k ـ لیست یکتا رنگ‌پذیری در گراف‌ها (قسمت اول)

محمد امین شعبانی

۱ مقدمه

گراف $G=(V,E)$ با مجموعه‌ی $L(v)$ از رنگ‌ها به ازای هر رأس $v \in V(G)$ در نظر بگیرید. تابع $c: V(G) \to \bigcup_{v\in V(G)} L(v)$ یک رنگ‌آمیزی معتبر است اگر شرایط زیر را داشته باشد:

$$v \in V(G) \Rightarrow c(v) \in L(v)$$

$$(u,v) \in E(G) \Rightarrow c(u) \neq c(v).$$

اگر دسته‌ای از مجموعه‌های $L=\{L(v) \mid v \in V(G)\}$ وجود داشته باشد که با استفاده از آن‌ها تنها یک رنگ‌آمیزی معتبر برای G وجود داشته باشد، آنگاه گراف G L ـ لیست یکتا رنگ‌پذیر نامیده می‌شود. در حالتی که اندازه‌ی تمامی لیست‌ها از اندازه k باشد، G را k ـ لیست یکتا رنگ‌پذیر یا به اختصار $UkLC$ می‌نامند. در مقابل گراف G خاصیت $M(k)$ را دارد اگر و تنها اگر $UkLC$ نباشد. برای مثال هر گرافی $U۱LC$ است و در نتیجه هیچ گرافی خاصیت $M(۱)$ را ندارد.

در این قسمت از مقاله تعدادی از قضایا و نتایج بدست آمده بر روی گراف‌های لیست یکتا رنگ‌پذیر را بررسی کرده و خلاصه‌ای از مثال‌ها و قضایای مقالات را آورده‌ایم و در قسمت بعدی مقاله، نتایج جدیدتری که بدست آمده را به همراه اثبات آن ها بیان خواهیم کرد.

۲ نتایج و قضایای بدست آمده

$UkLC$ به طور جداگانه توسط محمودیان و مهدیان [۶]، و دینیتز و مارتین [۱] معرفی شد. محمودیان و مهدیان قضیه زیر را ثابت کردند.

قضیه ۱. گراف همبند G دارای خاصیت $M(۲)$ است، اگر و تنها اگر هر بلاک در آن، یک دور، گراف کامل و یا یک گراف کامل دو بخشی باشند.

همچنین گراف‌های $U۳LC$ نیز به طور کامل در [۴، ۸، ۵، ۹] بررسی شده‌اند. مارکس [۷] نشان داد که برای هر $k \geq ۳$، تشخیص $UkLC$ بودن گراف $\sum_{۲}^{p}-complete$ می‌باشد.

برای راحتی کار فرض کنید $m(G)$ برابر باشد با کمترین k به طوری که گراف G دارای خاصیت $M(k)$ باشد. به راحتی می‌توان نشان داد که برای هر گراف G، $۲ \leq m(G) \leq min(\delta+۲, n-۱)$ است که در آن δ مینیمم درجه گراف G و n تعداد رئوس آن است. قضیه زیر نیز کران بالای دیگری برای $m(G)$ در هر گراف، با استفاده از k ـ لیست یکتا رنگ‌پذیری زیرگراف‌های القایی آن می‌دهد.

قضیه ۲. ([۳]) فرض کنید H زیرگراف القایی از گراف G با شرایط زیر باشد:

- H دارای خاصیت $M(k)$ باشد.

- هر رأس گراف H حداکثر با l رأس دیگر از $V(G) \setminus V(H)$ همسایه باشد.

آنگاه G دارای خاصیت $M(k+l)$ می‌باشد.

در نهایت کران بالای بهتری برای تعیین $m(G)$ یک گراف G در مقاله [۲] با توجه به میانگین درجات گراف G داده شده است.

قضیه ۳. فرض کنید $\bar{d}(G)$ میانگین درجات گراف G باشد. آنگاه

$$m(G) \leq \lfloor \frac{\bar{d}(G)}{۲} \rfloor + ۲.$$

برای مثال فرض کنید G گرافی دوبخشی باشد و $n(G)$ تعداد رئوس آن باشد. می‌دانیم $\bar{d}(G) \leq n(G)/۲$ و بنابر قضیه بالا $m(G) \leq \lfloor n(G)/۴ + ۲ \rfloor$. قضیه زیر این کران را به کران لگاریتمی بهبود می‌دهد.

