مجله‌ی ریاضی شریف
دوره‌ی سوم، شماره‌ی اول (بهار ۱۴۰۲)

رویه‌های مینیمال و حدس دی‌جورجی

متین حاجیان*

چکیده. معادله ی آلن-کن یک معادله‌ی دیفرانسیل پاره‌ای نیم‌خطی است که هنگام بررسی مدل‌سازی ریاضی پدیده‌ی گذار فاز مطرح می‌شود. در این مقاله‌ی توصیفی قصد داریم حدس دی‌جورجی درمورد جواب‌های معادله‌ی آلن-کن را بیان کنیم و به ریشه‌های به‌وجودآمدن این حدس و تلاش‌هایی که برای حل آن انجام شده است بپردازیم. ابتدا انگیزه‌های فیزیکی مطرح‌شدن این معادله را بررسی می‌کنیم. برای این‌که انگیزه و شهود دی‌جورجی از این حدس را دریابیم نکاتی از نظریه‌ی رویه‌های مینیمال را بیان می‌کنیم و سپس به نتایجی که حول اثبات حدس دی‌جورجی به دست آمده است می‌پردازیم. هدف اصلی بیان چندی از اثبات‌ها و ایده‌های موجود حول موضوعاتی از نظریه‌ی رویه‌های مینیمال، نظریه‌ی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و نظریه‌ی هندسی اندازه می‌باشد. از خواننده انتظار می‌رود آشنایی مقدماتی با نظریه‌ی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و آنالیز حقیقی داشته باشد.

۱. انگیزه‌های فیزیکی

فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (زیرمجموعه‌ای کران‌دار از فضا) یک ظرف شامل نوعی سیال دوفازی باشد (به طور مثال مولکول‌های سازنده‌ی این سیال از دو نوع متفاوت باشند؛ مانند مخلوط آب و روغن). به هر حالت قرارگیری سیال در این ظرف یک تابع چگالی $u : \Omega \to [-۱, +۱]$ نسبت می‌دهیم (± ۱ نشان‌دهنده‌ی دو فاز ممکن از ذرات سیالمان هستند). در این صورت جرم کل سیال برابر است با $\int_\Omega u = m$. فرض کنید $W : \mathbb{R} \to [۰, +\infty)$ تابع چگالی انرژی این سیال باشد با این ویژگی که $W(\pm ۱) = ۰$ و $W(r) > ۰$ به ازای هر $r \neq \pm ۱$ (به چنین تابعی پتانسیل دوچاهه[۱] می‌گویند). در این صورت انرژی کل سیستم برابر است با $\mathcal{I}(u; \Omega) = \int_\Omega W(u)$. انتظار داریم سیستم در حالت تعادل کم‌ترین انرژی ممکن را داشته باشد. در این صورت مسأله‌ی یافتن حالت تعادل به مسأله‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$\min\{\int_\Omega W(u) : \int_\Omega u = m, u : \Omega \to [-۱, +۱]\}$$

اما این صورت‌بندی به میزان کافی دقیق نیست و انتظارات فیزیکی‌مان را از جواب‌هایی که به دست می‌دهد، برآورده نمی‌کند زیرا هزینه‌ای برای گذار فاز در آن در نظر گرفته نشده است و این باعث می‌شود که در بعضی موارد جواب مسأله یکتا نباشد و رفتارهای ناهمواری از خود نشان دهد. مثلاً قسمت‌هایی از سیال که در آن گذار فاز رخ می‌دهد می‌تواند رفتارهای به دلخواه پیچیده داشته باشد. به طور مثال فرض کنید $E \subset \Omega$ یک زیرمجموعه‌ی اندازه‌پذیر باشد به طوری که $\mu(E) = \frac{m+\mu(\Omega)}{۲}$. در این‌صورت تابع $u = \chi_E - \chi_{\Omega \setminus E}$ یک جواب این مسأله است. همان‌طور که مشاهده می‌کنید جواب مسأله در این حالت یکتا نیست و با توجه به رفتار مجموعه‌ی E می‌تواند پیچیده باشد.

فرم اصلاح‌شده‌ی تابعک نشان‌دهنده‌ی انرژی سیستم (که به انرژی گینزبرگ-لانداو[۲] معروف است و در نظریه وان در والس-کن-هیلارد[۳] [۹] برای گذار فاز معرفی می‌شود) به شکل زیر است:

$$\mathcal{I}_\epsilon(u; \Omega) = \int_\Omega \frac{\epsilon}{۲} |\nabla u|^۲ + \frac{۱}{\epsilon} W(u) \tag{۱.۱}$$

این تابعک انرژی را به ازای $\epsilon = ۱$ با $\mathcal{I}(u, \Omega)$ نشان می‌دهیم. می‌توان دید معادله‌ی اویلر-لاگرانژ این تابعک برابر است با $\epsilon \Delta u + \frac{۱}{\epsilon} W'(u) = ۰$، که به ازای $\epsilon = ۱$ و $W(x) = \frac{(۱-x^۲)^۲}{۴}$ معادله‌ی آلن-کن را به ما می‌دهد: $\Delta u = u^۳ - u$.

[1] Double well potential
[2] Ginzburg–Landau
[3] Van der Waals-Cahn-Hilliard

این معادله در حوزه‌هایی مانند بررسی ابررساناها و ابرسیالات [۱۱]، مطالعه‌ی گذار در گازها و جامدات [۱۲، ۱۳] و حتی در مطالعات کیهان‌شناسی [۱۴، ۱۵] نیز ظاهر می‌شود.

حدس دی‌جورجی درمورد ویژگی‌های تقارنی رده‌ی خاصی از جواب‌های معادله‌ی آلن-کن است. به طور دقیق‌تر این حدس بیان می‌کند که به ازای $n \leq ۸$ جواب‌هایی از معادله‌ی آلن-کن در $\mathbb{R}^n$ که کران‌دار و در یک جهت صعودی‌اند، توابعی یک‌بعدی‌اند یا معادلاً سطح ترازهایشان ابرصفحه‌هایی در فضا هستند. برای دریافت شهود پشت این حدس و اثبات‌های آن در بعضی از حالات ابتدا نیازمند مرور قضایا و تعاریفی از نظریه‌ی رویه‌های مینیمال به خصوص مسأله‌ی برنشتاین هستیم. به طور کلی ارتباط و شباهت‌های زیادی میان ادبیات نظریه‌ی رویه‌های مینیمال و تئوری مرتبط با حدس دی‌جورجی وجود دارد؛به طوری که بعضاً این حدس را نسخه‌ی اپسیلونی [۱] مسأله‌ی برنشتاین می‌نامند.

۲. نظریه‌ی رویه‌های مینیمال

مسأله‌ی پلاتو [۲] نقطه‌ی شروع نظریه‌ی رویه‌های مینیمال است. این مسأله عبارت است از یافتن رویه‌ای با کم‌ترین مساحت از میان رویه‌هایی که مرز مشخصی در فضا دارند. این مسأله به افتخار فیزیک‌دان بلژیکی جوزف پلاتو [۳] که با آزمایش با حباب‌های صابونی قصد داشت ویژگی‌های فیزیکی این رویه‌ها را به دست بیاورد نام‌گذاری شده است. تنش و انرژی حباب‌های صابونی با مساحتشان رابطه‌ی مستقیم دارد؛ برای همین حباب‌های صابونی تمایل به داشتن کم‌ترین مساحت ممکن را دارند و مدل فیزیکی خوبی برای شبیه‌سازی رویه‌های مینیمال هستند. البته این مسأله قبل‌تر از پلاتو توسط اویلر و لاگرانژ به عنوان حالت خاصی از مسائل حساب تغییرات [۴] بررسی شده بود. رادو [۵] و داگلاس [۶] این مسأله را با استفاده از ابزارهای هندسی حل کردند. اما روشی که آن‌ها به کار برده بودند مناسب برای تعمیم مسأله‌ی پلاتو به ابعاد بالاتر نبود. بعدها ریاضی‌دانانی مانند دی‌جورجی [۷] ، فلمینگ [۸] ، فدرر [۹] ، آلمگرن [۱۰] و دیگران با استفاده از ابزارهای نظریه‌ی اندازه تعاریف و مفاهیم دیگری مرتبط با رویه‌های مینیمال ارائه کردند، به کمک آن‌ها به بررسی مسأله‌ی پلاتو در ابعاد بالاتر پرداختند و نظریه‌ی هندسی اندازه را پایه‌گذاری کردند. آن‌ها تعریف ضعیف‌تری از یک رویه‌ی مینیمال مطرح و با استفاده از آن اثبات ساده‌تری از وجود رویه‌های مینیمال را ارائه کردند اما از طرفی این جواب‌ها الزاماً یکتا و هموار نبود و بررسی همواری و یکتایی آن‌ها تلاش‌های بیشتری نیاز داشت.

