آشنایی با روش چند_شبکه‌ای

سینا رسولی

rasoolibox۱۹۳@gmail.com

۱ پیش‌گفتار

هدف این مقاله، معرفی دسته‌ای از روش‌های تکراری [1] به نام روش‌های چند_شبکه‌ای [2] به دانشجوها، با هر پیش‌زمینه‌ای، است.

به دلیل محدودیت حجم، دورنمای روشن‌گری از روش و ایده‌های اصلی، ارائه می‌شود. برای خواننده‌ای که با مطالب پیش برود، تعمیم و استنتاج حالت‌های کلی‌تر، دشوار نخواهد بود.

در صورت وجود هرگونه ابهام یا پرسش، از طریق پست الکترونیک با نویسنده در ارتباط باشید.

در دوره‌ی تحصیل خود، در دانشکده‌ی ریاضی (در میان دانشجوهای کارشناسی)، به یاد ندارم فردی را علاقه‌مند به کارهای عددی و شبیه سازی معادلات دیفرانسیل دیده باشم. به جزئیات و تحلیل و ریشه‌یابی این مسئله در این‌جا نمی‌توان پرداخت. اما احساس کردم که به اشتراک گذاشتن تعدادی تجربه، شاید اهمیت این نوع مطالعه‌ها و درس‌هایی شبیه به آنالیز عددی را روشن‌تر کند.

۱.۱ ریشه‌ی تابع ـ پیش‌بینی شاخص‌های ارزی

جزئیات پیش رو، بیش‌ترین اطلاعات قابل بیان با حفظ محرمانگی اطلاعات پروژه هستند.

در یک قسمت از مطالعه‌ای در جریان، موفق به یافتن رابطه‌ای بین چند شاخص ارزی شدم. رابطه‌ی پیدا شده، بر حسب دو شاخص، مقداری تقریبا ثابت را معرفی می‌کرد.

$$\overbrace{f(x_1,x_2)}^{\text{فردا}} - \overbrace{f(x_1,x_2)}^{\text{امروز}} \approx 0$$

که در آن x_1 و x_2 شاخص‌های ارزی هستند، اندیس بالا زمان را بیان می‌کند و ≈ 0 به معنی این است که تنها در ۴ درصد موارد یا به عبارت دیگر به طور متوسط هر ۲۵ روز مقدار این تابع در زمان تغییر می‌کند.

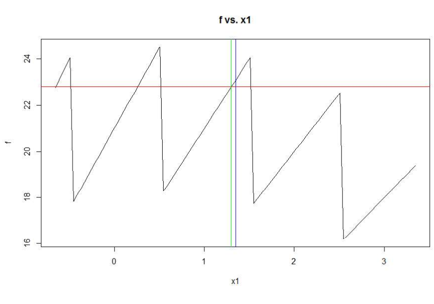

Figure ۱: نمودار تابع f و تلاش برای ریشه‌یابی

پیش‌بینی به کمک فرض کردن ثابت ماندن مقدار تابع f در روز آینده و یافتن ریشه‌های آن به ازای تنها یکی از شاخص‌های روز بعد است. به بیان ساده، باید محل تلاقی خط افقی (قرمز ـ مقدار تابع

[1] Iterative Methods
[2] Multi-Grid Methods

در روز قبل) و نمودار سیاه (نمودار تابع بر حسب یکی از پارامترها) پیدا شود.

در همین مثال، با خطای پایین در پارامترهای مسئله و مقدار تابع f (که البته درست است)، تلاش بر پیدا کردن ریشه‌های $g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - c$ به ازای c برابر با مقدار در روز قبل، است. پس به یک روش با دقت بالا برای پیدا کردن ریشه‌ی g نیاز داریم.

پیدا کردن ریشه‌ی یک تابع، نقطه‌ی شروع خوبی برای مواجهه با چالش‌های اصلی آنالیز عددی از جمله «عدد حالت» [۳] و «تاثیر انتخاب روش حل، در رفتار جواب» است.

۲.۱ نتیجه‌گیری غیررسمی

آنالیز عددی در کاربردهای روزمره چگال است. لطفا با دید متفاوتی به سمت «او» حرکت کنید.

از موضوع اصلی نوشته فاصله نگیریم.

۲ مسئله‌ی مورد بررسی

در این نوشته به بررسی یک مسئله‌ی نسبتا ساده به شکلی که در متن معرفی می‌شود می‌پردازیم. شروع به کار با یک مسئله‌ی ساده کمک می‌کند که «شهود و درک مسئله» در کنار «بررسی عمومی و نظری» در کنار هم وجود داشته باشند. این امر، شهود و درک در مسائل پیچیده را ممکن می‌سازد، قلمرویی که در آن تنها چراغ راه، ابزار انتزاعی و نظری است.

