مسئله کاکیا برای حالت متناهی

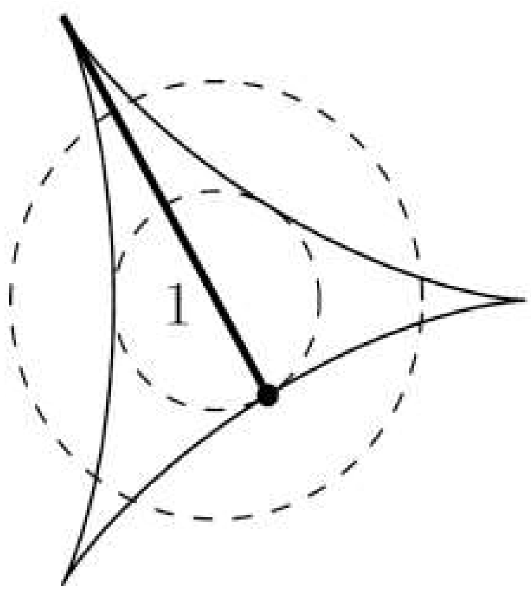
ترجمه: امیرحسین ذوالفقاری و شایان غلامی

«کمترین مقدار مساحت یک شکل در فضا، بطوری که یک سوزن به راحتی بتواند در آن چرخش کند، چقدر است؟»

این سوال زیبا در سال ۱۹۱۷ توسط ریاضی‌دان ژاپنی، سوئیچی کاکیا مطرح شد. این سوال بلافاصله برجستگی و شهرت زیادی بدست آورد و به همراه ابعاد بالاتر آن، باعث شد تا راهی جدید در هندسه آغاز شود که امروزه به نظریه اندازه هندسی معروف است. برای تعریف هرچه دقیق "چرخش کردن"، کاکیا حرکت مداوم سوزن را در ذهن خود جوری تصور کرد که سوزن به مکان اولیه خود باز می‌گردد اما جای ابتدا و انتهای آن عوض می‌شود مانند یک سامورایی که بدن خود را می‌چرخاند و به طور معکوس روی زمین قرار می‌گیرد! هر حرکت مداومی که توسط سوزن انجام می‌پذیرد باید داخل شکل باشد و نباید از شکل خارج شود.

بدیهی است که یک دایره به قطر ۱ متر (با مساحت $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$) یک شکل با شرایط فوق است. همچنین یک مثلث متساوی الاضلاع به ارتفاع ۱ متر (با مساحت $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$) نیز از جمله این اشکال است.

ژولیوس پال نشان داد که برای اشکال محدب این واقعیت کمترین مقدار ممکن را دارد اما درواقع ما می‌توانیم به اشکال بهتری نیز دست پیدا کنیم. شکل سه گوش مانندی که در ادامه آورده شده است نیز شکلی است با ویژگی‌هایی که کاکیا مدنظر داشت. مساحت این سه گوش مانند برابر با $\frac{\pi}{8} \approx 0.393$ است و کاکیا می‌اندیشید که این شکل کمترین مساحت را برای اشکال بسته دارد.



اما چند سال بعد از این که سوال طراحی شد، بسیار شگفت انگیز بود که آبرام بسیکوویچ مجموعه ای با مساحت به هر مقدار دلخواه کوچک تولید کرد. مثال او دارای تعداد زیادی سوراخ بود و همچنین قطر مجموعه بسیار بزرگ بود، که مثال نسبتا پیچیده ای بود. اما مطلب قابل توجه این بود که فردریک کانینگهام نشان داد که حتی می‌توانیم مجموعه همبند ساده با مساحت به دلخواه کوچک در یک دایره به قطر ۲ برای مساله پیدا کنیم.