یکی دیگر از مسائل تاثیرگذار در تاریخ نظریه‌ی رویه‌های مینیمال مسأله‌ی برنشتاین است:

«اگر نمودار تابع $u : \mathbb{R}^{n-۱} \to \mathbb{R}$ یک رویه‌ی مینیمال در $\mathbb{R}^n$ باشد آیا تابع مورد نظر حتما یک تابع خطی است؟»

برای حالت $n = ۳$ اثبات‌های متعددی یافت شده است. برنشتاین این مسأله را برای این حالت در ۱۹۱۵ با استفاده از قضیه‌ی دیگری به نام قضیه‌ی هندسی برنشتاین [۱۷] اثبات کرد. این قضیه بیان می‌کند که اگر نمودار تابع هموار $f(x,y)$ بر $\mathbb{R}^۲$ در هر نقطه دارای خمیدگی گاوسی نامثبت و حداقل در یک نقطه منفی باشد، آنگاه تابع f تابعی بی‌کران است. وی به کمک این قضیه اثبات کرد که جواب‌هایی با رشد خطی از معادله‌ی بیضوی $\Sigma a_{i,j}(x)\partial_{i,j}w(x) = ۰$ توابعی ثابتند و سپس نشان داد که اگر u یک جواب از معادله‌ی رویه‌ی مینیمال در صفحه باشد، تابع $w = \arctan(\partial_\nu u)$ به ازای هر بردار ν در یک معادله‌ی بیضوی به فرمی که بالاتر ذکر شد صدق می‌کند و به این وسیله نشان داد که جواب‌های معادله‌ی رویه‌ی مینیمال در بعد ۳، توابعی خطی‌اند. اثبات اولیه‌ی برنشتاین نقص‌هایی داشت که بعداً توسط هاپف [۲۰] و مایکل [۱۹] کامل شد. ایده‌ی برنشتاین با تمام هوشمندی‌اش قابل تعمیم به ابعاد بالاتر نبود. اولین اثبات از مسأله‌ی برنشتاین که قابلیت تعمیم به ابعاد بالاتر داشت را فلمینگ [۲۱] ارائه کرد. وی با اثبات عدم وجود مخروط مینیمال نابدیهی در $\mathbb{R}^۳$ و اینکه عدم برقراری حدس برنشتاین در بعد ۳ وجود مخروط مینیمال نابدیهی در این بعد را نتیجه می‌دهد، اثباتی دیگر برای مسأله‌ی برنشتاین در این بعد داد. دی‌جورجی [۱۸] نشان داد که عدم برقراری حدس برنشتاین در $\mathbb{R}^n$ وجود مخروط مینیمال نابدیهی در $\mathbb{R}^{n-۱}$ را نتیجه می‌دهد و در نتیجه‌ی اثبات

[1] ϵ-version
[2] The Plateau problem
[3] Joseph Plateau
[4] Variational Calculus
[5] Tibor Rado
[6] Jesse Doughlas
[7] Ennio De Giorgi
[8] Wendell Felming
[9] Herbert Federer
[10] Frederick Justin Almgren

پیشین فلمینگ اثباتی برای حدس برنشتاین در $\mathbb{R}^۴$ ارائه کرد. اثبات عدم وجود مخروط‌های مینیمال نابدیهی توسط آلمگرن [۲۲] در بعد ۴ و سایمونز[1] [۲۳] تا بعد ۷ منجر به حل مسأله‌ی برنشتاین در این ابعاد شد. همچنین وجود مخروط مینیمال نابدیهی در بعد ۸ و یافتن مثال نقض در بعد ۹ توسط دی‌جورجی-جوستی[2]-بومبیری[3] [۲۴] مسأله‌ی برنشتاین را به طور کامل حل کرد. سایمون[4] با استفاده از ابزارهای هندسه‌ی دیفرانسیل اثبات دیگری برای مسأله‌ی برنشتاین به ازای $n = ۳$ ارائه کرد که بعدها تعمیم آن توسط یائو و شوئن منجر به اثبات مسأله‌ی برنشتاین تا بعد ۶ شد. هدف نهاییمان از این بخش بیان ایده‌های مربوط به اثبات وجود رویه‌های مینیمال و همواری آن‌ها با استفاده از قضیه‌ی بهبودی صافی است که الهام‌بخش اثبات حدس دی‌جورجی توسط سوین بوده است.

۱.۲. تعاریف اولیه و قضیه‌ی وجود رویه‌های مینیمال. در این قسمت قصد داریم اثباتی از وجود رویه‌های مینیمال از نقص بعد[5] ۱ با شرایط مرزی داده‌شده را بیان کنیم. برای این کار ابتدا در فضای بزرگتری از رویه‌های هموار به دنبال جواب مدنظرمان می‌گردیم و بدین‌ترتیب اثبات ساده‌تری از وجود چنین رویه‌ای خواهیم یافت. سپس همواری جوابی که به دست می‌آید را به کمک ابزارهای دیگری اثبات می‌کنیم. این کار مشابه تعریف جواب ضعیف برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و سپس تلاش برای اثبات همواری این جواب‌هاست. فضایی که در آن قصد داریم به جست‌وجوی رویه‌ی مدنظرمان بگردیم، فضای همه‌ی رویه‌هایی است که مرز مجموعه‌ی اندازه‌پذیری از فضا هستند. ابتدا نیازمند تعمیم تعریف مساحت برای چنین رویه‌هایی هستیم که الزاماً هموار نیستند.

برای مرز مجموعه‌ی هموار E، مساحت به صورت انتگرال نرم بردار نرمالش بر آن رویه تعریف می‌شود. می‌توانیم میدان برداری ناشی از بردار نرمال این رویه را با توابع برداری‌ای با تکیه‌گاه فشرده تقریب بزنیم. در این صورت تساوی زیر به دست می‌آید:

$$Area(\partial E) = \int_{\partial E} |\nu_E|^۲ = \sup\{\int_{\partial E} X.\nu_E | X \in C_c^۱(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n), |X| \leq ۱\} \qquad (۱.۲)$$

با توجه به همواری ∂E و استفاده از قضیه‌ی دیورژانس داریم: $\int_{\partial E} X.\nu_E = \int_E \nabla\cdot X$. پس عبارت (۱.۲) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$Area(\partial E) = \sup\{\int_E \nabla\cdot X | X \in C_c^۱(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n), |X| \leq ۱\}$$

توجه کنید که این عبارت جدید را می‌توان برای زیرمجموعه‌هایی از صفحه که مرز هموار ندارند نیز محاسبه کرد و این ابزاری را برای تعمیم تعریف مساحت به رویه‌هایی که هموار نیستند به ما می‌دهد.

تعریف ۱.۲. فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ یک زیرمجموعه‌ی باز و $E \subset \mathbb{R}^n$ یک زیرمجموعه‌ی بورل باشد. در این صورت محیط[6] E در Ω را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Per(E;\Omega) = \sup\{\int_E \nabla\cdot X | X \in C_c^۱(\Omega;\mathbb{R}^n), |X| \leq ۱\}$$

مجموعه‌ی E را در Ω دارای محیط متناهی می‌نامیم اگر $Per(E;\Omega) < \infty$.

تعریف ۲.۲. فرض کنید $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ باز و $E \subset \Omega$ یک زیرمجموعه‌ی بورل از Ω باشد. در این صورت می‌گوییم E یک مجموعه‌ی مینیمال در Ω است اگر به ازای هر زیرمجموعه‌ی فشرده مانند $K \subset \Omega$ و $F \subset \Omega$ که $F\backslash K = E\backslash K$، داشته باشیم: $Per(E;K) \leq Per(F;K)$. در این صورت ∂E را یک رویه‌ی مینیمال کمینه[7] می‌نامیم.

در تعریف محیط یک مجموعه با ثابت نگه‌داشتن Ω، $Per(E;\Omega)$ را می‌توان به عنوان یک نگاشت از زیر مجموعه‌های Ω به $[۰,+\infty)$ در نظر گرفت. همچنین هر زیرمجموعه از Ω را می‌توان با تابع مشخصه‌اش یکی در نظر گرفت. بدین‌وسیله می‌توان همگرایی را برای زیرمجموعه‌های Ω و پیوستگی را برای تابعک $Per(E;\Omega)$ تعریف کرد.

[1] James Simons
[2] Enrico Giusti
[3] Enrico Bombieri
[4] Leon Simon
[5] co-dimension
[6] Perimeter
[7] Minimizing minimal surface

تعریف ۳.۲. فرض کنید E_k دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های Ω و E نیز یک زیرمجموعه از Ω باشد. در این صورت می‌گوییم E_k در $L^{1}(\Omega)$ (مشابهاً در $L^{1}_{loc}(\Omega)$) به E میل می‌کند اگر χ_{E_k} در $L^{1}(\Omega)$ (مشابهاً در $L^{1}_{loc}(\Omega)$) به χ_E میل کند.