۱.۲ شکل کلامی

صورت مسئله به شکل کلامی و شهودی:

> یک میله‌ی فلزی داریم که دو سر آن در دمای صفر قرار گرفته‌اند. ابتدا یک توزیع دما در میله تصور کنید (مثلا ناحیه‌ی مرکزی دمای بالایی دارد و سایر نقاط دمای پایین). همچنین در طول میله، در قسمت‌هایی منبع حرارت داریم (مثلا چند جای میله همواره گرم نگه داشته می‌شود و چند جای دیگر همواره سرد). جواب پایا [۴] یا جوابی که پس از زمان بی‌نهایت بدست می‌آید چه می‌شود؟

۲.۲ شکل ریاضی: پیوسته

صورت مسئله به شکل ریاضی و پیوسته:

$$\begin{cases} u_{xx}(x) = f(x) & \forall x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

که در آن $u(x)$ تابع توصیف دما در مکان x ، $f(x)$ تابع توصیف اثر خارجی در دما و نماد u_x به معنی مشتق جزئی تابع u نسبت به پارامتر x است.

۳.۲ شکل ریاضی: گسسته

صورت مسئله به شکل ریاضی و گسسته شده برای یک N ثابت:

(۱)

$$\begin{cases} x_i = i \times \frac{1}{N} \quad i \in \{0, 1, 2, \cdots, N\} \\ u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}) = f(x_i) \; i \in \{1, \cdots, N-1\} \\ u(x_0) = u(x_N) = 0 \end{cases}$$

که با توجه به صفر بودن مقدار تابع $u(x)$ در مرزها، می‌توان مسئله را به شکل ماتریسی به شکل زیر بیان کرد:

$$-A_{(N-1)\times(N-1)} u_{(N-1)\times 1} = f_{(N-1)\times 1}$$

که در آن:

$$u_{(N-1)\times 1} = \begin{bmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ \vdots \\ u(x_{N-1}) \end{bmatrix}, \; f_{(N-1)\times 1} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \end{bmatrix}$$

[۳] Condition Number

[۴] Steady Solution

و

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & & & \\ -۱ & ۲ & -۱ & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -۱ & ۲ \end{bmatrix}_{(N-۱)\times(N-۱)} \qquad (۲)$$

که در آن درایه‌هایی که حاضر نیستند، صفر هستند (ماتریس تنک [۵] است).

۳ روش حل تکراری: رفتار با بسامدهای [۶] مختلف

صورت مسئله‌ی گسسته‌سازی شده در قسمت قبل را، به شکل زیر تغییر می‌دهیم.

$$Au = ۰ \qquad (۳)$$

که راه‌های تکراری برای حل این نوع معادله بسیار بررسی شده است. ارتباط معادله‌ی (۳) با معادله‌ی (۱) به این صورت است که در معادله‌ی ساده شده، تلاش بر صفر کردن خطا است و در معادله‌ی اصلی، تلاش برای نزدیک شدن به جواب مسئله. هر دو روش از یک نقطه‌نظر تحلیل می‌شوند:

حل تکراری استفاده شده با استفاده از ماتریس A ،
کار را خراب نکند (که مستقل از f است).

دقت کنید که جواب بدیهی «همه جا دما صفر»، جواب نهایی است و این پاسخ را می‌دانیم اما تلاش برای یافتن روشی است که در مواقعی که این قدرت تحلیل را نداریم نیز کارا باشد.

پیش از توضیح روش‌های حل، مختصری در رابطه با «روش تکراری» توضیح دهیم:

۱.۳ روش حل تکراری [۷]

در این نوع روش‌ها تلاش می‌شود با ارائه‌ی عملگر مناسب، با اعمال متوالی آن عملگر به جواب نزدیک و نزدیک‌تر شد. به بیان دیگر:

$$\begin{cases} \{x_i\}\ ,\ a\ \in \mathbb{R}^n\ ,\ g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ x_۰ = a\ ,\ x_{i+۱} = g(x_i) \\ \lim\limits_{j\to\infty} x_j = x^* \qquad (*) \end{cases}$$

با شرایطی بر تابع g ، میتوان همگرایی از هر نقطه‌ی اولیه را تضمین کرد.