قضیه ۴. فرض کنید گراف G دوبخشی باشد. آنگاه کران بالای زیر برقرار است.

$$m(G) \leq ۲ + \log_۲ n(G)$$

برای جلوگیری از بالارفتن حجم این مقاله، از آوردن اثبات‌ها در بیشتر موارد خودداری کرده‌ام؛ برای خواندن اثبات قضایا میتوانید به مقاله‌های ارجاع داده شده مراجعه نمایید.

۳ گراف‌های مسطح

با توجه به قضیه‌های ذکر شده و ویژگی‌های گراف‌های مسطح، به راحتی می‌توان نتایج مستقیمی را برای آن‌ها به دست آورد که در ادامه به دو مورد از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

قضیه ۵. هر گراف مسطح دارای خاصیت $M(۴)$ می‌باشد.

اثبات. با توجه به فرمول اویلر در گراف‌های مسطح، برای هر گراف مسطح $G(V,E)$ ، $|E(G)| \leq ۳|V(G)| - ۶$. بنابراین میانگین درجات هر گراف مسطح کمتر از ۶ است و در نتیجه تمامی گراف‌های مسطح دارای خاصیت $M(۴)$ هستند. □

قضیه ۶. هر گراف مسطح آزاد مثلث دارای خاصیت $M(۳)$ است.

اثبات. همانند قضیه قبل با توجه به فرمول اویلر می‌دانیم میانگین درجات هر گراف مسطح آزاد مثلث کمتر از ۴ بوده و در نتیجه دارای خاصیت $M(۳)$ هستند. □

۴ عدد رنگی $\chi_u(G)$

گراف G یک (k,t) ـ لیست رنگ‌پذیر است اگر بتوان لیست‌های k تایی بر روی رأس‌های G به صورتی قرار داد که در مجموع تمامی لیست‌ها از t رنگ استفاده شده باشد و یک رنگ‌آمیزی معتبر برای G وجود داشته باشد. $\chi_u(G)$ در [۳] به صورت زیر تعریف شده است:

تعریف ۱. برای گراف G و عدد صحیح و مثبت k، $\chi_u(G,k)$ برابر است با کوچکترین عدد t به طوری که G، (k,t) ـ لیست یکتا رنگ‌پذیر باشد. همچنین اگر G گرافی $UkLC$ نباشد، مقدار $\chi_u(G,k)$ برابر صفر در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۲. عدد لیست یکتارنگی گراف G، که با $\chi_u(G)$ نشان داده می‌شود، برابر است با $\max_{k\geq ۱} \chi_u(G,k)$.

برای روشن‌تر شدن این مفهوم، می‌توان از قضیه زیر که در همان مقاله اثبات شده است استفاده کرد.

قضیه ۷. گراف G ۲ ـ لیست یکتا رنگ‌پذیر است اگر و تنها اگر $(۲,t)$ ـ لیست یکتا رنگ‌پذیر باشد و $t = \max(۳, \chi(G))$.

با توجه به اینکه $\chi_u(G,۲)$ همواره بزرگتر مساوی با $\chi(G)$ است، این قضیه نشان می‌دهد که $\chi_u(G,۲)$ برابر است با $\max_{k\geq ۱} \chi_u(G,k)$. همچنین حدس زیر نیز مطرح شده که تا به این لحظه در حالت‌های خاصی اثبات شده است و صورت کلی آن هنوز اثبات یا رد نشده است.

حدس ۱. برای هر گراف G داریم $\chi_u(G) \leq \Delta(G) + ۱$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر G گرافی کامل یا یک دور فرد باشد.

حدس بالا قضیه شناخته شده‌ی بروکس را هم پوشش می‌دهد، زیرا برای هر گراف G داریم $\chi(G) = \chi_u(G,۱)$ و در نتیجه $\chi(G) \leq \chi_u(G)$ بنابراین، حدس بالا $\chi(G) \leq \Delta(G) + ۱$ را

حفظ می‌کند. همچنین اگر $\chi(G) = \Delta(G) + ۱$ باشد، داریم $\chi_u(G) \leq \Delta(G) + ۱$ و در نتیجه G یک گراف کامل یا یک دور فرد است.

۵ f ـ لیست یکتا رنگ‌پذیری

در بعضی از مقالات حالت‌های دیگری نیز مشابه kـ لیست رنگ‌پذیری بررسی شده است که یکی از آن موارد در ادامه آمده است.

تعریف ۳. گراف G و تابع f از $V(G)$ به $\mathbb{N}$ را در نظر بگیرید. یک fـ لیست واگذاری L به G یک لیست واگذاری (لیست از رنگ ها به ازای هر رأس) است به صورتی که $|L(v)| = f(v)$ برای هر رأس v. گراف G fـ یکتا رنگ‌پذیر ($UfLC$) شناخته می‌شود اگر fـ لیست واگذاری L برای G وجود داشته باشد به صورتی که G Lـ لیست یکتا رنگ‌پذیر باشد.

