقلابی که نظریات

اینشتین در فیزیک بوجود آورند قابل مقایسه است.

هندسه ریمانی با این نوشته پا به عرصه وجود گذاشت.

هندسه = فضای به همراه مفهوم فاصله و زاویه.

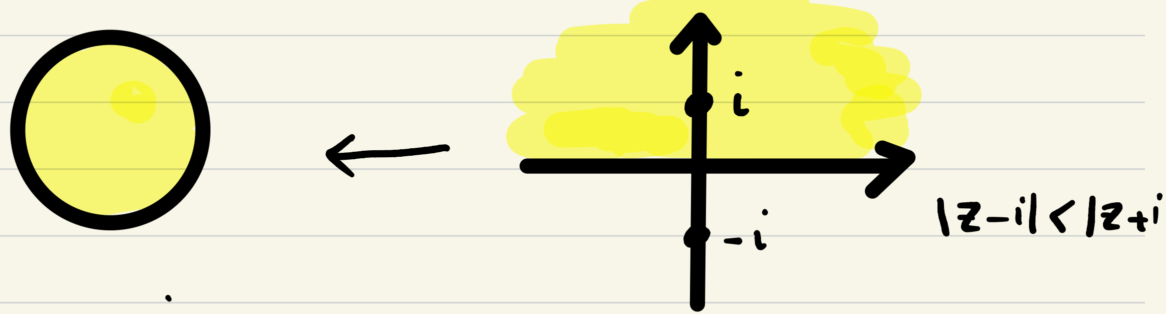
اگر M یک خمینه باشد و $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ معادله حرکت ذره‌ای
روی این خمینه باشد مسافتی که این ذره طی می‌کند

$$l(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)| \, dt$$

$\gamma'(t)$ که همان سرعت ذره است برداری است که در فضای مماس بر M
در نقطه $\gamma(t)$ قرار دارد پس نیاز به یک ضرب داخلی $\langle \, , \, \rangle_x$ روی فضای مماس TM_x
در نقطه $x \in M$ می‌باشد.

مدل پوانکاره برای هندسه هذلولوی = هندسه نااقلیدسی

$$\mathbb{D} \overset{\sim}{\longrightarrow} \mathbb{H} = \{ z = a+ib \in \mathbb{C} \mid b>0 \}$$



$$\frac{z-i}{z+i} \longleftarrow z$$

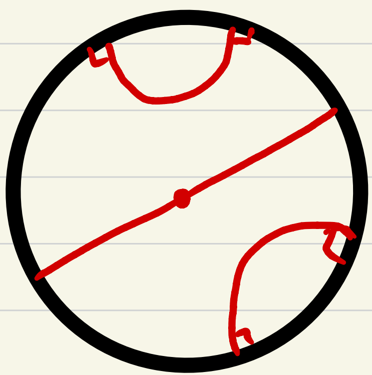
دیسک　　　　نیم صفحه بالا

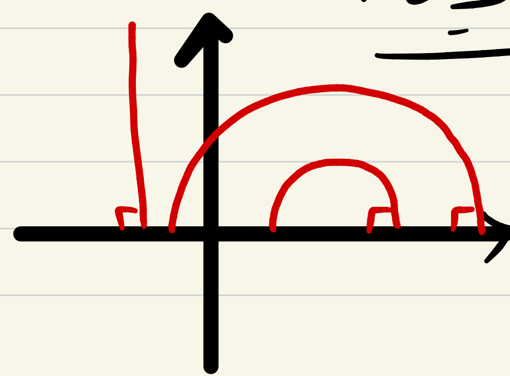
$$\mathbb{D} \simeq \mathbb{H}$$

$$\langle u,v\rangle_z = \frac{4\,u.v}{1-|z|^2} \qquad\qquad \langle u,v\rangle_z = \frac{u.v}{y^2}$$

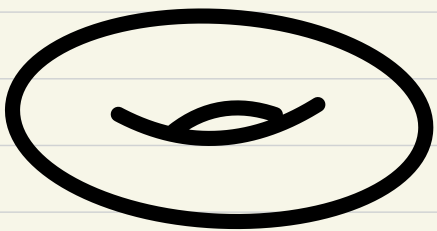
$$z = x + iy$$

ژئودزیک‌ها :