قضیه ۱ (استفاده از نقطه ثابت باناخ [۸] [۲]). اگر فاصله‌ی تصویر هر دو نقطه، اکیدا کمتر از فاصله‌ی آن دو نقطه شود (با ضریب ثابتی کراندار شود)، دنباله با شروع از هر نقطه‌ی اولیه به یک نقطه‌ی یکتا همگرا خواهد شد.

$$\exists\alpha \in [۰,۱):\ |g(x)-g(y)| < \alpha|x-y| \Rightarrow \exists! x^*:\ \lim_{j\to\infty} x_j = x^*$$

پس با تبدیل مسئله‌ی (۳) به یک مسئله‌ی تکراری به گونه‌ای که بتوان از قضیه‌هایی مانند نقطه‌ی ثابت باناخ استفاده کرد، می‌توان به جواب (۳) به شکل تکراری نزدیک شد. به طور معمول این کار با تجزیه‌ی (جمعی) ماتریس A به شکل $A = M - N$ انجام می‌شود که در عبارت‌های زیر به طور خلاصه آمده است:

$$Au = ۰ \Rightarrow \begin{cases} (M-N)u = ۰ \to u = M^{-۱}Nu \\ R = M^{-۱}N \\ u^{new} = Ru^{old} \end{cases}$$

به شکلی که ماتریس R تعریف شده باشد و در شرایط «نقطه‌ی ثابت باناخ» صدق کند (به طور مثال شعاع طیفی آن کوچک‌تر از ۱ باشد).

[۵] Sparse
[۶] Frequency
[۷] Iterative Method
[۸] Banach Fixed-Point Theorem
[۹] Weighted Jacobi Method
[۱۰] Jacobi Method

۲.۳ روش جاکوبی وزن‌دار [۹] [۱]

در روش جاکوبی [۱۰] [۴]، ماتریس A به دو قسمت درایه‌های روی قطر $M = D(A)$ و درایه‌های خارج قطر $N = L(A) + U(A)$ تجزیه می‌شود، که در عبارت‌های بالا:

- $D(A)$ درایه‌های روی قطر A
- $L(A)$ درایه‌های پایین قطر A
- $U(A)$ درایه‌های بالای قطر A

هستند.

به طور خلاصه اطلاعات روش را با نمادهای زیر نشان می‌دهیم:

$$R_J = D^{-1}(L+U)\ ,\ u_J^{new} = R_J u_J^{old} \tag{۴}$$

که در آن:

- R ماتریس حل تکراری
- اندیس پایین (J) نشان دهنده‌ی روش استفاده شده
- u بردار جواب تقریبی

روش جاکوبی وزن‌دار ماتریس حل تکراری با پارامتر حقیقی ω به شکل زیر تعریف می‌کند:

$$R_{WJ} = (1-\omega)I + \omega R_J \tag{۵}$$

که در آن I ماتریس همانی [۱۱] است (حالت $\omega = 1$ همان روش جاکوبی است).

۳.۳ روش گاوس_سیدل [۱۲] [۴]

در این روش، ماتریس حل تکراری به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$R_G = (D-L)^{-1}U \tag{۶}$$

حل بازگشتی را به شکل زیر بدست می‌دهد:

$$u_G^{new} = R_G u_G^{old}$$

۴.۳ تحلیل اولیه‌ی روش‌ها

با توجه به این‌که مسئله‌ی شرایط مرزی با مشتق‌های جزئی (۱) در واقع جواب پایای معادله‌ی حرارت [۱۳] است، پس به بررسی نقطه‌های شروع خاص‌تری در تحلیل روش‌های بازگشتی می‌پردازیم:

$$u_j^{0}(x_i) = \sin(x_i \times j\pi) \tag{۷}$$

که در واقع هر اندیس j نماینده‌ی یک بسامد مختلف است.

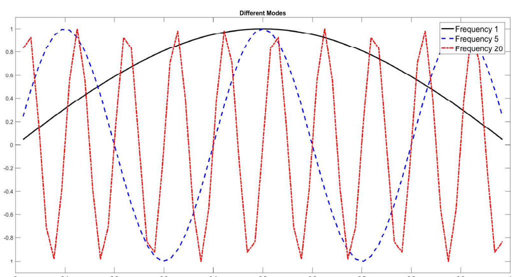

Figure ۲: بسامدهای مختلف

برای تحلیل نحوه‌ی عملکرد دو روش تکراری بیان شده، از نقطه‌های اولیه به شکل بالا، شروع می‌کنیم و نزدیکی به جواب نهایی (همه جا صفر) را پس از ۱۰۰ گام، مشاهده و مقایسه می‌کنیم:

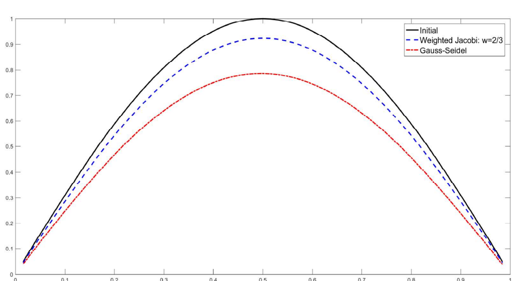

Figure ۳: نقطه‌ی شروع با بسامد ۱

[۱۱] Identity Matrix
[۱۲] Gauss-Seidel Method
[۱۳] Heat Equation

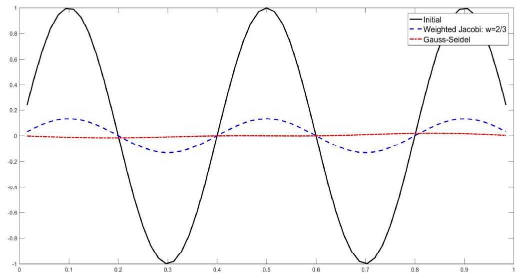

Figure ۴: نقطه‌ی شروع با بسامد ۵

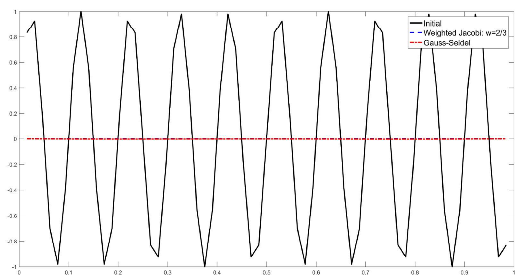

Figure ۵: نقطه‌ی شروع با بسامد ۲۰

در شکل‌های بالا چندین مشاهده‌ی عمومی نهفته است که در زیر به آن‌ها اشاره می‌کنیم:

- بسامدهای بالا: هر دو روش به شکل موفق در تکرارهای کم، به جواب نهایی نزدیک می‌شوند.

- بسامدهای پایین: هر دو روش در نزدیک شدن به جواب نهایی، بسیار کند هستند.

- بسامدهای میانی: برخورد با این دسته بسامدها با سرعتی نه بسیار زیاد و نه بسیار کم صورت می‌گیرد.

برای بررسی بازه‌ای از بسامدها، به نمودار زیر توجه کنید:

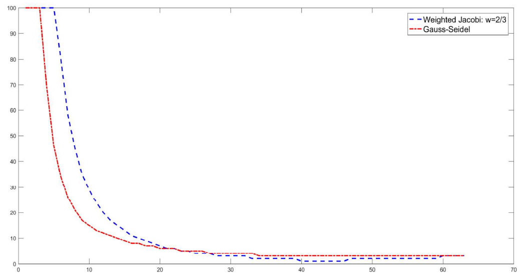

Figure ۶: تکرار لازم برای رسیدن به دقت ۰٫۱

در شکل بالا، محور افقی، بسامد نقطه‌ی اولیه و محور عمودی، تعداد تکرارها برای رسیدن به خطای ذکر شده، را نشان می‌دهد.

۴ تغییر اندازه‌ی شبکه: نسبی بودن بسامد

با توجه به تعریف x_i در (۱) و تعریف بسامد j در رابطه‌ی (۷)، می‌توان دید که بسامد یک جواب، به اندازه‌ی شبکه بستگی دارد. به این معنی که:

> نقطه‌ی شروع با بسامد کم در یک شبکه، نقطه‌ی شروع با بسامد بیش‌تر در شبکه‌ای با اندازه‌ی بزرگ‌تر است.

این موضوع با توجه به شکل زیر و جمله‌ی کمکی بعد از آن واضح‌تر می‌شود:

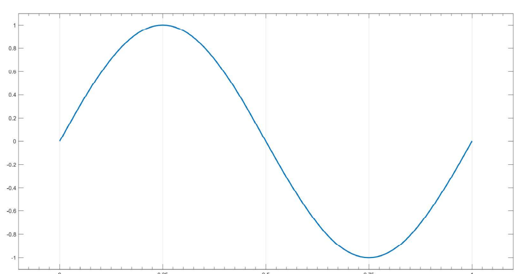

Figure ۷: تعداد نوسان‌ها در واحد طولی با اندازه‌ی ۰٫۵ ، برابر ۰٫۵ و برای واحد طول ۱۰ برابر ۱ است

> با دو برابر کردن اندازه‌ی شبکه، فرکانس یک تابع سینوسی، دو برابر می‌شود.

[14] Two-Grid Method

۱.۴ ایده: روش دو_شبکه‌ای [۱۴]

ایده‌ای که به ذهن می‌رسد را به صورت کلامی می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

۱. حذف فرکانس‌های بالا: ابتدا بر روی نقطه‌ی شروع، چندین بار، یکی از روش‌های تکراری را اعمال می‌کنیم (تا جواب‌های با بسامد بالا از میان بروند).

۲. گذار به شبکه‌ی زمخت‌تر [۱۵] : ماتریس‌ها و بردارهای شبکه‌ی زمخت‌تر را با توجه به شبکه‌ی اولیه بدست می‌آوریم.

۳. حذف فرکانس‌های بالا: در شبکه‌ی زمخت‌تر با اعمال ماتریس روش تکراری، فرکانس‌های بالای به‌وجود آمده را حذف می‌کنیم.

۴. گذار به شبکه‌ی اولیه: بردارها و ماتریس‌های شبکه‌ی زمخت را به شبکه‌ی اولیه تبدیل می‌کنیم.

۵. حذف اختلال‌ها: گذار بین شبکه‌ها، ممکن است خطاهایی با فرکانس‌های بالا به‌وجود آورد. برای از بین بردن آن‌ها، روش تکراری را چندین بار اعمال می‌کنیم.

به شمایی [۱۶] که در بالا برای حل ارائه شد، روش دو_شبکه‌ای گفته می‌شود.

توجه کنید که در مراحل بالا، تنها قدم‌هایی که نیاز به توضیح و بررسی دارند، (۲) و (۴) هستند. یعنی روش گذار اگر مشخص شود، در هر مرحله‌ی دیگر تنها اعمال روش بازگشتی (ضرب ماتریس R) باقی می‌ماند که ساده است.

۵ روش دو_شبکه‌ای

در این قسمت، چگونگی گذار که در قسمت قبل بیان شد را توضیح می‌دهیم. پیش از آن، ابتدا به معرفی چند نمادگزاری برای کوتاهی نوشتن و راحتی بیان، می‌پردازیم.

- اندازه‌ی شبکه: اندازه‌ی شبکه‌ی اولیه $h = \frac{1}{N}$ و اندازه‌ی شبکه‌ی زمخت‌تر $۲h$.

- ماتریس معادله: ماتریس معادله‌ی گسسته شده (۱) شبکه‌ی اولیه با A_h و شبکه زمخت‌تر را با $A_{۲h}$ نمایش می‌دهیم.

- بردار جواب: بردار جواب شبکه‌ی اولیه را با u_h و شبکه‌ی زمخت‌تر را با $u_{۲h}$ نمایش می‌دهیم.

۱.۵ گذار مکان [۳]

۱.۱.۵ ظریف [۱۷] به زمخت

اگه به شکل زیر و بیان مسئله‌ی پیش رو در آن نگاه کنید، جواب تقریبا واضح می‌شود (مسئله پیدا کردن نقاط روی شبکه‌ی زمخت‌تر است).

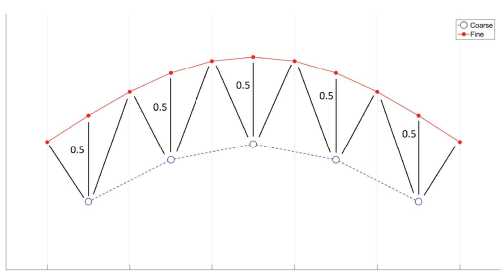

Figure ۸: گذار از شبکه‌ی ظریف به زمخت (وزن‌های نوشته نشده، برابر ۲۵٪ هستند)

که با توجه به اینکه نقاط شبکه‌ی زمخت‌تر روی نقاط شبکه‌ی کوچک‌تر قرار می‌گیرند، تنها به یک نگاشت شمول [۱۸] (که همان نگاشت همانی با دامنه‌ی کوچک شده است)، نیاز داریم و با ماتریس

[۱۵] Coarser
[۱۶] Scheme
[۱۷] Fine
[۱۸] Inclusion Map

زیر آن را نمایش می‌دهیم:

$$\tilde{I}_h^{2h} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

(یک انتقال به جلو در ردیف اول به خاطر شروع از درایه‌ی دوم در تعریف بردار مقدارها است. اگر واضح نیست، به این‌که می‌خواهیم درایه‌های زوج تعریف شده باشند توجه کنید).

