مجله‌ی ریاضی شریف
دوره‌ی سوم، شماره‌ی اول (بهار ۱۴۰۲)

# آزمون انتخاب تیم دانشکده‌ی علوم ریاضی

علیرضا عظیمی‌نیا*

**چکیده.** آزمون انتخاب تیم دانشکده‌ی علوم ریاضی شریف برای مسابقات دانش‌جویی سال ۱۴۰۲ در سوم خردادماه امسال برگزار شد. در این بخش مسائل این آزمون و پاسخ آن‌ها را از نظر خواهیم گذراند.

## ۱. مسئله‌ها

(۱) دنباله‌ی $a_n > 0$ به صفر همگراست. نشان دهید هر بازه‌ی باز ناتهی $(a,b)$ یک زیربازه‌ی باز ناتهی $(c,d)$ دارد که هیچ عضوی در آن به صورت حاصل‌جمع ۱۴۰۲ عضو متمایز از دنباله‌ی $a_n$ نیست.

(۲) فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی سه‌بار مشتق‌پذیر با مشتقات پیوسته باشد. نشان دهید عدد حقیقی $a$ وجود دارد که

$$f(a)f'(a)f''(a)f'''(a) \geq 0$$

(۳) فرض کنید $S$ یک مجموعه‌ی متناهی از اعداد صحیح بزرگ‌تر از یک باشد که برای هر عدد طبیعی داده‌شده، یا عددی در $S$ وجود دارد که آن را عاد کند و یا عددی در $S$ وجود دارد که نسبت به آن اول باشد. ثابت کنید $S$ یا شامل یک عدد اول است یا شامل دو عدد است که ب.م.م آن‌ها یک عدد اول باشد.

(۴) فرض کنید $G$ یک گروه متناهی از ماتریس‌های $n \times n$ (با درایه‌های حقیقی) با عمل ضرب ماتریسی باشد. نشان دهید اگر جمع اثر (trace) همه‌ی عناصر این گروه صفر باشد، آنگاه جمع همه‌ی عناصر گروه هم صفر خواهد بود.

(۵) از سه کشور ایران، آلمان و فرانسه تعداد مساوی دانشمند قصد تشکیل گروه‌های تحقیقاتی سه نفره دارند. شرط این گروه‌ها این است که هر دانشمند در حداکثر یک گروه می‌تواند شرکت کند و هر گروه از هر سه کشور دانشمند داشته باشد. در ضمن هر سه دانشمند با هم سازگار باشند. سازگاری یک رابطه‌ی دوطرفه است. اگر الف با ب سازگار باشد، ب هم با الف سازگار است.

ابتدا نشان دهید برای هر تعداد زوجی از دانشمندان، اگر هر دانشمند با نصف دانشمندان هر کشور دیگر سازگار باشد، مثالی وجود دارد که حتی نتوان یک گروه تحقیقاتی هم ایجاد کرد. سپس نشان دهید اگر هر دانشمند با حداقل سه‌چهارم دانشمندان هر کشور دیگر سازگار باشد، می‌توان همه‌ی دانشمندان را به گروه‌های مجاز سه نفری افراز کرد.

(۶) فرض کنید $R$ یک حلقه‌ی جابه‌جایی، یک‌دار و حوزه صحیح (یعنی ضرب عناصر ناصفر، ناصفر است) باشد. عنصر وارون‌ناپذیر $p$ اول نامیده می‌شود اگر در شرط اقلیدس صدق کند، یعنی اگر $p|ab$ آنگاه $p|a$ یا $p|b$. نشان دهید اگر ایده‌آل $I$ متشکل از همه‌ی عناصری که بر همه‌ی توان‌های مثبت عنصر اول $p$ بخش‌پذیرند متناهی مولد باشد، آنگاه صفر است. با فرض $I = 0$ نشان دهید ایده‌آل تولید شده توسط $p$ در بین تمام ایده‌آل‌های اول ناصفر مینیمال است.

## ۲. پاسخ مسائل

**۱.۲. پاسخ مسئله‌ی اول.** مجموعه $S_k$ را مجموعه‌ی همه‌ی اعداد حقیقی که بصورت حاصل‌جمع $k$ عضو متمایز دنباله $a_n$ نوشته می‌شوند در نظر بگیرید. حکم را با استقرا روی $k$ ثابت می‌کنیم.