در نتیجه $Per(E;\Omega)$ را می‌توان به عنوان یک تابعک از زیرمجموعه‌ای روی فضای $L^{1}_{Loc}(\Omega)$ یا $L^{1}(\Omega)$ در نظر گرفت. مسأله‌ی یافتن رویه‌های مینیمال به نوعی مسأله‌ی یافتن کمینه‌های این تابعک است. برای این‌که نشان دهیم این تابعک کمینه دارد نیاز به ویژگی‌های آن مانند پیوستگی و از پایین کران‌دار بودن آن داریم. برای مشاهده‌ی اثبات قضایای پیش‌رو می‌توانید به مرجع [۱۰] مراجعه کنید.

قضیه ۴.۲. فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ باز و E_k دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های بورل Ω باشند که در $L^{1}_{loc}(\Omega)$ به E میل می‌کنند. در این صورت داریم: $Per(E;\Omega) \leq \liminf_{k\to+\infty} Per(E_k;\Omega)$

قضیه ۵.۲. فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ باز و E_k دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های بورل $\mathbb{R}^n$ باشد به طوری که $Per(E_k;\Omega) \leq C$، در این صورت زیردنباله‌ای همگرا در $L^{1}_{Loc}(\Omega)$ از E_k به مجموعه‌ي بورلی مانند E وجود خواهد داشت.

با استفاده از قضایای بالا وجود رویه‌های مینیمال را می‌توان نتیجه گرفت.

قضیه ۶.۲. فرض کنید F زیرمجموعه‌ای از $B_۲$ با محیط متناهی باشد. در این صورت $E \subset B_۲$ موجود است که $E\backslash B_۱ = F\backslash B_۱$ و به ازای هر $E' \subset B_۲$ که $E'\backslash B_۱ = F\backslash B_۱$ داریم: $Per(E;B_۱) \leq Per(E';B_۱)$.

اثبات. ایده‌ی این اثبات مربوط به روش کلی‌تری در نظریه‌ی معادلات دیفرانسیل تحت عنوان روش‌های مستقیم حساب تغییرات[1] مربوط می‌شود. تعریف می‌کنیم: $p = \inf\{Per(E';B_۲) : E'\backslash B_۱ = F\backslash B_۱\}$. داریم: $p \leq Per(F;B_۲) \leq \infty$. بنابر تعریف دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های $B_۲$ مانند E_m موجودند که

$$E_m\backslash B_۱ = F\backslash B_۱, \lim_{m\to\infty} Per(E_m;B_۲) = p.$$

در این صورت بنابر قضیه‌ی (۵.۲) زیردنباله‌ای از E_m مانند E_{m_k} موجود است به نحوی که: $\lim_{k\to\infty} E_{m_k} = E$ که همگرایی در $L^{1}_{loc}(B_۲)$ رخ می‌دهد. بنابر قضیه‌ی (۴.۲) داریم: $Per(E;B_۲) \leq p$. در نتیجه E یک مجموعه با مرز مینیمال و شرایط مرزی داده شده است. □

۲.۲. رفتار موضعی رویه‌های مینیمال. اثباتی که در قسمت قبل برای وجود رویه‌های مینیمال ارائه کردیم تضمینی درمورد هموار‌بودن این رویه‌ها به ما نمی‌دهد. در این قسمت با بررسی رفتار موضعی این رویه‌ها هموار‌ی آن‌ها را اثبات می‌کنیم. روشی که اینجا پی می‌گیریم به نام اپسیلون-هموار‌ی[2] و روش انفجار[3] شناخته می‌شود و در اثبات هموار‌ی کمینه‌های تابعک‌های انرژی‌ای که در نظریه‌ی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و نظریه‌ی هندسی اندازه ظاهر می‌شود نیز کاربرد دارد.
در حالت کلی هموار‌ی و مشتق‌پذیری یک تابع به نزول و سرعت نزول نرم خاصی از آن تابع مرتبط می‌گردد. به طور مثال اگر بتوانیم نرم مشتق ضعیف کمینه‌ای از تابعک انرژی دیریشله را به میزان کافی کوچک کنیم، می‌توانیم ثابت کنیم که آن تابع $C^{۱,\alpha}$ است. این قضیه به اپسیلون-هموار‌ی معروف است [؟]. دی‌جورجی اولین‌بار مشابه این قضیه را برای رویه‌های مینیمال ثابت کرد. اثبات وی مبتنی بر تقریب‌زدن رویه‌های مینیمال با توابع هارمونیک بود [۲۵]. در اینجا ما به اثبات دیگری از این قضیه که سوین[4] آن را اثبات کرده است اشاره خواهیم کرد. این اثبات از نامساوی هارنک[5] برای جواب‌های چسبندگی استفاده و قضیه‌ی کلی‌تری به نام بهبودی صافی[6] را اثبات و از آن قضیه‌ی اپسیلون-هموار‌ی را برای رویه‌های مینیمال نتیجه‌گیری کرده است. سوین با استفاده از ایده‌های مشابه توانست حدس دی‌جورجی را تا بعد ۸ تحت شرط حد یکنواخت جواب‌ها اثبات کند.
به‌طور شهودی قضیه بهبودی صافی بیان می‌کند که اگر بتوانیم مجموعه‌ی مینیمال E را در درون استوانه‌ای با ارتفاع به میزان کافی کوچک محبوس کنیم، آن‌گاه در جهت دیگری می‌توانیم آن را در استوانه‌ای با ارتفاع کوچکتری محبوس کنیم به

[1] Direct method of calculus of variations
[2] ϵ-Regularity
[3] Blow up Method
[4] Ovidiu Savin
[5] Harnack's inequality
[6] Improvement of flatness

نحوی که میزان کوچک‌شدن آن ضریبی از ارتفاع استوانه اولیه است و این ضریب تنها به بعد فضا بستگی دارد. با استفاده‌ی مکرر از قضیه‌ی بهبودی صافی می‌توان دنباله‌ای همگرا از جهت‌ها را یافت به نحوی که حد آن‌ها بردار عمود بر رویه است و از این همواری $C^{1,\alpha}$ رویه‌مان نتیجه می‌شود.

بنابراین برای اثبات همواری رویه‌ی مینیمال E کافیست ثابت کنیم که در همسایگی هر نقطه به میزان کافی صاف است. یک روش بررسی رفتار موضعی یک کمینه تابعک انرژی، انبساط آن حول نقطه‌ی مدنظر و دیدن رفتار حدی آن است. این حد در صورت وجود خود نیز یک کمینه‌ی موضعی سرتاسری برای تابعک انرژی مدنظر است(در اینجا منظور از کمینه موضعی، کمینه بودن نسبت به تغییرات در دامنه‌های فشرده است). در نتیجه اگر بتوانیم همگرایی یکنواخت این دنباله‌ی انبساطی را اثبات و کمینه‌های موضعی سرتاسری تابعک مدنظر را دسته بندی کنیم، آن‌گاه می‌توانیم صافی مورد نیاز برای همواری کمینه را استنتاج کنیم.

فرض کنید E یک مجموعه‌ی مینیمال و $x \in \partial E$ باشد. دنباله‌ی $E_{x,r}$ را تعریف می‌کنیم: $E_{x,r} = \frac{E-x}{r}$. همانطور که بیان شد هدف ما یافتن رفتار این دنباله هنگامی است که r به صفر میل می‌کند. ابتدا کران بالایی برای محیط این دنباله ارائه و سپس با استفاده از آن وجود زیردنباله همگرا را اثبات می‌کنیم. توجه کنید که به ازای هر $R > 0$ و $r \in (0, \frac{1}{R})$ داریم:

$$Per(E_{x,r}; B_R) = \frac{Per(E; B_{rR}(x))}{r^{n-1}} \leq R^{n-1} Per(E; B_1(x)) \tag{۲.۲}$$

از قضیه‌ی (۵.۲) نتیجه می‌شود که $E_{x,r}$ زیردنباله‌ای همگرا در B_R دارد. با افزایش R و استفاده از استدلال قطری می‌توان ادعا کرد $E_{x,r}$ زیردنباله‌ای همگرا در $\mathbb{R}^n$ به مجموعه‌ای مانند F دارد. هم‌چنین با توجه به از پایین پیوسته بودن تابعک محیط و مینیمال‌بودن $E_{x,r}$ها، F نیز یک مجموعه‌ی مینیمال است. هم‌چنین با توجه به روند حدی‌ای که برای به دست آوردن F داشتیم انتظار داریم که تحت انبساط ناوردا یا به طور معادل یک مخروط حول نقطه‌ی x باشد. برای اثبات این موضوع به فرمول یکنوایی برای رویه‌های مینیمال نیازمندیم که اولین‌بار توسط فلمینگ مطرح شد.