حال برای تاثیر تمام درایه‌های اطراف یک خانه، به جای روش ساده‌ی بالا، از محدود کردن با وزن‌دهی کامل [19] [۱] استفاده می‌کنیم که به خانه‌ی وسط وزن ۲ و خانه‌های کناری، وزن ۱ را می‌دهد:

$$I_h^{2h} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

۲.۱.۵ زمخت به ظریف

حال به گذار از شبکه‌ی زمخت به شبکه‌ی اولیه می‌پردازیم. برای این‌کار، دو نوع خانه وجود دارد: ۱) خانه‌هایی که در شبکه‌ی زمخت و اولیه وجود دارند. ۲) خانه‌هایی در شبکه‌ی اولیه، که بین دو خانه از شبکه‌ی زمخت قرار دارند.

خانه‌های نوع اول را با مقدار خودشان جایگذاری می‌کنیم و خانه‌های نوع دوم را با میانگین دو خانه‌ی کناری در شبکه‌ی زمخت.

$$I_{2h}^h = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ 2 & 0 & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & 0 & 2 \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

برای واضح‌تر شدن تعریف ماتریس بالا، به شکل بعد نگاه کنید.

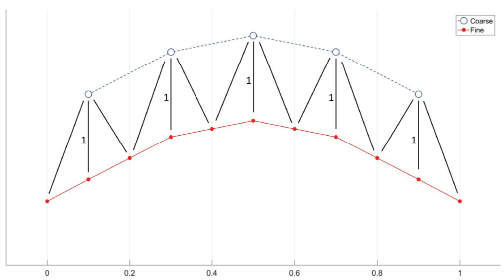

Figure ۹: گذار از شبکه‌ی زمخت به ظریف (وزن‌های نوشته نشده برابر ۰٫۵ هستند)

۲.۵ تبدیل ماتریس‌ها

ابتدا یک نام‌گذاری معنی‌دار دیگر انجام دهیم و ماتریس A در رابطه‌ی ۱ را با نماد A_h^h نشان می‌دهیم به این معنی که ماتریس در شبکه‌بندی با اندازه‌ی h تعریف شده است.

$$\overbrace{A_h^h u_h}^{\text{در شبکه‌ی ظریف}} = 0$$

حال نیاز داریم که ماتریس و معادله‌ای که نیاز به حل در شبکه‌ی زمخت‌تر دارد را تعریف کنیم. به گونه‌ای که برای آن نیز داشته باشیم:

$$\overbrace{A_{2h}^{2h} u_{2h}}^{\text{در شبکه‌ی زمخت}} = 0$$

[19] Restriction by Full-Weighting

برای نوشتن A^{2h}_{2h} ، ابتدا به تعریف ضرب و عمل ماتریس نگاه می‌کنیم.

- گذار از شبکه‌ی ظریف به زمخت با ضرب ماتریس I^{2h}_{h} انجام می‌شود.
- مسئله در شبکه‌ی ظریف با ماتریس $A = A^h_h$ بیان می‌شود.
- گذار از شبکه‌ی زمخت به ظریف با ماتریس I^{h}_{2h} انجام می‌شود.

شمای بالا این ایده را در مورد تعریف مسئله در شبکه‌ی زمخت به ما می‌دهد:

$$A^{2h}_{2h} = I^{2h}_{h} A^h_h I^h_{2h}$$

که می‌گوید مراحل بالا را به ترتیب انجام دهیم: ۱) بردار در شبکه‌ی زمخت را به شبکه‌ی ظریف ببریم، ۲) در شبکه‌ی ظریف ماتریس A^h_h را ضرب کنیم و ۳) بردار بدست آمده را به شبکه‌ی زمخت بازگردانیم.

۳.۵ شمای کامل روش دو_شبکه‌ای

برای نمایش کامل شمای حل، مراحل به ترتیب در زیر آمده است:

۱. ابتدا رابطه‌ی $A^h_h u_h = 0$ را به شکل تکراری با تعدادی قدم مشخص حل می‌کنیم.

۲. مسئله را به شبکه‌ی زمخت شده تبدیل می‌کنیم $A^{2h}_{2h} u_{2h} = 0$ (نقطه‌ی شروع، از تبدیل نقطه‌ی نهایی قسمت قبل می‌آید).

۳. در شبکه‌ی زمخت شده، به شکل تکراری با تعدادی قدم مسئله را حل می‌کنیم.

۴. مسئله را به شبکه‌ی ظریف باز می‌گردانیم (نقطه‌ی شروع، از تبدیل نقطه‌ی نهایی قسمت قبل می‌آید).