فرض کنید $k = 1$ و بازه $(a,b)$ داده شده است. اگر $b \leq 0$، چیزی برای اثبات وجود ندارد؛ پس فرض کنید $b > 0$. برای $0 < c < b$ و $n$ بزرگ داریم $a_n < c$، پس $a_n \notin (c,b)$. یعنی فقط تعداد متناهی از اعضای دنباله در $(c,b)$ قرار دارند. پس می‌توان $c < d < b$ را طوری انتخاب کرد که $(c,d)$ شامل هیچ عضو دنباله نباشد.

حال با فرض درستی حکم برای $k$، آن را برای $k+1$ ثابت می‌کنیم. برای بازه $(a,b)$ داده شده، زیربازه $(c',d)$ را طوری انتخاب کنید تا با $S_k$ اشتراک نداشته باشد. $h>0$ را نصف طول بازه $(c',d)$ فرض کنید. پس $c=c'+h$ وسط $(c',d)$ است. عدد $N$ را می‌توان یافت به طوری که $a_i<h$ برای $i>N$. حال عضو دلخواه $s\in S_{k+1}$ که جمع $k+1$ جمله متمایز از دنباله است را در نظر بگیرید. اگر $s\in(c,d)$ آنگاه جمله‌ی آخر حتماً یکی از $a_1,\dots,a_N$ است؛ در غیر این صورت جمله‌ی آخر از $h$ کمتر است، و جمع $k$ جمله‌ی اول در $(c',d)$ می‌افتد، که متناقض است با نحوه تعریف $(c',d)$. اکنون با استقرا روی $N$، می‌توان زیربازه‌ای از $(c,d)$ یافت که مجموع‌های با جمله آخر $a_1,\dots,a_N$ در آن نیستند. بازه $(c-a_1,d-a_1)$ را در نظر بگیرید. زیربازه $(e,f)$ را می‌توان یافت به طوری که با $S_k$ اشتراک ندارد. اکنون $(c_1,d_1)$ که $c_1=e+a_1$ و $d_1=f+a_1$ زیربازه‌ای از $(c,d)$ است که شامل هیچ عضو $S_{k+1}$ با جمله‌ی آخر $a_1$ (یا هر $a_i$ که $i>N$) نیست. به همین ترتیب، می‌توان زیربازه $(c_2,d_2)$ از $(c_1,d_1)$ را یافت که شامل هیچ عضو $S_{k+1}$ با جمله‌ی آخر $a_2$ (یا $a_1$ یا هر $a_i$ که $i>N$) نیست. و الی آخر.

**۲.۲. پاسخ مسئله‌ی دوم.** اگر هر کدام از $f$، $f'$، $f''$، $f'''$ تغییر علامت دهند، نقطه تغییر علامت جواب است. نشان می‌دهیم اگر $f$، $f'$، $f''$ تغییر علامت ندهند آنگاه $f$ و $f''$ هم‌علامت‌اند. فرض کنید $f''$ مثبت باشد. آنگاه $f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(c)x^2/2$ برای $c$ مناسب. پس $f(x)>f(0)+f'(0)x$ برای هر $x$، که نتیجه می‌دهد حتماً $f(x)$ برای $x$ بزرگ و هم‌علامت با $f'(0)$ مثبت است؛ و چون $f$ تغییر علامت نمی‌دهد پس همه‌جا مثبت است. به طور مشابه، اگر $f''$ منفی باشد، $f$ نیز اینگونه است. بنابراین $f(x)f''(x)\geq 0$ برای هر $x$. به طور مشابه، $f'(x)f'''(x)\geq 0$ برای هر $x$.