با توجه به تعریف بالا، اگر G fـ لیست یکتا رنگ پذیر باشد، به صورتی که برای هر رأس v داشته باشیم $f(v) = k$، آنگاه G یک گراف $UkLC$ می‌باشد.

قضیه ۸. اگر G گرافی $UfLC$ باشد، آنگاه:

$$\sum_{v\in V(G)} f(v) \leq n(G) + e(G)$$

اثبات. فرض کنید L یک fـ لیست واگذاری برای G با رنگ‌های $۱, ۲, \dots, t$ باشد، به صورتی که G یک Lـ لیست رنگ‌پذیری یکتا داشته باشد. حال گراف tـ یکتا رنگ‌پذیر G^* را به صورت زیر می‌سازیم: $V(G) = \{v_۱, v_۲, \dots, v_n\}$ و گراف کامل K_t با مجموعه رئوس $\{w_۱, w_۲, \dots, w_t\}$ را در نظر بگیرید. حال برای G^*، اجتماع گراف G و K_t را در نظر گرفته و یال‌های (v_i, w_j) را به ازای $۱ \leq i \leq n$، $۱ \leq j \leq t$، $j \notin L(v_i)$ به آن اضافه می‌کنیم.
یک t رنگ‌پذیری c از G^* را در نظر بگیرید. بدون کم شدن از کلیت مسئله می‌توانیم فرض کنیم که برای هر $۱ \leq i \leq t$ داریم $c(w_i) = i$. از آنجایی که G یک Lـ یکتا رنگ‌پذیری دارد، با توجه به ساختار G^*، c تنها tـ رنگ‌پذیری G^* است. در نتیجه G^* یکتا tـ رنگ‌پذیر است. از طرفی G^* دارای $n(G) + t$ رأس و $e(G) + \binom{t}{۲} + \sum_{v\in V(G)}(t - f(v))$ یال است. بنابراین همانطور که در بالا اشاره شد:

$$e(G) + \binom{t}{۲} + \sum_{v\in V(G)} (t - f(v)) \geq (n(G) + t)(t - ۱) - \binom{t}{۲}$$

که بعد از ساده کردن، قضیه بالا را نتیجه می‌دهد. □

در پایان، حدس زیر را که به تازگی مطرح شده و هنوز حل نشده است می‌آوریم:

حدس ۲. هر گرافی با میانگین درجه $۲k - ۲$ دارای خاصیت $M(k)$ است.

این حدس، تکمیل کننده قضیه ۳ است که کران قوی‌تری را نتیجه می‌دهد.

References

[1] JH Dinitz and WJ Martin. The stipulation polynomial of a uniquely list-colorable graph. *Austral. J. Combin*, 11:105–115, 1995.

[2] Ch. Eslahchi, M. Ghebleh, and H. Hajiabolhassan. Some concepts in list coloring. *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 41:151–160, 2002.

[3] Y. G. Ganjali, M. Ghebleh, H. Hajiabolhassan, M. Mirzazadeh, and B. S. Sadjad. Uniquely 2-list colorable graphs. *Discrete Appl. Math.*, 119(3):217–225, 2002.

[4] M. Ghebleh and E. S. Mahmoodian. On uniquely list colorable graphs. *Ars Combin.*, 59:307–318, 2001.

[5] Wenjie He, Yufa Shen, Yongqiang Zhao, Yanning Wang, and Xinmiao Ma. On property $M(3)$ of some complete multipartite graphs. *Australas. J. Combin.*, 35:211–220, 2006.

[6] E. S. Mahmoodian and M. Mahdian. On the uniquely list colorable graphs. In *Proceedings of the 28th Annual Iranian Mathematics Conference, Part 1 (Tabriz, 1997)*, volume 377 of *Tabriz Univ. Ser.*, pages 319–326. Tabriz Univ., Tabriz, 1997.

[7] Dániel Marx. Complexity of unique list colorability. *Theoret. Comput. Sci.*, 401(1-3):62–76, 2008.

[8] Yufa Shen, Yanning Wang, Wenjie He, and Yongqiang Zhao. On uniquely list colorable complete multipartite graphs. *Ars Combin.*, 88:367–377, 2008.

[9] Yongqiang Zhao, Wenjie He, Yufa Shen, and Yanning Wang. Note on characterization of uniquely 3-list colorable complete multipartite graphs. In *Discrete geometry, combinatorics and graph theory*, volume 4381 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 278–287. Springer, Berlin, 2007.