قضیه ۷.۲. فرض کنید E یک مجموعه‌ی مینیمال و $x \in \partial E$ باشد. در این صورت تابع

$$\Psi_E(r) = \frac{\mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap B_r(x))}{r^{n-1}}$$

یک تابع صعودی است. هم‌چنین این تابع ثابت است اگر و تنها اگر E یک مخروط باشد.

با توجه به تعریف حدی مجموعه‌ی F، با نوشتن فرمول یکنوایی برای این مجموعه متوجه می‌شویم که مقدارش همیشه ثابت و درنتیجه F یک مخروط مینیمال است. گام‌های نهایی برای استفاده از این نتیجه برای اثبات همواری رویه‌های مینیمال قوی‌تر کردن همگرایی دنباله‌ی انفجاریمان به مخروط حدی و رده‌بندی مخروط‌های مینیمال است. توجه کنید که همگرایی‌ای که از قضیه (۵.۲) نتیجه می‌شود یکنواخت نیست و حتی در صورتی که مخروط حدی یک صفحه در فضا باشد نمی‌تواند تخمین یکنواختی که برای استفاده در قضیه اپسیلون-همواری نیاز داریم را به ما بدهد.

برای اثبات همگرایی یکنواخت از این ویژگی استفاده می‌کنیم که مجموعه‌های مینیمال حول نقاط مرزیشان نمی‌توانند بسیار تنک یا بسیار چگال باشند و حجمی که در یک گوی حول یک نقطه‌ی مرزی اشغال می‌کنند، متناسب با شعاع آن گوی است. معادل این تخمین چگالی رویه‌های مینیمال و استفاده از آن برای همگرایی یکنواخت دنباله‌ی انفجاری، برای جواب‌های معادله‌ی آلن-کن نیز اثبات شده و در اثبات سوین برای آن حدس نیز کاربرد دارد.

قضیه ۸.۲. فرض کنید $E \subset \mathbb{R}^n$ یک مجموعه‌ی مینیمال و $x \in \partial E$ باشد. در این صورت ثابت $c(n)$ که تنها وابسته به بعد است وجود دارد به طوری که: $|B_r(x) \cap E| \geq c(n) r^n$.

نتیجه ۹.۲. فرض کنید E_k دنباله‌ای از رویه‌های مینیمال باشند که در L^1_{loc} به رویه‌ی مینیمال E میل می‌کنند. در این‌صورت E_k در L^∞_{loc} به E میل می‌کند.

اثبات. باید نشان دهیم به ازای هر زیرمجموعه‌ی فشرده مانند K و هر $\epsilon > 0$، $N \in \mathbb{N}$ موجود است که به ازای هر $k > N$ داریم :

$$\partial E \cap K \subset \{x \in K : dist(x, \partial E_k) < \epsilon\} \quad , \quad \partial E_k \cap K \subset \{x \in K : dist(x, \partial E) < \epsilon\}$$

فرض کنید دنباله‌ای از نقاط مانند $x_{k_j} \in \partial E_{k_j} \cap K$ موجودند که $dist(x_{k_j}, \partial E) \geq \epsilon$ (حالت دیگر مشابها ثابت می‌شود). فرض کنید x نقطه‌ی حدی دنباله‌ی x_{k_j} باشد. در این‌صورت داریم $dist(x, \partial E) \geq \epsilon$ و $B_{\epsilon/2}(x) \subset E^{o}$ یا $B_{\epsilon/2}(x) \subset \overline{E}^{c}$. فرض کنید $B_{\epsilon/2}(x) \subset E^{o}$. حالت دیگر مشابهاً اثبات می‌شود. بنا بر فرض و قضیه‌ی بالا داریم:

$$c(n)(\frac{\epsilon}{2})^n \leq \lim_{k_j \to +\infty} |B_{\epsilon/2}(x_{k_j}) \cap E^c_{k_j}| = \lim_{k_j \to +\infty} \int_{B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_{k_j})} \chi_{E^c_{k_j}} = \int_{B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)} \chi_{E^c} = 0$$

که تناقض است و در نتیجه همگرایی رویه‌ها بر روی مجموعه‌های فشرده، یکنواخت است. □

همان‌طور که در مقدمه‌ی این قسمت اشاره شد در بعد ۷ به پایین مخروط مینیمال نابدیهی وجود ندارد و درنتیجه هر مخروط مینیمال یک صفحه در فضا است. ترکیب این نتیجه و قضایای قبلی همواربودن رویه‌های مینیمال با نقص بعد ۱ در این فضاها را به ما می‌دهد (حتی می‌توان به صورت قوی‌تر نتیجه گرفت که هر مجموعه‌ی مینیمال یک نیم‌فضاست). اولین مثال از مجموعه‌ای مینیمال با تکینگی نیز مخروط سایمونز در بعد ۸ است:

$$C_s = \{x \in \mathbb{R}^8 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2\}$$

در حالت کلی‌تر فدرر اثبات کرده که مجموعه‌ی تکینگی‌های مجموعه‌های مینیمال در بعد $n \geq 8$ یک مجموعه‌ی بسته و با بعد هاسدروف $n - 8$ است.

۳. انگیزه‌های نظری حدس دی‌جورجی

در این قسمت حدس دی‌جورجی را بیان و انگیزه‌های مطرح‌شدن این حدس را بیان می‌کنیم.

حدس ۱.۳ (دی‌جورجی_۱۹۷۸). فرض کنید $u \in C^2(\mathbb{R}^n, [-1, 1])$ که

$$\Delta u = u^3 - u, \quad \partial_n u > 0, \quad |u| < 1 \tag{1.3}$$

در این صورت در $n \leq 8$ سطح ترازهای u ابرصفحه‌هایی در فضا هستند یا به طور معادل u تابعی یک‌بعدی است؛ یعنی برداری مانند $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ موجود است که $u(x) = g(x \cdot \xi)$ که g جوابی از معادله‌ی (۱.۳) در بعد یک است.

برای دریافت شهود پشت حدس دی‌جورجی نیازمند بررسی کمینه‌های تابعک انرژی $\mathcal{I}_\epsilon(u; \mathbb{R}^n)$ هستیم. به همین جهت ابتدا تعریف دقیقی برای کمینه‌های این تابعک ارائه می‌دهیم.

تعریف ۲.۳. تابع u را موضعاً کمینه‌کننده‌ی تابعک انرژی $\mathcal{I}_\epsilon(u; \Omega)$ در Ω می‌نامیم هرگاه به ازای هر $A \subset \Omega$ که $\overline{A}$ در Ω فشرده است داشته باشیم:

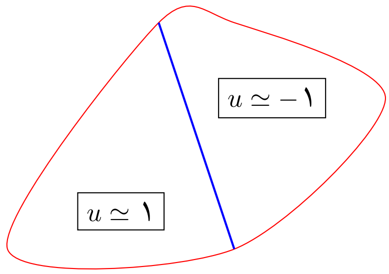
$$\mathcal{I}_\epsilon(u; A) \leq \mathcal{I}_\epsilon(u + \phi; A) \qquad \forall \phi \in C_c^\infty(A)$$

از این به بعد منظور از کمینه‌ی یک تابعک انرژی یک موضعاً کمینه‌کننده‌ی آن تابعک است.

فرض کنید u یک کمینه‌ی تابعک انرژی $\mathcal{I}_1(u; B_{\epsilon^{-1}})$ باشد که $B_{\epsilon^{-1}}$ گوی به شعاع ϵ^{-1} به مرکز مبدا است. در این صورت $u_\epsilon(x) = u(\frac{x}{\epsilon})$ یک کمینه‌ی تابعک انرژی $\mathcal{I}_\epsilon(u; B_1)$ در B_1 است. با توجه به تعاریف می‌توان دید که رفتار تابع u در کل فضا یا ناحیه‌هایی بزرگ از فضا مانند $B_{\epsilon^{-1}}$، زمانی که ϵ به صفر میل می‌کند برابر رفتار u_ϵ در گوی واحد است. حال تابعک انرژی مربوط به معادله‌ی آلن_کن را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{I}_\epsilon(u; B_1) = \int_{B_1} \frac{\epsilon}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{\epsilon}\frac{(1 - u^2)^2}{4} \tag{2.3}$$