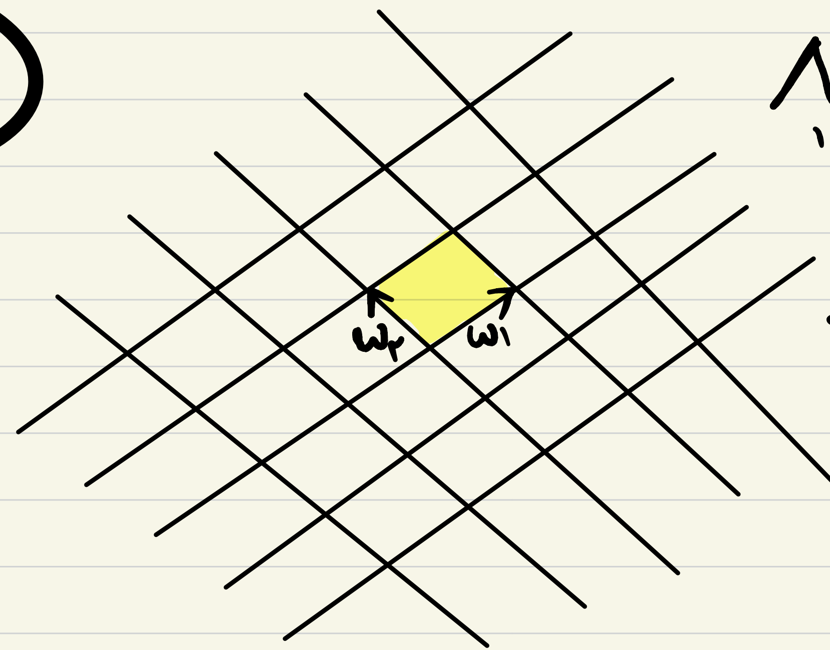




چنبره = رویه‌ی ریمانیِ فشرده با $g=1$



$= \mathbb{C}/\Lambda$



$$\Lambda \subseteq \mathbb{C}$$

$$= \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$$

$$= \{ n\omega_1 + m\omega_2 \mid n, m \in \mathbb{Z} \}$$

$$\frac{\mathbb{C}}{\Lambda} \simeq \frac{\mathbb{C}}{\lambda \Lambda} \qquad \text{آنگاه} \quad 0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$$

$$[z] \longrightarrow [\lambda z]$$

$$\omega_2 \in \mathbb{H}\,,\ \omega_1 = 1 \qquad \text{پس می‌توان}$$

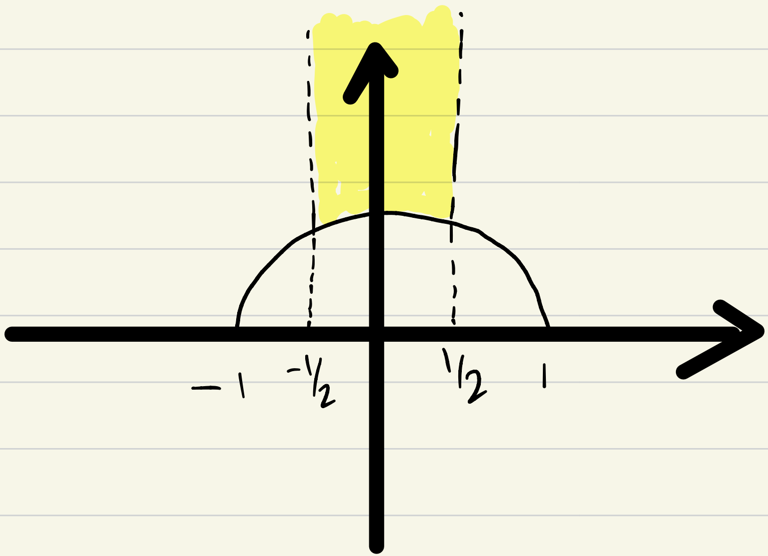
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \Longrightarrow \langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \langle a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2 \rangle$$

$$\langle 1, \omega \rangle = \left\langle 1, \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \right\rangle$$