**۳.۲. پاسخ مسئله‌ی سوم.** عدد طبیعی $n$ را کوچکترین عددی در نظر بگیرید که نسبت به هیچ‌کدام از عناصر $S$ اول نباشد. توجه شود که مثلا ضرب تمام عناصر $S$ نسبت به هیچ‌کدام از عناصر $S$ اول نیست؛ پس چنین $n$ وجود دارد. طبق فرض، $m\in S$ وجود دارد که $n$ را عاد کند. اگر $m$ اول باشد، کار تمام است. در غیر اینصورت عدد اول $p$ که $m$ (و در نتیجه $n$) را عاد می‌کند انتخاب کنید و قرار دهید $n'=n/p$. دقت کنید $n'<n$، پس $m'\in S$ یافت می‌شود که نسبت به $n'$ اول باشد. از آنجایی که $n=n'p$ نسبت به $m'$ اول نیست، $p$ حتماً $m'$ را عاد می‌کند. به علاوه، $p$ لزوماً ب.م.م $m$ و $m'$ است؛ زیرا اگر $pd$ هر دو $m$ و $m'$ را عاد کند، حتماً $n$ و $m'$ را نیز عاد می‌کند، پس $d$ دو عدد $m'$ و $n'$ را (که نسبت به هم اول بودند) عاد می‌کند، پس $d=1$. در نتیجه، $m$ و $m'$ دو عضو $S$ هستند که ب.م.م آنها، $p$، عددی اول است.

**۴.۲. پاسخ مسئله‌ی چهارم.** اعضای $G$ را بصورت $A_1,\dots,A_m$ در نظر بگیرید و قرار دهید $A=\sum A_i$. چون $G$ یک گروه ضربی است با تغییر ترتیب عناصر سیگما می‌توان دید $A_iA=A$ که نتیجه می‌دهد

$$A^2=mA \tag{1.2}$$

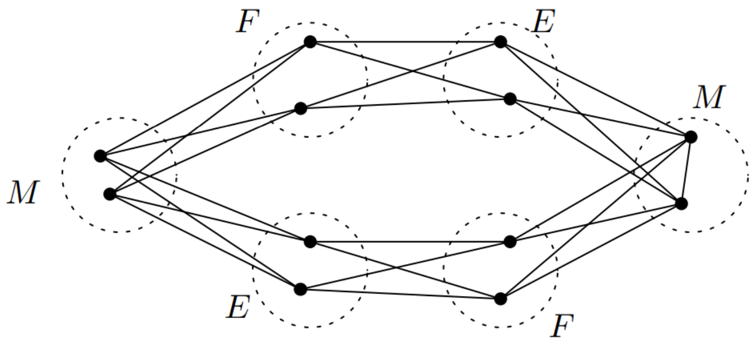
حال اگر مقادیر و بردارهای مختلط را مجاز در نظر بگیریم، $A$ دارای $m$ مقدار ویژه (با احتساب تکرر) است. اگر $Av=\lambda v$ آنگاه ۱.۲ نتیجه می‌دهد $\lambda^2=m\lambda$. پس یا $\lambda=0$ یا $\lambda=m$. از آنجایی که $\mathrm{trace}(A)$ برابر جمع مقادیر ویژه $A$ است، پس $m$ نمی‌تواند مقدار ویژه $A$ باشد، یعنی $A-mI$ وارون‌پذیر است. رابطه ۱.۲ را می‌توان بصورت $A(A-mI)=0$ نوشت. پس

$$A=A(A-mI)(A-mI)^{-1}=0$$

**۵.۲. پاسخ مسئله‌ی پنجم.** مجموعه‌ی دانشمندان این سه کشور را به ترتیب با $E$، $M$ و $F$ نشان دهید. گراف سه‌بخشی $H$ با رئوس $E\cup M\cup F$ را در نظر بگیرید که یال‌ها همان روابط سازگاری باشند. یک دور به طول ۳ می‌تواند نشان‌دهنده یک گروه تحقیقاتی باشد. $H$ را «گراف سازگاری» می‌نامیم. $n$ را تعداد دانشمندان هر کشور در نظر بگیرید.

برای قسمت اول، $n$ زوج است و باید یک گراف سازگاری بدون دور به طول ۳ بسازیم. ایده این است که هر کدام از $E$، $M$ و $F$ را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و رئوس هر دو قسمت که مطابق شکل زیر به هم وصل هستند را دو به دو به هم وصل می‌کنیم.

برای قسمت دوم، ابتدا به دلخواه تمامی دانشمندان را به گروه‌های تحقیقاتی سه‌نفره تقسیم کنید به طوری که هر گروه از هر سه کشور دانشمند داشته باشد. کمیت «نارضایتی» را برای چنین تقسیمی به صورت تعداد زوج دانشمند تعریف کنید که در یک گروه هستند ولی با یکدیگر سازگار نیستند. چنین زوجی را «ناراضی» می‌نامیم. در ادامه نشان می‌دهیم اگر نارضایتی عددی




مثبت باشد، با عملیاتی ساده می‌توان آن را کاهش داد. این نتیجه می‌دهد که پس از تعداد متناهی گام به تقسیمی با نارضایتی صفر می‌رسیم.