$W(u) = \frac{(1-u^2)^2}{4}$ و $\frac{\epsilon}{2}|\nabla u|^2$ را به ترتیب انرژی پتانسیل و جنبشی این تابعک می‌نامیم. هنگامی که ϵ به صفر میل می‌کند ضریب انرژی پتانسیل در این تابعک به بی‌نهایت میل می‌کند. بنابراین از یک کمینه‌ی این تابعک انتظار داریم برای خنثی‌کردن اثر این ضریب مقدار $\frac{(1-u^2)^2}{4}$ را تا حد ممکن به صفر نزدیک کند و این یعنی تا حد ممکن مقادیر نزدیک به ± 1 را اتخاذ کند. در همین حال قسمت انرژی جنبشی این تابعک نیز از جهش‌های ناگهانی و ناپیوسته میان ± 1 جلوگیری می‌کند. پس انتظار داریم که به ازای ϵ به میزان کافی کوچک تابع کمینه‌کننده‌ی $\mathcal{I}_\epsilon(-; B_1)$ شبیه شکل زیر رفتار کند:



از نامساوی یانگ [1] نتیجه می‌شود:

$$\mathcal{I}_\epsilon(u;B_1)=\int_{B_1}\frac{\epsilon}{2}|\nabla u|^2+\frac{1}{\epsilon}\frac{(1-u^2)^2}{4}\geq\int_{B_1}\frac{1}{\sqrt{2}}(1-u^2)|\nabla u|$$

با استفاده از رابطه‌ی نقص_مساحت [2] سمت راست عبارت بالا را می‌توانیم به شکل زیر بازنویسی کنیم:

$$\int_{B_1}\frac{1}{\sqrt{2}}(1-u^2)|\nabla u|=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}(\int_{u^{-1}(s)}(1-u^2)d\mathcal{H}^{n-1}(x))ds=$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}(\int_{\{u=s\}}(1-s^2)d\mathcal{H}^{n-1}(x))ds=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}(1-s^2)\mathcal{H}^{n-1}(u=s)ds$$

پس داریم:

$$\mathcal{I}_\epsilon(u;B_1)\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}(1-s^2)\mathcal{H}^{n-1}(u=s)ds$$

از نامساوی بالا نتیجه می‌شود که اگر سطح ترازهای u رویه‌های مینیمال در گوی واحد به شعاع مبدا باشند و بنابر شرط برقراری تساوی در نامساوی یانگ که در ابتدای پاراگراف استفاده کردیم داشته باشیم $|\nabla u|=\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}(1-u^2)$، آنگاه تابع مورد نظر یک کمینه برای تابعک انرژی $\mathcal{I}_\epsilon(u;B_1)$ است. اگر فرض کنیم $u(0)=0$، از تساوی آخر نتیجه می‌شود $u(x)=\tanh(\frac{d_\Gamma(x)}{\sqrt{2}\epsilon})$، که $\Gamma=\{u=0\}$ و $d_\Gamma(x)$ فاصله‌ی x از Γ است. اما در حالت کلی همه‌ی سطح ترازهای یک کمینه‌ی تابعک انرژی ذکر شده، رویه‌های مینیمال نیستند. اگر $\Gamma=\{u=0\}$ یک رویه‌ی مینیمال باشد، آن‌گاه $\{u=s\}$ به ازای s هایی که به ±1 نزدیک نیستند و ϵ به میزان کافی کوچک، یک رویه‌ی مینیمال در گوی واحد است. از طرفی هنگامی که s به ±1 نزدیک و Γ یک رویه‌ی مینیمال باشد، تابع u که به شکل بالا تعریف شده است تقریباً یک کمینه برای تابعک انرژی $\mathcal{I}_\epsilon(u;B_1)$ خواهد بود.
با توجه به نتایج بالا می‌توان حدس زد که سطح ترازهای کمینه‌های تابعک انرژی $\mathcal{I}_\epsilon(u;B_1)$ هنگامی که ϵ به صفر میل می‌کند، به یک رویه‌ی مینیمال نزدیک می‌شود. همچنین توجه کنید که اگر تابعی که این کمینه‌ها به آن میل می‌کنند در یک جهت صعودی باشد آن‌گاه این رویه‌ی مینیمال، نمودار یک تابع است و بنابر قضیه‌ی برنشتاین در بعد کمتر از ۸ این رویه باید یک ابرصفحه در فضا باشد. بنابرین انتظار می‌رود سطح ترازهای جواب‌هایی از معادله‌ی آلن_کن که در کل فضا تعریف شده و در یک جهت صعودی‌اند ابرصفحه‌هایی در فضا باشند.
رفتار مجانبی کمینه‌های $\mathcal{I}_\epsilon(-;B_1)$ موضوع پژوهش‌های بسیاری بوده است. یکی از اولین نتایج دراین مورد متعلق به مودیکا است که با استفاده از مفهوم Γ_همگرایی قضیه‌ی زیر را اثبات کرد[۱۶].

قضیه ۳.۳ (مودیکا_۱۹۷۹). فرض کنید u_ϵ یک کمینه‌ی تابعک $\mathcal{I}_\epsilon(-;B_1)$ باشد. در این صورت زیردنباله‌ای همگرا در $L^1_{loc}(B_1)$ مانند u_{ϵ_k} و زیرمجموعه‌ی مینیمال E از B_1 موجود است که: $u_{\epsilon_k}\to\chi_E-\chi_{B_1\setminus E}$.

به وسیله‌ی قضیه‌ای درمورد تخمین چگالی یکنواخت سطح ترازهای کمینه‌های تابعک انرژی $\mathcal{I}_\epsilon(-;B_1)$ که توسط کافارلی [3] و کوردوبا [4] اثبات شده، می‌توان نشان داد که همگرایی سطح ترازها در قضیه‌ی مودیکا قوی‌تر از همگرایی در $L^1_{Loc}(B_1)$ است. در واقع می‌توان نشان داد که این سطح ترازها به طور یکنواخت روی زیرمجموعه‌های فشرده به ∂E میل می‌کنند.

[1] Young's Inequality
[2] Co-area formula
[3] Luis Caffarelli
[4] Antonio Cordoba

قضیه ۴.۳. فرض کنید u یک کمینه از تابعک انرژی $\mathcal{I}_\epsilon(-;B_1)$، $-1 < \alpha$ و $\beta < 1$ به طوری که $u(0) \geq \alpha$. در این صورت برای $r \geq r(\alpha,\beta)$ داریم: $|\{u > \beta\} \cap B_r| \geq cr^n$ که $c = c(n,W)$ ثابتی وابسته به بعد و تابع پتانسیل است.

حال فرض کنید u یک کمینه از تابعک $\mathcal{I}_1(-,\mathbb{R}^n)$ در کل فضا باشد. در این صورت u_{ϵ_k} یک کمینه‌ی $\mathcal{I}_{\epsilon_k}(-,B_1)$ در B_1 است و بنابر قضیه‌ی مودیکا زیردنباله‌ی همگرایی مانند u_{ϵ_k} موجود است که:

$$u_{\epsilon_k} \to \chi_E - \chi_{B_1/E}$$

و $E \subset B_1$ یک مجموعه‌ی مینیمال باشد. حال با استفاده از فرمول چگالی کافارلی-کوردوبا همانند حالت رویه‌های مینیمال اثبات می‌شود که همگرایی سطح‌ترازهای u_{ϵ_k} بر مجموعه‌های فشرده یکنواخت است. به طور خاص همگرایی $\{u_{\epsilon_k} = 0\} = \epsilon_k\{u = 0\} \to \partial E$ به طور یکنواخت بر مجموعه‌های فشرده نتیجه می‌شود. می‌دانیم به ازای $n \leq 7$، ∂E یک ابرصفحه در فضا، مثلاً $\{x_n = 0\}$ است. در این صورت از همگرایی یکنواخت $\{u_{\epsilon_k} = 0\}$ در B_1 نتیجه می‌شود دنباله‌هایی مانند θ_k, l_k موجودند به طوری که $l_k \to +\infty$، $\frac{\theta_k}{l_k} \to 0$ و داریم:

$$\{u = 0\} \cap B_{l_k} \subset \{|x_n| \leq \theta_k\}.$$

این رابطه بیان می‌کند که سطح تراز $\{u = 0\}$ را می‌توانیم در استوانه‌هایی محصور کنیم که نسبت ارتفاع به شعاعی از سطح تراز که در بر میگیرند به صفر میل می‌کند. این نتیجه را صافی در بی‌نهایت[1] نیز تعبیر می‌کنند.
شباهت‌های دیگری نیز میان کمینه‌های تابعک انرژی گینزبرگ-لانداو و رویه‌های مینیمال وجود دارد. به طور مثال مودیکا در ۱۹۸۹ اثبات کرد که اگر $F \geq F(1)$ و u یک جواب کران‌دار از معادله‌ی $\Delta u - F(u) = 0$ باشد آن‌گاه $\frac{E_R(u)}{R^{n-1}}$ بر حسب R مقداری صعودی است که در آن

$$E_R(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u) - F(1).$$

۴. اثبات‌ها و نتایج حول حدس دی‌جورجی

یکی از اولین نتایج در مورد حدس دی‌جورجی را مودیکا[2] و مورتولا[3] با اثبات این حدس در بعد ۲ با این شرط اضافه که سطح ترازهای u نمودار خانواده‌ای هم-لیپشیتز از توابع هستند، به دست آوردند [۲]. ایده‌ی آن‌ها استفاده از قضایای لیوویل‌مانند[4] برای معادلات بیضوی با فرم دیورژانسی برای نسبت $\sigma = \frac{u_{x_1}}{u_{x_2}}$ بود. حدس دی‌جورجی در حالت کلی در بعد ۲ توسط قصوب[5] و گویی[6] [۳] اثبات شد. آن‌ها نیز از نتایج لیوویل‌مانندی که توسط کافارلی-برستیکی[7]-نایرنبرگ[8] [۴] برای بررسی طیف عملگر شرودینگر توسعه داده شده بود، استفاده کردند. با استفاده از تکنیک‌های مشابه امبروزیو[9] و کبره[10] اثباتی برای حدس دی‌جورجی به ازای $n = 3$ ارائه کردند [۵].