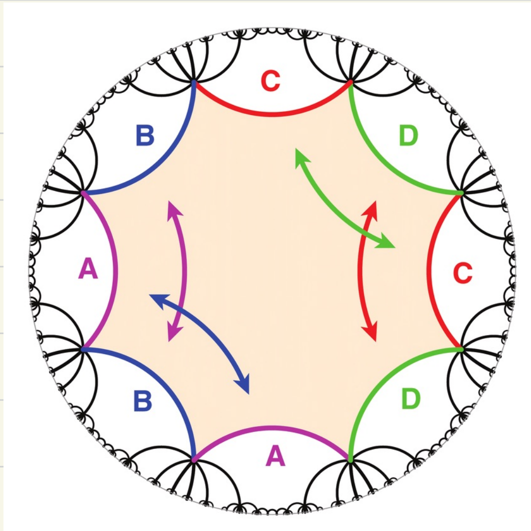
$$SL_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{H} \qquad z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}$$

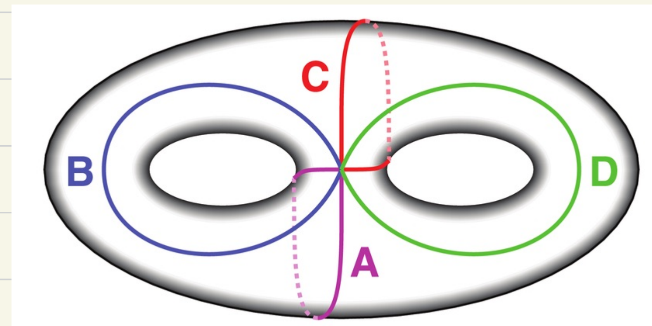
تمام ساختارهای مختلط روی چنبره = فضای پیمانه‌ی $\mathcal{M}_1$

$$\mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z})$$



رویه هذلولوی با گونای ۲





" یک ۸ ضلعی منتظم هذلولوی با زوایای داخلی $\frac{\pi}{4}$ "

ریمان دریافت که برای مشخص کردن یک ساختار مختلط روی رویه‌ای فشرده از

گونای $g > 1$ نیاز به $6g-6$ پارامتر است. بنابراین فضای پیمانه‌ای

M_g از ساختارهای مختلط روی این رویه یک فضای با بعد $6g-6$ است.

نگاشت چنبره $= \mathbb{C}/\Lambda \leftarrow \mathbb{C}$ یک نگاشت پوششی است. به طور کلی هر رویه‌ی ریمانی

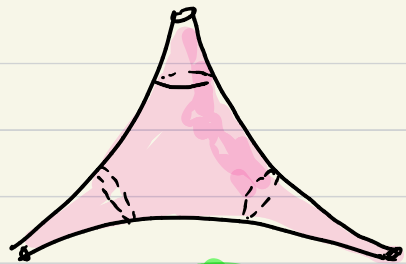
S دارای یک رویه‌ی ریمانی پوششی $\tilde{S}$ است که همبند ساده است: $\tilde{S} \xrightarrow{p} S$