فرض کنید یک ایرانی با حداقل یکی از هم‌گروهی‌هایش سازگار نباشد (استدلال برای آلمانی یا فرانسوی مشابه است). این ایرانی را با یک ایرانی «مناسب» دیگر جابجا کنید به طوری که این دو نفر با هم‌گروهی‌های جدیدشان سازگار باشند. از آنجایی که تغییری در زوج‌های ناراضی دیگر رخ نداده، نارضایتی در تقسیم‌بندی جدید اکیداً کمتر است.

می‌ماند اثبات وجود یک ایرانی مناسب. گروه‌ها را با $n,\dots,۱$ شماره‌گذاری کنید، و اعضای گروه $i$ـام را بر اساس ملیتشان به صورت $E_i$، $M_i$ و $F_i$ نشان دهید. بدون کاستن از کلیت می‌توان فرض کرد که $E_۱$ با حداقل یکی از $M_۱$ یا $F_۱$ سازگار نیست. به دنبال اندیس مناسب $i > ۱$ هستیم به طوری که $E_۱$ با $M_i$ و $F_i$ سازگار باشد و $E_i$ با $M_۱$ و $F_۱$. آن وقت $E_۱$ را با $E_i$ جابجا می‌کنیم.

حداکثر $n/۴$ اندیس $i$ وجود دارد به طوری که $E_۱$ با $M_i$ سازگار نباشد. همینطور حداکثر $n/۴$ اندیس $i$ وجود دارد به طوری که $E_۱$ با $F_i$ سازگار نباشد. پس حداکثر $n/۲$ اندیس $i$ وجود دارد که $E_i$ با یکی از $M_i$ یا $F_i$ سازگار نباشد. توجه شود که ۱ نیز یکی از این اندیس‌هاست. به طور مشابه حداکثر $n/۲$ اندیس $i$ وجود دارد که $M_۱$ یا $F_۱$ با $E_i$ سازگار نباشد. این دو مجموعه اندیس اخیر هرکدام شامل ۱ هستند و حداکثر $n/۲$ عضو دارند. پس اجتماعشان شامل تمام اندیس‌ها نیست. پس حداقل یک اندیس مطلوب وجود دارد.

**۶.۲. پاسخ مسئله‌ی ششم.** ابتدا توجه کنید که $I = p\cdot I$؛ اگر $x \in I$ آنگاه $x$ بر $p$ بخش‌پذیر است، پس می‌توان نوشت $x = py$. اما $y$ باید بر همه‌ی توان‌های $p$ بخش‌پذیر باشد، پس $y \in I$.

مولدهای $I$ را بصورت $x_۱,\dots,x_m$ در نظر بگیرید. پس $x_i = py_i$، و $y_i \in I$ به فرم $y_i = a_{i۱}x۱ + \dots + a_{im}x_m$ است. ماتریس $[a_{ij}]$ را با $A$ نشان دهید. $x$ را بردار ستونی $(x_۱,\dots,x_m)$ در نظر بگیرید. داریم $(I-pA)x = ۰$ که با ضرب در ماتریس الحاقی $I - pA$ بدست می‌آوریم $\det(I-pA)x = ۰$. اگر $I$ ناصفر باشد آنگاه $x$ نیز ناصفر است، و از آنجایی که $R$ حوزه صحیح بود بدست می‌آید $\det(I-pA) = ۰$. اما این دترمینان به فرم $۱ + pz$، $z \in R$ است و از صفربودنش نتیجه می‌شود که $p$ وارون‌پذیر است. تناقض.

برای قسمت دوم، اگر $Q$ یک ایده‌آل اول سره داخل $(p)$ باشد، آنگاه هر $x \in Q$ به فرم $px_۱$ است. چون $p \notin Q$ لزوماً $x_۱ \in Q$ و در نتیجه به فرم $px_۲$ است. دوباره $x_۲ \in Q$ و به فرم $px_۳$ است و الی آخر. بنابراین هر $x \in Q$ بر همه‌ی توان‌های $p$ بخش‌پذیر است، در نتیجه عضوی از $I = ۰$ است؛ یعنی $Q = ۰$.

* دانشجوی کارشناسی‌ارشد ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف