مجله‌ی ریاضی شریف
دوره‌ی سوم، شماره‌ی اول (بهار ۱۴۰۲)

کتاب‌هایی زیبا در نظریه محاسبه

مرتضی علیمی*

چکیده. شور و علاقه یک نویسنده و عطش او برای انتقال مطالب به مخاطب می‌تواند تأثیری شگرف در اثرش بگذارد. در این مقاله دو کتاب جالب علوم کامپیوتر نظری که علاقه نویسندگانشان در آن‌ها مشهود است را معرفی می‌کنیم.

۱. مقدمه

سال‌ها پیش، هنگام وبگردی به کتاب جالبی در زمینه علوم کامپیوتر نظری تحت عنوان «طبیعت محاسبه» برخوردم که تازه چاپ شده بود. به‌طور خاص عنوان یکی دو فصل آن توجه مرا جلب کرد؛ موضوع‌هایی بودند که دوست داشتم یاد بگیرم، و حداقل از روی فهرست به نظر می‌رسد توسط کتاب خوب پوشش داده شده‌اند. با جستجو معلوم شد که نسخه پیش‌نویس همه فصل‌ها روی وب‌سایت نویسنده‌ها بوده است، اما بعد از چاپ کتاب فایل‌ها را از روی سایت برداشته بودند.

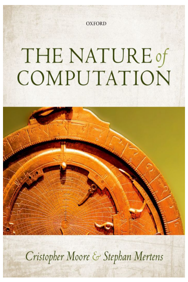
به نویسنده اول ایمیل زدم و گفتم کتابش به نظرم جالب می‌رسد، توضیح دادم خریدن کتاب از ایران سخت است، و درخواست کردم نسخه پیش‌نویس یکی دو تا از فصل‌ها را برایم بفرستد. جواب داد: مرتضی، کیندل داری؟ یا آدرس فیزیکی‌ات چیست؟ گفتم کیندل ندارم، و آدرس را برایش ایمیل کردم. دو سه ماه بعد دی‌اچ‌ال کتاب را درب منزل تحویل داد. از انتشارات دانشگاه آکسفورد پست شده بود.

جذاب بودن رفتار نویسنده کتاب، نحوه ارائه مطالب، کیفیت چاپ و خود محتوای کتاب یکی از انگیزه‌های نوشتن این مقاله شد.

۲. کتاب‌ها

۱.۲. طبیعت محاسبه [۱]. کتابی با گستره وسیع در مورد علوم کامپیوتر نظری. نویسندگان کتاب (کریستوفر مور و استفان مرتنز[1]) اصالتاً فیزیکدان بوده‌اند که به علوم‌کامپیوتر علاقه‌مند شده‌اند و سال‌ها در این زمینه کار کرده‌اند. بر این اساس کتابی هم که نوشته‌اند پیش‌نیاز علوم‌کامپیوتری در نظر نمی‌گیرد و برای دانشمندان حوزه‌های غیرعلوم‌کامپیوتر قابل استفاده است.

[1] Cristopher Moore and Stephan Mertens



شکل ۱: طبیعت محاسبه.

کتاب با استفاده از دانش و شهود مقدماتی برنامه‌نویسی (که فرض می‌کند مخاطب دارد) بحثش را در مورد الگوریتم‌ها، حل کارآی مسائل محاسباتی، و سختی مسائل آغاز می‌کند. معرفی مدل‌های فرمال محاسبه (ماشین‌های تورینگ، حساب لاندا، توابع بازگشتی) تا فصل ۷ به تعویق می‌افتد.

در ادامه، کتاب راجع به بهینه‌سازی و الگوریتم‌های تقریبی و تصادفی صحبت می‌کند. سپس به مباحث جالبی چون تعامل و تصادف، قدم‌زدن تصادفی و نمونه‌گیری و غیره می‌پردازد و در پایان، فصل مفصلی نیز در مورد محاسبات کوانتومی دارد.

کتاب جذاب نوشته شده است و باحال[1] بودن نویسندگان در آن مشهود است. صفحه‌بندی و شکل‌های زیبایی دارد و یادداشت‌های آخر فصل‌ها نیز خواندنی هستند. همچنین تمرین‌های خیلی خوبی نیز دارد که شامل بسیاری از سؤال‌های کلاسیک حیطه‌های مختلف علوم کامپیوتر نظری می‌شود.