بنابراین S مجهز به یکی از سه هندسه‌ی اقلیدسی، هذلولوی یا کروی خواهد بود

اگر S یک رویه با گونای g و n نقطه محذوف باشد. هذلولوی است اگر

$$\text{شاخص اویلر} = \chi(S) = 2 - 2g - n < 0$$

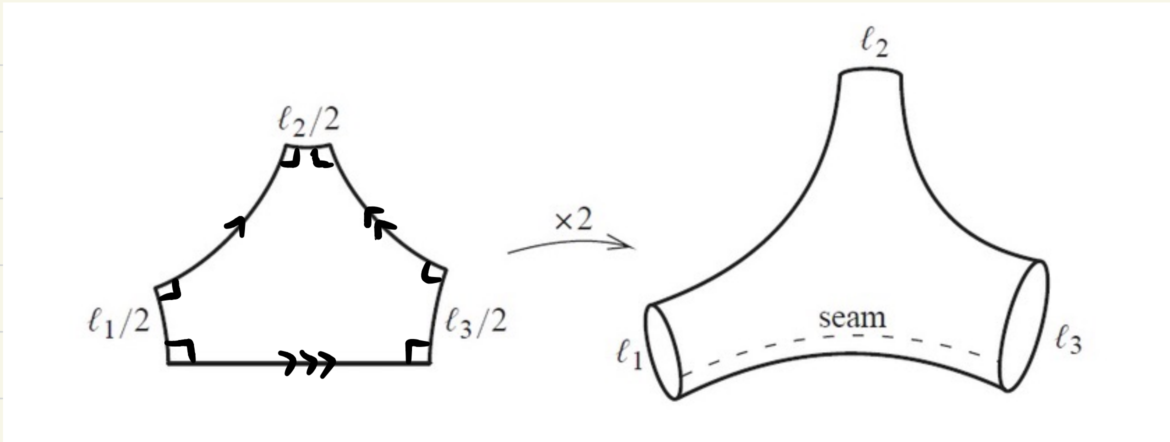
مثال: کره منهای سه نقطه



«شلوار»

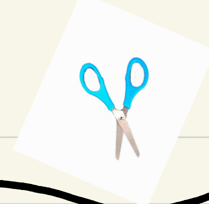
" PAIR OF PANTS "

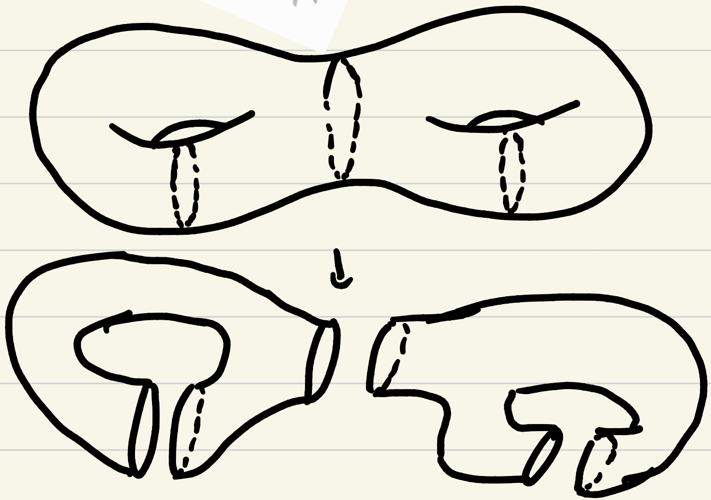
دو کپی از ۶ ضلعی زیر را روی مشخص‌ها به هم بدوزید تا یک شلوار هذلولوی بسازید



برای l_1 و l_2 و l_3 داده شده یک و تنها یک شلوار

با ساقِ l_1، l_2، l_3 در دنیای هذلولوی وجود دارد.



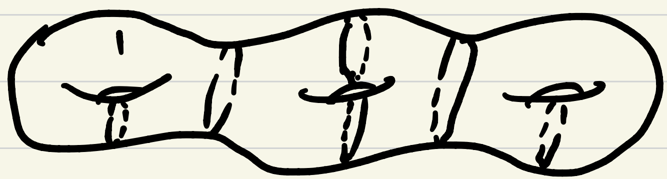


مختصات
Fenchel-Neilsen

$$\begin{cases} l_1, l_2, \dots \\ \theta_1, \theta_2, \dots \end{cases}$$

«ابزار شلواری»

PANTS DECOMPOSITION



$۲(g-۲)+۲$
$= ۲g-۲$
شلوار

$۶g-۶ =$ پیچش (Twist) $۳g-۳$ ، پاچه $۳g-۳$ $\Leftarrow$

۱۹۱۳_ ۱۹٤۳ تاشِمولِر

فضای تایشمولر $T_{g,n}$ ، فضای همه ساختارهای هذلولی روی یک رویه‌ی گونای g و n نقطه مارک‌دار که $2-2g-n<0$ است.

این فضا یک فضای پوششی همبند ساده (در واقع انقباض‌پذیر) از $M_{g,n}$ است. داریم: $M_{g,n} = T_{g,n}/\Gamma_{g,n}$ که $\Gamma_{g,n}$ MAPPING CLASS GROUP است.