۵. در شبکه‌ی ظریف، مسئله را حل می‌کنیم (برای از بین بردن خطاهای ناشی از تبدیل مسئله).

به طور معمول، قدم‌های بالا را در دیاگرام‌ای [20] به شکل زیر نمایش می‌دهند:

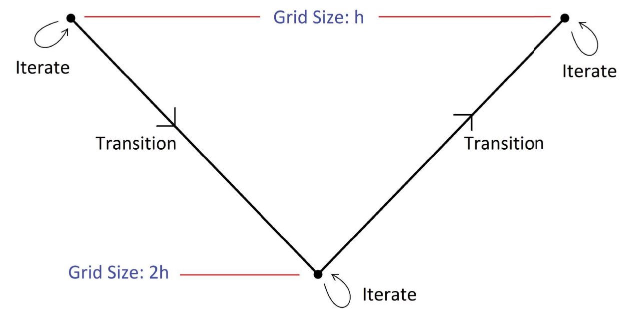

Figure ۱۰: نمودار شماتیک روش دو_شبکه‌ای

۴.۵ پیاده‌سازی روش دو_شبکه‌ای

روش گفته شده در قسمت‌های قبل را پیاده‌سازی می‌کنیم و نتایج آن را با نمودارهای روش‌های قبل مقایسه می‌کنیم:

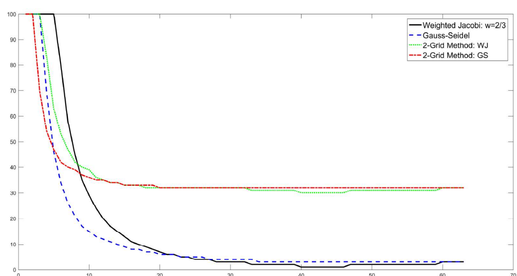

Figure ۱۱: عملکرد روش دو_شبکه با پایه‌های مختلف

نتیجه‌گیری: همان‌گونه که در شکل بالا مشاهده می‌کنید، از روش دو_شبکه‌ای می‌توان به کمک یک آستانه [21] برای بسامد استفاده کرد و عملکرد بسیار بهتری در فرکانس‌های پایین گرفت. باید تاکید کنم که به پیاده‌سازی روش نیز بستگی دارد، روش پیاده‌سازی شده در نمودار بالا (روش در ضمیمه شرح داده شده است)، در فرکانس‌های پایین تنها برتری دارد. برای پیاده‌سازی بهتر می‌توان روشی (ساده)ارائه کرد که همواره عملکردی بهتر از روش پایه‌ی تکراری (جاکوبی وزن‌دار یا گاوس_سیدل) داشته باشد.

[20] Diagram
[21] Threshold

۶ روش چند_شبکه‌ای [۲۲] [۳]

با استفاده از دیاگرام نمایش شمای کامل روش دو_شبکه‌ای، دیاگرامی برای روش چند_شبکه‌ای ارائه می‌کنیم و سپس به توضیح آن می‌پردازیم:

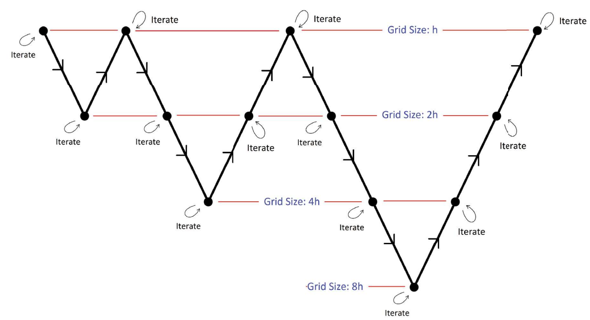

Figure ۱۲: روش چند_شبکه‌ای به همراه توضیح

در روش بالا، تمامی قله‌ها شبکه‌ی اولیه هستند و هر قدم به سمت پایین، زمخت‌تر شدن شبکه با ضریب ۲ را نمایش می‌دهد (شبکه‌ها به ترتیب طول شبکه‌ای برابر h، $۲h$، $۴h$، $۸h$، ... خواهند داشت).

توضیح نمودار: در نمودار بالا، هر دفعه به یک شبکه‌ی زمخت‌تر می‌رویم و در آن مسئله را حل می‌کنیم. سپس تا شبکه‌ی اولیه باز می‌گردیم و در هر مرحله، در شبکه‌ای که قرار گرفته‌ایم روش بازگشتی را انجام می‌دهیم. به این صورت خطاهای به وجود آمده در مسیر، زمانی که به شبکه‌ی اولیه بازگردیم، پاک‌سازی شده‌اند.

در نوشته‌های مرتب با روش چند_شبکه‌ای رایج است که علامت‌های راهنمای در شماهای بالا را به دلیل واضح بودن موضوع، حذف می‌کنیم. یعنی شکل قبل در رابطه با روش چند_شبکه‌ای به صورت زیر آورده می‌شود:

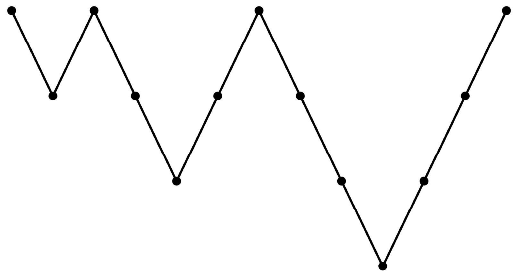

Figure ۱۳: روش چند_شبکه‌ای

۷ نتیجه‌گیری

در برخی از مسئله‌ها، چندین مقیاس زمانی [۲۳] یا مقیاس طولی [۲۴] وجود دارد. این مقیاس‌ها، معنی حقیقی دارند و نشان‌گر رفتار مختلف معادله‌ی مورد بررسی در اندازه‌های مختلف هستند.

به طور مثال در معادله‌ی حرارت که حالت پایای آن مورد بررسی قرار گرفت، اگر جواب اولیه را بر حسب سری فوریه‌ی مکانی آن بنویسیم، رفتار مدهای مختلف مکانی در زمان متفاوت است. بسامدهای کم بسیار کند از بین می‌روند و بسامدهای بالا بسیار سریع‌تر از بین می‌روند. چون به دنبال جواب حالت پایا بودیم، این تفاوت را مورد توجه قرار دادیم و برخودی متفاوتی با بسامدهای مختلف داشتیم تا سریع‌تر به جواب برسیم.

ایده‌ی کلی روش چند_شبکه‌ای بیان شد و نوع استدلال‌ها مورد بررسی قرار گرفت. پس شما می‌توانید هر یک از قدم‌ها را متناسب با مسئله‌ی مورد نظر خود تغییر دهید و یا تعریف کنید. به طور مثال ماتریس‌های گذار را متناسب با مسئله‌ی مورد نظر تعریف کنید تا خطای کم‌تری در گذار بین شبکه‌ها ایجاد شود.

۸ ضمیمه

در این بخش اطلاعات دقیق‌تر مربوط به نمودارها آمده است.

[۲۲] Multi-Grid Method
[۲۳] Time-Scale
[۲۴] Length-Scale
[۲۵] Maximum(Suprimum) Norm

- اندازه‌ی شبکه: تعداد قسمت‌های تقسیم‌بندی $N =$ ۶۴ که طول شبکه‌ی $h =$ ۰٫۰۱۵۶۲۵ را بدست می‌دهد.

- تابع خطا: از نرم بیشینه [۲۵] استفاده شد یعنی بزرگ‌ترین قدر مطلق اختلاف از جواب (که بردار ۰ بود) در درایه‌ها.

- روش دو‌ـ‌شبکه‌ای استفاده شده: روش دو‌ـ‌شبکه‌ای استفاده شده برای رسم نمودارها، چرخه‌ی زیر را دارد:

۱. اعمال روش پایه با ۳ تکرار و انتقال به شبکه‌ی زمخت‌تر

۲. اعمال روش پایه با ۴ تکرار در شبکه‌ی زمخت‌تر و انتقال به شبکه‌ی اولیه

۳. اعمال روش پایه در شبکه‌ی اولیه با ۳ تکرار

که در آن «روش پایه» یکی از «جاکوبی وزن‌دار» یا «گاوس‌ـ‌سیدل» است.

تشکر

لازم دانستم که از دکتر رزوان به خاطر معرفی موضوع و راهنمایی در نگارش این متن تشکر کنم.

همچنین از خانم هدی محمودی برای نقدهای محتوایی و ویرایشی ایشان، ممنون هستم.

References

[1] S. F. McCormick W. L. Briggs Van E. Henson. “A Multigrid Tutorial”. In: (2000).

[2] W. Han K. Atkinson. “Theoretical Numerical Analysis”. In: (2009).

[3] Van Emden Henson. “A Multigrid Tutorial, presented by Van Emden Henson”. In: (2012).

[4] Timothy Sauer. “Numerical Analysis”. In: (2012).