حدس دی‌جورجی با این شرط اضافه که حد جواب‌ها در مثبت و منفی بی‌نهایت در جهت x_n به طور یکنواخت به ترتیب برابر مثبت و منفی یک است، به اسم حدس گیبونز[11] شناخته می‌شود و ابتدا توسط قصوب و گویی در $n \leq 3$ و سپس برای همه‌ی ابعاد به طور مستقل توسط بارلو[12]-بس[13]-گویی [۶]، برستسکی-همل[14]-مونئو[15] [۷] و فرینا[16] [۸] اثبات شد. سوین[17]

[1] Flatness at infinity
[2] Luciano Modica
[3] Stefano Mortola
[4] liouville type inequalities
[5] Nassif Ghosoub
[6] Changfeng Gui
[7] Henri Berestycki
[8] Louis Nirenberg
[9] Luigi Ambrosio
[10] Xavier Cabre
[11] Gibbons conjecture
[12] Martin T. Barlow
[13] Richard F. Bass
[14] Francois Hamel
[15] Regis Monneau
[16] Alberto Farina
[17] Ovidiu Savin

تنها با فرضی ساده درمورد حد جواب‌های معادله‌ی آلن-کن توانست حدس دی‌جورجی را تا $n \leq ۸$ اثبات نماید [۱]. در ادامه‌ی ایده‌هایی از اثبات حدس دی‌جورجی را بیان خواهیم کرد.

۱.۴. حدس دی‌جورجی در بعد ۲. قصوب و گویی در اصل حدس دی‌جورجی را برای رده‌ی وسیع‌تری از معادلات به شکل $\Delta u = F'(u)$ اثبات کردند که $F \in C^{۲}(\mathbb{R})$. در ادامه فرض می‌کنیم که $u : \mathbb{R}^{۲} \to \mathbb{R}$ یک جواب کران‌دار از معادله‌ی بالاست با این ویژگی که $\partial_{۲} u > ۰$. به ازای هر $x_{۰} \in \mathbb{R}^{۲}$ تعریف می‌کنیم: $\phi = \phi_{x_{۰}} = \nabla u \cdot \nu = \partial_{\nu} u$ که $\nu \in \mathbb{R}^{۲} \backslash \{۰\}$ به نحوی انتخاب می‌شود که داشته باشیم: $\nabla u(x_{۰}) \cdot \nu = ۰$. در این صورت داریم:

$$\Delta \phi = \partial_{۱۱} \phi + \partial_{۲۲} \phi = \nu \cdot \nabla(\partial_{۱۱} u) + \nu \cdot \nabla(\partial_{۲۲} u) = \nu \cdot \nabla(\Delta u)$$

و در نتیجه ϕ در معادله‌ی روبه‌رو صدق می‌کند: $(\Delta - F''(u))\phi = \Delta \phi - F''(u)\phi = ۰$. به عملگر بیضوی [۱] به شکل $L = -\Delta - V$ عملگر شرودینگر می‌گویند. یکی از عوامل تاثیرگذار بر جواب‌های معادله‌ی $Lu = ۰$ ویژگی‌های طیفی این عملگر می‌باشد.

اثبات قصوب و گویی از حدس دی‌جورجی بر پایه‌ی نتایجی از برستیکی-کافارلی-نایرنبرگ درمورد ویژگی‌های جواب‌های معادلات بیضوی در دامنه‌های بی‌کران بود. در واقع آن‌ها در پی یافتن مثال نقضی برای بعضی از مسائلی بودند که در [۴] درمورد طیف عملگر شرودینگر مطرح شده بود و در نتیجه‌ی آن اثباتی برای حدس دی‌جورجی در بعد ۲ پیدا کردند.

تابعک انرژی متناظر با عملگر شرودینگر $L = -\Delta - V$ عبارت است از:

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \phi|^{۲} - V|\phi|^{۲}}{\int_{\mathbb{R}^n} |\phi|^{۲}}$$

اثبات می‌شود که مقدار ویژه‌ی اساسی عملگر L برابر کمینه‌ی این تابعک بر $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ است.

قضیه ۱.۴. فرض کنید $L = -\Delta - V$ یک عملگر شرودینگر و $u \in C^{۲}(\mathbb{R}^n)$ یک جواب از معادله‌ی $Lu = ۰$ باشد. در این صورت داریم: $\lambda_{۱}(V) \leq ۰$ ($\lambda_{۱}(V)$ مقدار ویژه‌ی اساسی عملگر L می‌باشد.).

اثبات این قضیه مبتنی بر استفاده از از توابع برشی [۲] خاصی مانند ϕ_R و این نکته که u یک تابع ویژه برای این عملگر است، می‌باشد.

قضیه ۲.۴. فرض کنید $L = -\Delta - V$ عملگر شرودینگری بر $\mathbb{R}^n$ با پتانسیل هموار و کران‌دار V باشد. در این صورت $\lambda_{۱}(V) < ۰$ اگر و تنها اگر $Lu = ۰$ هیچ جواب مثبتی نداشته باشد.

قضیه ۳.۴. فرض کنید $L = -\Delta - V$ عملگر شرودینگری با پتانسیل هموار و کران‌دار V باشد. همچنین فرض کنید $Lu = ۰$ جوابی باشد که مقادیر مثبت و مقادیر منفی اتخاذ کند. در این صورت اگر $n = ۱, ۲$ داریم $\lambda_{۱}(V) < ۰$.

اثبات این قضیه نیز همانند قضیه (۱.۴) وابسته به وجود دسته‌ی خاصی از توابع برشی با تکیه‌گاه فشرده مانند ξ_R است به طوری که:

$$\xi_R \in H^{۱}(\mathbb{R}^n),\ \xi_R\big|_{B_R} = ۱,\ \lim_{R \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} u^{۲} |\nabla \xi_R|^{۲} dx = ۰$$

حال فرض کنید u جوابی از $Lu = ۰$ باشد که علامتش در کل فضا یکسان نیست (برای مشاهده‌ی اثبات دقیق سه قضیه‌ی ذکرشده و لم اکلند که در ادامه به آن اشاره خواهیم کرد می‌توانید به مقاله‌ی [۳] مراجعه کنید.). با توجه به این می‌توانیم مقدار $\mathcal{L}(\xi_R u)$ را همانند زیر بازنویسی کنیم:

$$\mathcal{L}(\xi_R u) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} u^{۲} |\nabla \xi_R|^{۲} dx}{\int_{\mathbb{R}^n} (\xi_R u)^{۲} dx} \tag{۱.۴}$$

فرض می‌کنیم که $\lambda_{۱}(V) = ۰$. در این صورت با توجه به خاصیت (۱.۴) توابع برشی دنباله‌ی $\xi_R |u|$ دنباله‌ای در $H^{۱}$ است به طوری که $\lim_{R \to \infty} \mathcal{L}(\xi_R u) = ۰$. سپس با استفاده از لم تغییراتی به نام لم اکلند [۳] به هر جمله‌ی دنباله‌ی $\xi_R u$ که یک دنباله‌ی

[1] Elliptic Operator
[2] cutoff function
[3] Ekeland's theorem

کمینه‌کننده برای $\mathcal{L}$ است، تابع کمینه‌کننده‌ی دیگری نسبت می‌دهیم. این لم کران بالایی برای مشتق $\mathcal{L}$ در توابع کمینه‌کننده‌ی جدید به ما می‌دهد که با استفاده از آن می‌توانیم ثابت کنیم $|u|$ نیز جوابی برای معادله‌ی $Lu = ۰$ است و این‌گونه با این فرض که u بر فضا تنها مثبت یا منفی است به تناقض می‌رسیم.
اما آیا چنین توابع برشی در همه‌ی ابعاد موجودند؟ برای یافتن چنین توابع برشی نیازمند حل مسأله‌ی کمینه‌سازی زیر هستیم:

$$\inf\{\int_{B_{R'}\backslash B_R} |\nabla\xi|^۲ dx : \xi|_{B_R} = ۱, \xi|_{\partial B_{R'}} = ۰\}$$

برای این مسأله در بعد ۲ ابتدا تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$\xi_{R,R'}(x) = \frac{\ln(|x|) - \ln(R)}{\ln(R') - \ln(R)}$$

در این صورت داریم:

$$\int_{B_{R'}\backslash B_R} |\nabla\xi|^۲ dx = \frac{۱}{\ln(R/R')}$$

در نتیجه تابع

$$\xi_R^۲(x) = \begin{cases} ۱ & x \in B_R \\ \xi_{R,R^۲}(x) & x \in B_{R^۲}\backslash B_R \\ ۰ & o.w. \end{cases}$$

یک تابع برش مناسب برای قضیه است. اما در بعد بزرگتر از ۳ جواب بنیادین این مسأله به صورت

$$\xi_{R,R'}(x) = \frac{|x|^{۲-n} - R^{۲-n}}{(R')^{۲-n} - R^{۲-n}}$$

است. با این حال نرم $H^۱$ این تابع هنگامی که $R \to \infty$ به صفر میل نمی‌کند و بنابراین برای استفاده در اثبات قضیه مناسب نیستند.

حال فرض کنید $u \in C^۲(\mathbb{R}^۲)$ تابعی کران‌دار باشد با این شرط که $\partial_۲ u > ۰$، در معادله‌ی (۱.۴) صدق کند و $\nu \in \mathbb{S}^۱$ به طوری که به ازای نقطه‌ای در دامنه مانند $x_۰$ داشته باشیم: $\nu \cdot \nabla u(x_۰) = ۰$. تعریف می‌کنیم : $\phi_{x_۰} = \phi = \nu \cdot \nabla u$. در این صورت دیدیم که این تابع و $\partial_۲ u$ در هسته‌ی عملگر شرودینگر $-\Delta - F''(u)$ قرار دارند. بنابر فرض $\partial_۲ > ۰$ و قضیه‌ی (۱.۴) و (۲.۴) می‌توانیم بگوییم $\lambda_۱(F''(u)) = ۰$. از طرفی بنابر قضیه‌ی (۳.۴) می‌توانیم بگوییم که ϕ تنها باید یک علامت داشته باشد. هم‌چنین داریم $\phi(x_۰) = ۰ = \min_{x\in\mathbb{R}^۲} \phi$. در نتیجه بنابر اصل ماکسیمم برای عملگرهای بیضوی ϕ برابر تابع ثابت صفر است و u در راستای ν ثابت است و حدس دی‌جورجی برای بعد ۲ اثبات می‌شود.

۲.۴. اثبات سوین از نسخه‌ی ضعیف‌تری از حدس دی‌جورجی. سوین با الهام از اثبات دی‌جورجی برای همواری رویه‌های مینیمال کمینه اثبات کرد سطح ترازهای جواب‌های معادله‌ی (۱.۳) که در شرط

$$\lim_{x_n\to\pm\infty} u(x', x_n) = \pm۱ \qquad (۲.۴)$$

صدق می‌کنند به ازای $n \leq ۸$ ابرصفحه‌هایی در فضا هستند. قضیه‌ی اصلی او که به بهبودی صافی [1] شهرت دارد ابرصفحه بودن سطح ترازهای کمینه‌های تابعک انرژی گینزبرگ_لانداو را نشان می‌دهد. ابتدا اثبات می‌کنیم که نقاط بحرانی تابعک انرژی گینزبرگ_لانداو (جواب‌هایی از معادله‌ی آلن_کن) که در شرط حدی (۲.۴) صدق می‌کنند کمینه‌هایی برای این تابعک هستند. روشی که برای اثبات این حکم استفاده می‌شود به روش صفحات محرک [2] شهرت دارد و اولین توسط لویس نایرنبرگ توسعه داده شده است.

لم ۴.۴. فرض کنید $u \in C^۲(\mathbb{R}^n, [-۱, ۱])$ در شرایط حدس دی‌جورجی (۱.۳) و شرط حدی (۲.۴) صدق کند. در این صورت u یک کمینه‌ی موضعی تابعک $\mathcal{I}$ است.

[1] Improvement of flatness
[2] Moving Planes

اثبات. اثبات می‌کنیم که این تابع تنها جواب معادله‌ی آلن-کن در هر گوی باز به مرکز مبدا و شرایط مرزی $u|_{\partial B_R}$ است. فرض کنید v جواب دیگری از معادله‌ی

$$\begin{cases} \Delta v = v^3 - v & x \in B_R \\ v = u & x \in \partial B_R \end{cases} \tag{۳.۴}$$

تعریف می‌کنیم

$$u_T(x) = u(x', x_n + T), \quad t_m = \inf\{t \geq 0 : v \leq u_t \in \overline{B_R}\}.$$

با توجه به این‌که v جواب متفاوتی نسبت به u است، $x_0 \in B_R$ موجود است که $u(x_0) \neq v(x_0)$. فرض کنید $u(x_0) > v(x_0)$ (اثبات حالت دیگر مشابه است). در این صورت داریم $t_m > 0$. بنابر تعریف داریم: $v \leq u_{t_m}$. هم‌چنین $x_1 \in \overline{B_R}$ موجود است به طوری که: $u_{t_m}(x_1) = v(x_1)$. بنابر خاصیت $\partial_n u > 0$ داریم:

$$u_{t_m}|_{\partial\Omega} > u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega}$$

پس نقطه‌ی x_1 باید متعلق به B_R باشد. با توجه به اصل ماکسیمم از این موضوع نتیجه می‌شود که u_{t_m} و v باید در B_R با هم برابر باشند. □

قضیه‌ی صافی بهبودیافته بیان می‌کند که اگر سطح تراز یک کمینه‌ی تابعک انرژی $\mathcal{I}$ در یک استوانه با ارتفاع به میزان کافی کوچک قرار گرفت، آن‌گاه در دستگاه مختصات دیگری در یک استوانه‌ی کوچک‌تر قرار می‌گیرد.

قضیه ۵.۴. فرض کنید u یک کمینه‌ی تابعک انرژی $\mathcal{I}$ در استوانه‌ی $\{|x'| \leq l\} \times \{|x_n| \leq l\}$ باشد به طوری که $0 \in \{u = 0\} \subset \{|x_n| \leq \theta\}$. مقدار ثابت $\theta_0 > 0$ را در نظر بگیرید. در این صورت ثوابتی وابسته به بعد مانند $0 < \eta_1 < \eta_2 < 1$ و ثابتی وابسته به n، θ_0 و F مانند ϵ_0 موجود است به طوری که به ازای هر θ و l که $\frac{\theta}{l} \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ و $\theta_0 \leq \theta$، داریم:

$$\{u = 0\} \cap (\{|x'| \leq \eta_2 l\} \times \{|x_n| \leq \eta_2 l\}) \subset \{|x \cdot \zeta| \leq \eta_1 \theta\},$$

به ازای یک $\zeta \in \mathbb{S}^{n-1}$.

حال فرض کنید u یک کمینه‌ی تابعک انرژی $\mathcal{I}$ در $\mathbb{R}^n$ باشد و $u(0) = 0$. فرض کنید دنباله‌های θ_k, l_k, ξ_k موجود باشند که

$$\xi_k \in \mathbb{S}^{n-1} \quad l_k \to +\infty \quad \frac{\theta_k}{l_k} \to 0 \tag{۴.۴}$$

به طوری که:

$$\{u = 0\} \cap \{|\pi_{\xi_k} x| \leq l_k\} \cap \{|x \cdot \xi_k| \leq l_k\} \subset \{|x \cdot \xi_k| \leq \theta_k\} \tag{۵.۴}$$

بنا بر فرض u یک کمینه در استوانه‌ی $\{|x'| \leq l_k\} \times \{|x_n| \leq l_k\}$ نیز هست. بنا بر شرط ۵.۴، $\{u = 0\}$ در یک دستگاه مختصات در درون استوانه‌ی کوتاه‌تری به ارتفاع θ_k قرار می‌گیرد. بنا بر شرط ۴.۴ برای هر $\epsilon > 0$ می‌توان k را به میزان کافی بزرگ انتخاب کرد به نحوی که $\frac{\theta_k}{l_k} \leq \epsilon$. θ_0 را ثابت در نظر بگیرید و فرض کنید $0 < \epsilon \leq \epsilon_0(\theta_0)$. در این صورت اگر داشته باشیم $\theta_0 \leq \theta$ می‌توان با استفاده از قضیه‌ی ۵.۴ دستگاه مختصات دیگری یافت که در آن $\{u = 0\}$ در استوانه‌ای با ارتفاع کمتر قرار گیرد. با تکرار اعمال این قضیه می‌توانیم فرض کنیم دستگاه مختصاتی وجود دارد که در آن $\{u = 0\}$ در استوانه‌ای به ارتفاع θ'_k قرار می‌گیرد؛ یعنی l'_k موجود است که:

$$\eta_1 \theta_0 \leq \theta'_k \leq \theta_0 \quad , \quad \frac{\theta'_k}{l'_k} \leq \frac{\theta_k}{l_k} \leq \epsilon \tag{۶.۴}$$

بنابراین داریم: $l'_k \geq \frac{\eta_1}{\epsilon}\theta_0$. با میل‌دادن ϵ به صفر نتیجه می‌شود که $\{u = 0\}$ در نواری با سطح مقطع $\mathbb{R}^{n-1}$ و ارتفاع θ_0 قرار می‌گیرد. با توجه به این‌که θ_0 مقداری دل‌بخواه بود نتیجه می‌شود که $\{u = 0\}$ یک صفحه است.

قضیه‌ی صافی بهبودیافته (۵.۴) از تعمیم نامساوی هارنک برای سطح ترازهای کمینه‌های موضعی تابعک $\mathcal{I}$ نتیجه می‌شود.

اثبات سوین از نامساوی هارنک برای سطح ترازهای جواب‌های معادله‌ی آلن-کن شامل تقریب‌های پیچیده‌ای از اندازه‌ی مجموعه‌هایی از سطح ترازها و تصویرشان بر زیرفضاهای خطی است که بررسی و بیان آن‌ها خارج از اهداف این نوشته است.

۵. تعمیم‌هایی از حدس دی‌جورجی

فیگالی [1] و سرا [2] ثابت کردند هر جواب پایدار از معادله‌ی $(-\Delta)^{1/2}u + f(u) = 0$ در $\mathbb{R}^3$ یک تابع یک‌بعدی است [۲۷]. جواب‌های پایدار این معادله در واقع کمینه‌های پایداری از تابعک انرژی زیر هستند:

$$\int_{\{x_{n+1}\geq 0\}} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 \, dx \, dx_{n+1} + \int_{\{x_{n+1}=0\}} F(u)\, dx$$

چنین تابعک‌های انرژی‌ای ابتدا در نظریه‌ی بررسی تحول و پایداری کریستال‌ها مطرح شده‌اند [۲۶]. خواصی مشابه آنچه که برای تابعک انرژی گینزبرگ-لانداو اثبات کردیم قابل تعمیم به این تابعک نیز هستند. به طور مثال این تابعک نیز خاصیت Γ-همگرایی به تابعک محیط را دارد. یکی از گام‌های اساسی اثبات فیگالی و سرا این است که رویه‌های مینیمال پایدار در بعد سه تنها ابرصفحه‌ها هستند. حکمی که تا به حال نسخه مشابهش برای ابعاد بالاتر اثبات نشده است.

والدینوچی [3]، شیونزی [4] و سوین با ابزارهای مشابه احکام مرتبط با حدس دی‌جورجی را برای معادله‌ی آلن-کن و تابعک انرژی وابسته به p-لاپلاسین‌ها اثبات کرده‌اند [۲۸]. هم‌چنین سوین و داسیلوا [5] توانسته‌اند تقارن یک‌بعدی جواب‌های چسبندگی کران‌دار و در یک جهت یکنوای معادله‌ی کاملاً غیرخطی $F(D^2u) = f(u)$ را در بعد دو ثابت کنند [۲۹].

تشکر و قدردانی

نویسنده این مقاله مراتب قدردانی صمیمانه‌ی خود را نسبت به آقای دکتر فتوحی ابراز می‌دارد که با مطالعه‌ی نسخه‌ی اولیه‌ی این نوشته و ارائه‌ی پیشنهادهای ارزنده‌شان او را راهنمایی کردند.

مراجع

[1] Savin, O. (2009) Regularity of flat level sets in phase transitions ,*Annals of Mathematics*, **169**, 41–78.

[2] Modica L., Mortola S. (1980) Some entire solutions in the plane of nonlinear Poisson equations ,*Boll. Un. Mat. Ital.*, **17**, no. 2, 614–622.

[3] Ghosuob N. , Gui C. (1998) On a conjecture of De Giorgi and some related problems ,*Math. Ann.*, **311**, 481-491.

[4] Berestycki H., Caffarelli L., Nirenberg L. (1997) Further qualitative properties for elliptic equations in unbounded domains ,*Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 25*, **25**, 69-94.

[5] Ambrosio L., Cabre X, (2000) Entire solutions of semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^3$ and a conjecture of De Giorgi. ,*J. American Math. Soc.*, **13**, 725-739.

[6] Barlow M., Bass R., Gui C., (2000) The Liouville property and a conjecture of De Giorgi. ,*Comm. Pure Appl. Math.*, **53**, 1007-1038.

[7] Berestycki H., Hamel F., Monneau, R., (2000) One-dimensional symmetry of bounded entire solutions of some elliptic equations. ,*Duke Math. J.*, **103**, no. 3, 375–396.

[8] Farina A., (1999) Symmetry for solutions of semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$ and related conjectures. ,*Ricerche Mat.*, **48**, 129–154.

[9] Cahn J., Hillard J., (1958) Free energy of a nonuniform system I. Interfacial free energy. ,*J. Chem. Phys.*

[10] Figalli A., Cozzi M., Regularity theory of minimal surfaces: an overview. ,https://people.math.ethz.ch/~afigalli/lecture-notes-pdf/Regularity-theory-for-local-and-nonlocal-minimal-surfaces-an-overview.pdf

[11] Ginzburg V.L., Pitaevski L. P., ROn the theory of superfluidity. ,*Soveit Physics JETP*, 1958

[12] Rowlinson J. S., (1979) Translation of J. D. van der Waals (The thermodynamic thoery of capillarity under the hypothesis of a continuous variation of density) ,*J. Statist. Phys.*

[13] Allen S., Cahn J., (1979) A microscopic theory for antiphase boundry mothion and its application to antiphase domain coarsening. ,*Acta Metallurgia*

[14] Gilles Carbou (1995)Unicité et minimalité des solutions d'une équation de Ginzburg-Landau ,*Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*

[15] Gibbons G. W. , Townsend P. K., (1999) Bogomol'nyi equation for intersecting domain walls. ,*Phys. Rev. Lett.*

[1] Alessio Figalli
[2] Joaquim Serra
[3] Enrico Valdinoci
[4] Berardino Sciunzi
[5] Daniela De Silva

[16] Modica L. (1979)Γ-convergence to minimal surfaces problem and global solutions of $\Delta u = u^3 - u$. ,*Proceedings of the International Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis*

[17] Bernstein S., (1915) Sur un théorème de géométrie et son application aux équations aux dérivées partielles du type elliptique

[18] De Giorgi E, (1965) "Una extensione del teorema di Bernstein. ,*Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa.*, **19**, 79-85.

[19] Mickle E., (1965) "A remarke on a theorem of Serge Bernstein.

[20] Hopf E., On S. Bernstein's theorem on surfaces z(x,y) of nonpositive curvature.

[21] Fleming W.H., (1962) On the oriented Plateau problem,*Rend. Circ. Mat. Palermo.*, **17**, no. (2) 11, 69-90.

[22] Almgren F.J., (1966) FSome interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem. ,*Ann. of Math.*, **84**, 277-292.

[23] Simons J. (1968), Minimal varieties in riemannian manifolds. ,*Ann. of Math. (2)*, **88**, 62–105

[24] Bombieri E., De Giorgi E., Giusti E., (1969) Minimal cones and the bernstein theorem ,*Inventiones Math.*, **7**, 243-269.

[25] Giusti E. (1984) *Minimal surfaces and functions of bounded variation*. Birkh¨auser Verlag, Basel.

[26] Nabarro F.R.N.,. (1947) Dislocations in a simple cubic lattice. ,*Proc. Phys. Soc.*, **59**, 256–272.

[27] Figalli, A., Serra, J. , (2020) On stable solutions for boundary reactions: a De Giorgi-type result in dimension 4 + 1. , *Invent. math.*, **219**,153–177.

[28] Valdinoci E., Sciunzi B., Savin O. ,(2006) Flat Level Set Regularity of p-Laplace Phase Transitions, Mem. Amer. Math. Soc. 182 , no. 858.

[29] De Silva D., Savin O., (2009) Symmetry of global solutions to a class of fully nonlinear elliptic equations in 2D. ,*Indiana Univ. Math. J.*, **58**, no. 1, 301–315.

* دانشجوی کارشناسی ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف

رایانامه: matin.hajian@sharif.edu