Weil-Peterson, Wolpert

$$\dim(T_{g,n}) = 6g-6+2n$$

$$\omega_{WP} = \sum dl_i \wedge d\theta_i$$

یک خمینه همتافته با دو فرم

است. این فرم حجم روی $\mathcal{T}_{g,n}$ را در نتیجه روی $\mathcal{M}_{g,n}$ کوشنت می‌کنه

یکی از کارهای مریم میرزاخانی در تز دکتری خودش محاسبه حجم

$$Vol(\mathcal{M}_{g,n})$$

یا بطور کلی‌تر $Vol(\mathcal{M}_g(L_1,\dots,L_n))$ بود. به عنوان مثال

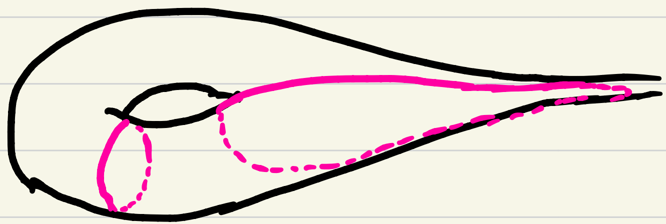
$$Vol(\mathcal{M}_1(L)) = L^2/24 + \frac{\pi^2}{6}$$

حالت خاص $Vol(\mathcal{M}_{1,1}) = \frac{\pi^2}{6}$ را ثابت خواهیم کرد!

مک‌شین ۱۹۶۳-

MacShane در رساله دکتری خود در سال ۱۹۹۱ یک فرمول عجیب [illegible]

در مورد چنبره با یک نقطه محذوف پیدا کرد:

$\mathbb{H} \longrightarrow$ 

$$\sum_{\gamma} \frac{1}{1+e^{\ell(\gamma)}} = \frac{1}{2}$$

γ: همه ژئودزی‌های بسته ساده

اثبات: $\mathrm{Vol}(\mathcal{M}_{1,1}) = \frac{\pi^2}{6}$

$$\mathcal{M}_{1,1}^{*} = \{ (X,\gamma) \mid X \in \mathcal{M}_{1,1} \text{ ، } \gamma \text{ یک ژئودزیک ساده بسته روی } X \}$$

$$\pi : \mathcal{M}_{1,1}^{*} \longrightarrow \mathcal{M}_{1,1} \qquad\qquad \ell : \mathcal{M}_{1,1}^{*} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(X,\gamma) \longmapsto X \qquad\qquad (X,\gamma) \longmapsto \ell(\gamma)$$

McShane $\Rightarrow \displaystyle\sum_{\pi(\gamma)=X} f(\ell(\gamma)) = \frac{1}{2} \qquad f(x) = \frac{1}{1+e^{x}}$

α را یک خم بسته ساده در رویه‌ی زمینی S بگیرید

$$\mathcal{M}_{1,1}^{*} = \mathcal{T}_{1,1} / \mathrm{Stab}(\alpha)$$

با استفاده از مختصات Fenchel_Neilsen

$$\mathcal{M}^*_{1,1} = \{ (\ell, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \ell \} / (\ell, 0) \sim (\ell, \ell)$$

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{M}_{1,1}) = ۲ \int_{\mathcal{M}_{1,1}} \sum_{\pi(Y)=X} f(\ell(Y)) \, dX$$

$$= ۲ \int_{\mathcal{M}^*_{1,1}} f(\ell(Y)) \, dY.$$

$$= ۲ \int_0^\infty \int_0^\ell f(\ell) \, d\theta \, d\ell = ۲ \int_0^\infty \frac{\ell}{1+e^\ell} \, d\ell = \frac{\pi^۲}{۴} \checkmark$$

مریم توانست اثر MacShane را تعمیم دهد، روش انتگرال گیری را تعمیم دهد و $\mathrm{Vol}(\mathcal{M}_g(L_1, \dots, L_n))$ را به طور بازگشتی حساب کند.

او همچنین با استفاده از این تکنیک‌ها توانست نشان دهد که تعداد ژئودزیک‌های بسته ساده با طول $\leq L$ در یک رویه $X \in \mathcal{M}_{g,n}$ از مرتبه $L^{6g-6+2n}$ است.

همچنین با استفاده از روش‌های ارائه شده حدس ویتن که اولین بار توسط Kontsevich در ۱۹۹۲ ثابت شده بود با روشی کاملاً جدید ثابت کند.

با تشکر

"هیچ سؤالی ضایع نیست
هرچند که بعضی جواب‌ها ممکن است
باشند"

" اسکار وایلد "