درواقع، بسیکوویچ در ابتدا از مطالب مربوط برای حل مسئله سوزن‌ها کاربرد داشت ، لذت می‌برد. یک مجموعه فشرده $K \subseteq R^n$ را مجموعه کاکیا (یا به عبارت بهتر مجموعه بسیکوویچ)

می‌نامیم اگر این مجموعه در هرجهت، یک پاره خط به طول ۱ را شامل شود. بسیکوویچ یک نتیجه زیبا را ثابت کرد که در هر بعد، مجموعه‌ای کاکیا با اندازه (لبگ) صفر وجود دارد . اما چگونه؟ شهود ما به ما می‌گوید که این مجموعه باید به نحوی گسترش یابد چراکه در هر بعد یک پاره خط را در بر می‌گیرد (درمقابل می‌توان نشان داد که اندازه (لبگ) چنین مجموعه‌هایی که لزوما شامل یک پاره خط در هرجهت نیستند اما سوزن می‌تواند به آزادی در آن جابجا شود، مثبت است).

آن سال‌ها، سال‌هایی بود که مفهوم(توپولوژیکی) بعد به وسیله افرادی چون هنری لبگ، کارل منجر، فلیکس هاسدورف و دیگران بوجود آمد که دقیقا اسیر همین «گسترش» شرایط مختلف پوشش بود. حال ما بعد هاسدورف را $hd(K)$ می‌نامیم و نیازی به مفاهیمی درباره آن نداریم. فقط درنظر بگیرید که فضای اقلیدسی R^n دارای بعد هاسدورف n است و hd یک تابع یکنوا است پس برای هر $K \subseteq R^n$ داریم که $hd(K) \leq n$

حدس ۱ (حدس کاکیا). هر مجموعه کاکیا در R^n دارای بعد هاسدورف n است.

این حدس برای $n = 1,2$ صحیح است اما برای حالت‌های بزرگتر مساوی ۳ همچنان یک مسئله باز است و بنظر می‌رسید که بسیار مشکل‌تر از مسئله افزایش ابعاد است و امروزه از آن به عنوان یکی از مهم‌ترین و عمده‌ترین مسائل باز در زمینه نظریه اندازه هندسی یاد می‌شود.

توماس ولف، در یک مقاله الهام بخش در سال ۱۹۹۹، پیشنهاد توجه به میدان متناهی F را داد. فرض کنید F^n فضای برداری باشد. مجموعه $K \subseteq F^n$ را یک مجموعه(متناهی) کاکیا می‌نامیم اگر در هر جهت پاره خطی را شامل شود. یعنی برای هر بردار $v \in F^n$ وجود دارد $w \in F^n$ که خط $L = w + tv : t \in F$ در K وجود داشته باشد.

ولف یک نسخه جدید از مسئله را نسبت به دید اقلیدسی مسئله کاکیا، بیان نمود:

«آیا عدد ثابت $c = c(n)$ وجود دارد که تنها به مقدار n وابسته باشد و به $|F|$ بستگی نداشته باشد و برای هر مجموعه کاکیا $K \subseteq F^n$ داشته باشیم $|K| \geq c|F|^n$ ؟»

بدیهی است که این مسئله برای حالت $n = 1$ درست است و اثبات آن برای حالت $n = 2$ چندان مشکل نخواهد بود اما برای ابعاد بالاتر این موضوع مشکل بود تا زمانی که زیو دویر، راه حلی زیبا و فوق العاده و درعین حال ساده در پایان نامه سال ۲۰۰۸ خود، برای آن بیان نمود. ابتدا نیاز داریم که دو واقعیت را درباره چندجمله‌ای‌ها n متغیره بیان کنیم.

ابتدا چند موضوع را برای خودمان تعریف می‌کنیم. $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ را حلقه چندجمله‌ای $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ روی میدان متناهی F می‌نامیم. عبارت $x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n}$ یک تک جمله‌ای است و گاهی به صورت x^s نیز نمایش داده می‌شود و درجه آن برابر $\sum_{i=1}^{n} s_i$ است.

درجه چندجمله‌ای $p(x) = \sum a_s x^s$ برابر بیشترین درجه میان تک جمله‌ای‌های آن است که ضرایب‌شان ناصفر باشد. چندجمله‌ای صفر، چندجمله‌ای است که همگی ضرایب آن صفر باشد. همچنین چندجمله‌ای $p(x)$ روی $E \subseteq F^n$ «ناپدید» است اگر برای همه $a \in E$ داشته باشیم $p(a) = 0$.

حال دو واقعیت درباره چندجمله‌ای‌های تک متغیره که از مفروضات ما برای اثبات نکات بعدی است، بیان می‌کنیم:

۱. هرچندجمله‌ای از درجه نامنفی d ، حداکثر دارای d ریشه است.

۲. برای هر مجموعه $E \subseteq F$ با تعداد اعضای $|E| \leq d$ چندجمله‌ای ناصفر $p(x)$ از درجه حداکثر d وجود دارد که روی E ناپدید است.

برای مورد دوم کافی است $p(x) = \prod_{a \in E}(x-a)$ را در نظر بگیرید.

لم ۱. اگر $|F| = q$ آنگاه هر چندجمله‌ای ناصفر $p(x) \in F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ از درجه d حداکثر دارای dq^{n-1} ریشه است.

اثبات. حکم را با استقرا روی n نشان می‌دهیم. با فرض ۱ حکم برای حالت پایه بدیهی است. حال $p(x)$ را بر اساس چندجمله‌ای بر

حسب متغیر x_n می‌نویسیم.

$$p(x) = g_0 + g_1 x_n + g_2 x_n^2 + \cdots + g_l x_n^l$$

$$g_i \in F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

$$g_l \neq 0$$

می‌توان هر $v \in F^n$ را به صورت (a, b) نمایش داد که $a \in F^{n-1}, b \in F$ و حال می‌خواهیم تعداد ریشه‌های $p(a, b)$ را محاسبه کنیم:

حالت اول. تعداد ریشه‌هایی که $g_l(a) = 0$

چون $g_l \neq 0$ و درجه حداکثر $d - l$ است، بنابر فرض استقرا g_l حداکثر دارای $(d-1)q^{n-2}$ ریشه در F^{n-1} است و برای هر a، q انتخاب برای b داریم. پس در این حالت حداکثر $(d-l)q^{n-1}$ ریشه داریم.

حالت دوم. تعداد ریشه‌هایی که $g_l(a) \neq 0$

در این‌جا $p(a, x_n)$ یک چندجمله‌ای ناصفر بر حسب x_n است و دارای حداکثر d ریشه است. پس با توجه به فرض ۱ برای هر a، l انتخاب برای b داریم که $p(a, b) = 0$. تعداد a ها هم که حداکثر q^{n-1} است و در کل حداکثر lq^{n-1} ریشه داریم.

پس روی هم رفته این چند جمله‌ای دارای

$$(d-l)q^{n-1} + lq^{n-1} = dq^{n-1}$$

ریشه است. $\square$

لم ۲. برای هر مجموعه $E \in F^n$ و $|E| < \binom{n+d}{d}$ یک چندجمله‌ای ناصفر بـi مانند $p(x) \in F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ با درجه حداکثر d وجود دارد که روی E ناپدید است.

اثبات. V_d را مجموعه تمام چندجلمه‌ای‌های داخل $F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ در نظر بگیرید که دارای درجه حداکثر d هستند. پس V_d شامل جملات زیر است:

$$1, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1^2, x_1x_2, \ldots, x_1^3, \ldots, x_n^d$$

تعداد این عبارات برابر با $\binom{n+d}{d}$ است. در واقع جواب‌های نامنفی $\sum_{i=1}^n s_i \leq d$ را محاسبه کرد که برابر با $\binom{n+d}{d}$ می‌باشد.

حال فضای برداری F^E را فضای همه تابع های مثل $f : E \to F$ است که بعد این فضا برابر $|E|$ است که کمتر از $\binom{n+d}{d}$ می‌باشد. نگاشت $p(x) \mapsto (p(a))_{a \in E}$ که از V_d به F^E تعریف شده است، یک نگاشت خطی در فضای برداری است. پس نتیجه می‌گیریم که دارای یک فضای پوچ ناصفر است که حاوی چندجمله‌ای مورد نظر ماست که روی E ناپدید است. $\square$

حال ما تمام موضوعاتی که برای بیان راه حل زیبای دویر برای مسئله کاکیا نیاز بود را می‌دانیم.

قضیه ۱. فرض کنید $K \in F^n$ یک مجموعه کاکیا باشد، آنگاه:

$$|K| \geq \binom{|F| + n - 1}{n} \geq \frac{|F|^n}{n!}$$

اثبات. نامساوی دوم، بنا بر تعریف ضرایب دوجمله‌ای واضح است. در ابتدا فرض می‌کنیم حکم مسئله صحیح نباشد(فرض خلف) و با فرض $|F| = q$ داریم:

$$|K| < \binom{n+q-1}{n} = \binom{n+q-1}{q-1}$$

بنابر لم ۲ چند جمله‌ای ناصفر $p(x) \in F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ از درجه $d \leq q-1$ وجود دارد که روی K ناپدید است:

$$p(x) = p_0(x) + p_1(x) + \cdots + p_d(x)$$

که در آن $p_i(x)$ مجموع تمام جملات از درجه i است و $p_d(x)$ ناصفر است. از آنجایی که $p(x)$ روی مجموعه ناتهی K ناپدید است پس $d > 0$.

$v \in F^n/\{0\}$ را به طور دلخواه در نظر بگیرید. بنابر ویژگی کاکیا برای این v، $w \in F^n$ وجود دارد که

$$p(w + tv) = 0 : t \in F$$

حال ترفند را بیان می‌کنیم: چندجمله‌ای $p(w + tv)$ را یک چندجمله‌ای تک متغیره بر حسب t بگیرید. درجه آن حداکثر $d \leq q-1$ است اما روی همه q نقطه روی F ناپدید است. پس نتیجه می‌گیریم که $p(w+tv)$ یک چندجمله‌ای صفر بر حسب متغیر t است. با توجه به مطالب بالا دقت کنید که t^d در $p(w+tv)$ دقیقا

برابر با $p_d(v)$ است که باید صفر باشد. اما $v \in F^n/\{0\}$ به طور دلخواه انتخاب شده بود و $p_d(0) = 0$ و $d > 0$. نتیجه می‌گیریم که $p_d(x)$ روی کل F^n ناپدید است. پس داریم:

$$dq^{n-1} < (q-1)q^{n-1} < q^n$$

پس بنابر لم ۱ که به ما می‌گوید چندجمله‌ای $p_d(x)$ باید چندجمله‌ای صفر باشد، به تناقض بر می‌خوریم و حکم قضیه ثابت می‌شود. $\square$

همانطور که اغلب در ریاضیات اتفاق می‌افتد موفقیت‌های به دست آمده به سرعت بهبود پیدا می‌کنند. به عنوان مثال در این‌جا کران پایین $\frac{1}{n!}$ که برای مقدار ثابت $c(n)$ عنوان شده بود به $\frac{1}{2^n}$ بهبود پیدا کرد و این مقدار بر حسب توانی از ۲ به بهترین شکل ممکن کراندار شده است، یعنی یک مجموعه کاکیا با تعداد اعضای حدودی $\frac{1}{2^{n-1}}|F|^n$ وجود دارد.

برای اطلاعات بیشتر و به روزتر می‌توانید به وبگاه ترنس تائو [1] مراجعه کنید که منبع جدیدتری دارد.

References

[1] A. S. BESICOVITCH *On Kakeya's problem and a similar one, Math. Zeitschrift*

[2] F. CUNNINGHAM, JR. *The Kakeya problem for simply connected and for starshaped sets, Amer. Math. Monthly*

[3] Z. DVIR *On the size of Kakeya sets in finite fields, J. Amer. Math. Soc.*

[4] J. PAL *Über ein elementares Variationsproblem, Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Mathematisk-fysiske Meddelelser*

[5] T. TAO *From rotating needles to stability of waves: emerging connections between combinatorics, analysis, and PDE, Notices Amer.Math. Soc.*

[6] T. WOLFF *Recent work connected with the Kakeya problem, in: "Prospects in Mathematics (Princeton, NJ 1996)" (H. Rossi, ed.), Amer. Math. Soc., Providence RI 1998*

[7] T. WOLFF: *On some variants of the Kakeya problem, Pacific J. Math.*

[1] http://terrytao.wordpress.com/tag/kakeya-conjecture/