باحال بودن کتاب و اینکه در بسیاری از بحث‌هایش از فرمت معمول قضیه‌ـاثبات اجتناب می‌کند، ممکن است این ذهنیت را ایجاد کند که کتاب سطحی یا غیردقیق است. اما در واقع کتاب مور و مرتنز کتاب عمیقی است و در مورد بسیاری از مسائل با دقت خوبی صحبت می‌کند.[2] شاید بتوان گفت بهترین استفاده از این کتاب این است که به عنوان منبع کمکی در کنار سایر منابع کلاسیک نظریه محاسبه، پیچیدگی محاسبه، و الگوریتم‌ها استفاده شود.

اگر قرار بود یک دوره ارشد علوم کامپیوتر طراحی کنم و ۳ درس اجباری در آن قرار دهم، به‌طور جدی به این فکر می‌کردم که دو درس را بر مبنای این کتاب بگذارم.

چند نمونه از مطالب کتاب [3]

- **بحثی در مورد مستقل بودن مسئله** $P \stackrel{?}{=} NP$. یکی از امکان‌هایی که در مورد مسئله $P \stackrel{?}{=} NP$ وجود دارد این است که این مسئله مستقل از اصول موضوعه استاندارد ریاضیات باشد. در صورتی که اینگونه باشد و $P = NP$، وضعیت عجیبی به وجود می‌آید. یک برنامه Q، به هر زبان برنامه‌نویسی‌ای که بخواهیم وجود دارد که مسئله $۳SAT$ را روی همه نمونه‌های ممکن در زمان چندجمله‌ای حل می‌کند. اما Q این خاصیت عجیب را دارد که نمی‌توان ثابت کرد که کار می‌کند، حتی اگر سورسش را داشته باشیم.

  دلایل خوبی دارد که فکر کنیم این سناریو نامحتمل است. قضیه آخر فرما را در نظر بگیرید: اعداد صحیح $x, y, z > ۰,\ n > ۲$ وجود ندارند که $x^n + y^n = z^n$ (فرض کنید این قضیه هنوز اثبات نشده بود). اگر این قضیه غلط می‌بود، حتماً قابل اثبات بود: کافی بود یک مثال نقض ارائه کنیم. بنابراین اگر قضیه مستقل از یک سیستم منطقی باشد که قدرت بررسی کردن مثال‌های نقض را دارد، باید درست باشد.

  حال گزاره زیر را، که آن را «$۳SAT$ **دشوار است**» می‌نامیم در نظر بگیرید.

  برای هر $n \geq ۱۰۰۰$، هیچ مدار بولی با حداکثر $n^{\log n}$ گیت وجود ندارد که همه نمونه‌های $۳SAT$ با اندازه n را حل کند.

  در صورتی که $P = NP$، این گزاره غلط است، چون اگر $۳SAT \in P$، برای n به اندازه کافی بزرگ چنین مدارهایی وجود دارند. از طرف دیگر، اگر $P \neq NP$، معقول است تصور کنیم «$۳SAT$ **دشوار است**» درست است. چون صرفاً در صورتی می‌تواند نادرست باشد که $NP \subseteq DTIME(n^{\log n})$ یا $NP \subseteq SIZE(n^{\log n})$ یا اینکه پیچیدگی $۳SAT$ به‌طور عجیبی نوسان کند؛ یعنی برای بعضی nها آسان و برای برخی سخت باشد. در صورتی که این احتمال‌ها را کنار بگذاریم، می‌توان درستی «$۳SAT$ **دشوار است**» را معادل درستی $P \neq NP$ در نظر گرفت.[4]

  اما گزاره «$۳SAT$ **دشوار است**» همان ساختار منطقی قضیه آخر فرما را دارد. اگر نادرست باشد، یک اثبات متناهی برای این واقعیت وجود دارد: مثلاً مداری با یک میلیارد گیت که $۳SAT$ را روی همه نمونه‌های با سایز هزار حل می‌کند.

  بنابراین اگر «$۳SAT$ **دشوار است**» مستقل از اصول موضوعه منطق باشد، باید درست باشد، و در نتیجه $P \neq NP$.

---

[1] cool

[2] همچنین ذهنیت «آسان» بودن کتاب هم اشتباه است؛ فهمیدن بسیاری از مطالب نیاز به صرف وقت و تمرکز زیاد دارد.

[3] نحوه بیان عیناً منطبق با کتاب نیست.

[4] طبق این شهود که اگر مسئله $۳SAT$ در زمان چندجمله‌ای قابل حل نباشد، احتمالاً به زمان نمایی نیاز دارد و مثلاً در زمان $O(n^{\log n})$ یا توسط مدارهایی با این اندازه نیز قابل حل نیست.

- **اثبات قضیه ناتمامیت گودل با استفاده از تصمیم‌ناپذیری مسئله توقف.** خلاصه اثبات: سیستم منطقی‌ای مثل Φ را در نظر بگیرید که به اندازه‌ای قوی باشد که گزاره‌های معمول در مورد محاسبه توسط آن قابل بیان باشند. به‌طور خاص بتوان توقف کردن یا نکردن یک ماشین تورینگ روی یک ورودی را در آن بیان کرد. همچنین هر وضعیت ماشین تورینگ را بتوان از وضعیت قبلی و توصیف ماشین تورینگ استنتاج کرد. در این صورت اگر ماشین M روی x متوقف شود، حتماً اثباتی برای آن در Φ وجود دارد (دنباله تمام وضعیت‌های محاسبه M روی x). در این صورت حتماً باید ماشین M و ورودی xی وجود داشته باشند که M روی x متوقف نشود و این موضوع در Φ قابل اثبات نباشد. در غیر این صورت می‌توان برای هر ماشین M و ورودی x، شروع به تولید همه اثبات‌ها (به ترتیب طول) کنیم و بررسی کنیم هر اثبات آیا متناظر با توقف یا عدم توقف M روی x است یا نه. به این ترتیب مسئله توقف محاسبه‌پذیر می‌شود که تناقض است. بنابراین گزاره درستی وجود دارد که در Φ قابل اثبات نیست.
- **یک یادداشت آخر فصل ۸.** خوانندگانی که نگران تعداد حالت‌های زیاد بازی Go هستند، خیالشان راحت خواهد شد اگر بفهمند که صرفاً یک درصد موقعیت‌های یک صفحه ۱۹×۱۹ می‌تواند به‌طور قانونی اتفاق بیفتد. به این ترتیب تعداد حالت‌ها از حدود $۱۰^{۱۷۲}$ به $۱۰^{۱۷۰}$ کاهش پیدا می‌کند.
- **تمرینی از فصل ۱۰ کتاب.** لم زیر را در نظر بگیرید.

لم ۱.۲ (لم ایزوله‌سازی). مجموعه m عضوی $S = \{e_۱, \dots, e_m\}$ و خانواده $\{T_۱, \dots, T_N\}$ از زیرمجموعه‌های S، به همراه عدد صحیح مثبت α را در نظر بگیرید. اگر تابع وزن $w : S \to \mathbb{Z}_+$ را به‌گونه‌ای در نظر بگیریم که $w(e_i)$ برای هر i به طور تصادفی مستقل و یکنواخت از $\{۱, \dots, \alpha m\}$ انتخاب شده باشد، به احتمال حداقل $۱ - \frac{۱}{\alpha}$ مجموعه T_j با وزن کمینه یکتاست.

با استفاده از لم ایزوله‌سازی، یک تحویل تصادفی چندجمله‌ای از مسئله CLIQUE به مسئله UNIQUE-CLIQUE ارائه دهید. به‌طور دقیق‌تر، یک الگوریتم تصادفی چندجمله‌ای بیان کنید که با ورودی گراف G و عدد k، گراف G' و عدد k' را خروجی دهد، به‌طوری که

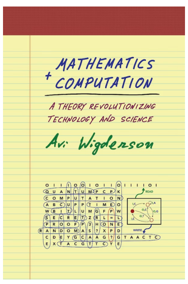
(۱) اگر G خوشه‌ای با اندازه k ندارد، G' هم خوشه‌ای با سایز k' ندارد.

(۲) اگر G خوشه با اندازه k دارد، به احتمال $\Omega(۱/n)$ G' خوشه‌ای با سایز k' دارد، و خوشه بیشینه آن نیز یکتاست.

- **عنوان برخی یادداشت‌های آخر فصل ۱۲ (قدم‌زدن تصادفی و مخلوط شدن سریع).**

Boltzmann. Free Energy. Metropolis. Rapid vs. polynomial. Card shuffling. Glauber dynamics. As rapid as possible. Graph colorings. Spanning trees and time reversal. Topological defects. Coupling from the Past. Arctic circles. Mixing times for tilings. Height functions for magnets and ice. Fourier Analysis. High conductance, large gap. Conductance and flows. Expanders. The zig-zag product. Spatial mixing and coloring the square lattice. Torpid mixing. Walks with momentum. The cutoff phenomenon.

۲.۲. ریاضیات و محاسبه [۲]. اوی ویگدرسون[1] یکی از بزرگترین علوم‌کامپیوتردانان جهان است که جوایز معتبر



شکل ۲: ریاضیات و محاسبه.

متعددی به خاطر پژوهش‌هایش دریافت کرده است؛ از جمله جایزه گودل، جایزه کنوث، و جایزه آبل. وی در کتابش تلاش می‌کند

[1] Avi Wigderson

دیدی از بالا به حیطه‌های مختلف علوم‌کامپیوتر نظری داشته باشد. در این راستا، او در ابتدا تمرکز را روی پیچیدگی محاسباتی می‌گذارد و بعد از مرور برخی مفاهیم محوری این حیطه، به مفهوم مهم تصادف[1] و نقش محوری آن در محاسبه می‌پردازد، و از شبه‌تصادف[2] و اثبات‌های تعاملی تصادفی نیز سخن می‌گوید. بعد از پرداختن به برخی پارادایم‌های دیگر پیچیدگی محاسباتی، از جمله پیچیدگی ارتباطی، پیچیدگی حسابی، و پیچیدگی حافظه، به برخی حیطه‌هایی که ارتباط عمیقی با پیچیدگی محاسباتی دارند می‌پردازد و همچنین از برخی پارادایم‌های متفاوت محاسباتی صحبت می‌کند. به‌طور خاص ویگدرسون فصل‌هایی را به نظریه یادگیری محاسباتی، رمزنگاری، محاسبات برخط و محاسبات توزیع‌شده، و همچنین محاسبات کوانتومی اختصاص می‌دهد.

دید عمیق و تجربه پژوهشی وسیع ویگدرسون به او این توانایی را می‌دهد که بتواند ارتباط عمیق شاخه‌های مختلف علوم‌کامپیوتر نظری (به‌طور کلی)، و پیچیدگی محاسباتی (به‌طور خاص) را بررسی کند و ظهور برخی ایده‌های مرکزی در شاخه‌های مختلف را نشان دهد.

وی از ارتباط پیچیدگی محاسباتی با بخش‌های مختلف ریاضیات نیز صحبت می‌کند، و در فصل آخر کتاب راجع به برخی مسائل کلی مرتبط با نظریه محاسبه و پیچیدگی محاسبه صحبت می‌کند. او سعی می‌کند تا نشان دهد که محاسبه یک مفهوم بسیار گسترده در جهان است. به‌علاوه، ابزارهای پیچیدگی محاسباتی در چند دهه اخیر را منشأ یک زاویه دید جدید به بسیاری از مسائل و حیطه‌های علمی معرفی می‌کند که باعث غنای درک ما از جهان می‌شود.

کتاب ویگدرسون در صدد منتقل کردن ایده‌های محوری و ارتباط آنها با یکدیگر است و عموماً وارد جزئیات نمی‌شود؛ به‌طور خاص در کتاب تقریباً هیچ قضیه‌ای [به‌طور دقیق] اثبات نمی‌شود. در همین راستا کتاب تمرین هم [رسماً] ندارد؛ هر چند متن کتاب ذهن را به فکر کردن روی موضوعات و مسائل مختلف وا می‌دارد.

بر این اساس کتاب ویگدرسون می‌تواند منبع کمکی بسیار خوبی برای تعمیق و تحکیم دانش علوم کامپیوتر نظری برای علاقمندان باشد.

منتخبی از کتاب

در فصل ۲۰، ویگدرسون متدلوژی مورد استفاده در علوم کامپیوتر نظری را در ده مورد خلاصه می‌کند.

- **مدل‌سازی محاسباتی.**[3] عملیات بنیادین، جریان اطلاعات، و منابع مورد استفاده هر فرایند را کشف و به صورت فرمال بیان کنید.
- **کارآیی الگوریتمی.**[4] تلاش کنید منابع استفاده شده توسط فرایندهای محاسباتی را کمینه کنید و مصالحه بین آنها را مطالعه کنید.
- **تفکر مجانبی.**[5] سعی کنید مسائل را روی نمونه‌های بزرگ و بزرگ‌تر مطالعه کنید؛ ساختارها معمولاً در حد خودشان را نشان می‌دهند.
- **تفکر دشمنانه.**[6] خودتان را برای بدترین حالت آماده کنید. محدودیت‌های خاص و ساختاری را با محدودیت‌های دشمنانه و بدترین حالت جایگزین کنید. انتظارات بالاتر در بسیاری از موارد درک چیزها را ساده‌تر می‌کند!
- **طبقه‌بندی.**[7] مسائل محاسباتی را بر حسب منابع مختلفی که در مدل‌های محاسباتی مختلف مصرف می‌کنند به کلاس‌های پیچیدگی طبقه‌بندی کنید.
- **تحویل.**[8] نادانی خود را نادیده بگیرید. حتی اگر نمی‌توانید مسئله‌ای را به‌طور کارآ حل کنید، فرض کنید می‌توانید، و بررسی کنید با این فرض چه مسائل دیگری را نیز می‌توانید به‌طور کارآ حل کنید.
- **تمامیت.**[9] سخت‌ترین مسائل هر کلاس پیچیدگی را بیابید.
- **سختی.**[10] سعی کنید نتایج مربوط به سختی مسائل اثبات کنید؛ این‌گونه نتایج مفیدند!

[1] Randomness
[2] Pseudo-randomness
[3] Computational modeling
[4] Algorithmic efficiency
[5] Asymptotic thinking
[6] Adversarial thinking
[7] Classification
[8] Reductions
[9] Completeness
[10] Hardness

- **موانع.**[۱] اگر مدت زیادی است که برای حل یک مسئله به بن‌بست خورده‌اید، همه تکنیک‌های امتحان شده برای حل مسئله را انتزاع کنید، و سعی کنید با استدلالی فرمال نشان دهید این تکنیک‌ها برای حل مسئله کافی نیستند.
- **بازی.**[۲] واقعیت را فراموش کنید. به دنبال غیرممکن‌ها بروید.

۳. برای خوش‌اشتهاها

در این بخش، چند منبع جالب و تقریباً تصادفی را برای علاقمندان نظریه محاسبه معرفی می‌کنم.

[۳]: لذیذ است، اما مطمئن شوید کارد و چنگال مناسب در اختیار دارید.

[۴]: می‌توان در کنار خانواده خورد.

[۵]: برای عضله‌سازی مفید است.[۳]

[۶]: خوراک تحویل‌کارها.

مراجع

[1] Cristopher Moore, Stephan Mertens, “The Nature of Computation”, Oxford University Press, 2011.

[2] Avi Wigderson, “Mathematics and Computation”, Princeton University Press, 2019.

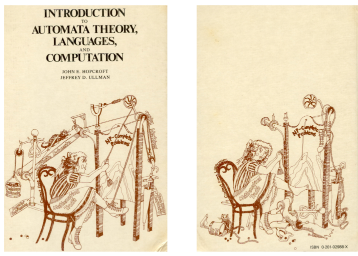
[3] Sebastian Oberhoff, “Incompleteness Ex Machina”, 2019.

[4] Scott Aaronson, “$P \stackrel{?}{=} NP$”.

[5] John Hopcroft, Jeffrey Ullman, “Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation”, 1st Edition[4], Addison-Wesley, 1979.

[6] Erik Demaine,“Algorithmic Lower Bounds: Fun with Hardness Proofs”, MIT course, Spring 2019.

پیوست آ. جلد هاپکرافت–اولمن



شکل ۳: جلد کتاب هاپکرافت–اولمن

متن زیر را در جوانی در مورد جلد کتاب [۵] نوشته بودم.

Mathematical truth governs Turing machines, operating beyond the limits of practical tractibility, with time and space complexity nevertheless always lurking in the background.

The more fragile, yet always practical world of finite machines - which can come alive through its intimate interaction with the living world - is under the threat of being toppled by Mathematical Truth, getting a helping hand from the pull of Turing machines’ non-finite yet more limited counterpart, the push-down automaton.

One should be wary of underestimating the role of regular yet not trivial expressions, which can lend a meaning to parts of the computation machinery, strengthened from more general languages which can come about handy in more specific contexts.

* فارغ‌التحصیل دکترای علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی شریف
رایانامه: morteza.alimi+academic@gmail.com

[1] Barriers
[2] Play

[۳] جلد و پشت جلد جالبی هم دارد! پیوست آ را ببینید.
[4] ویرایش اول!