دینامیک همسان‌ریختی‌های روی دایره

سمیه یاسمن

چکیده

در بررسی بسیاری از پدیده‌های فیزیکی و پدیده‌های مشاهده شده در طبیعت، بررسی دینامیکی همسان‌ریختی‌های روی دایره کاربرد زیادی دارد. برای بررسی همسان‌ریختی‌های روی دایره به عنوان یک سیستم دینامیکی گسسته، ابزاری به نام عدد چرخشی [۱] در سال ۱۸۸۵ توسط پوانکاره معرفی شد. در این نوشتار، ابتدا عدد چرخشی معرفی می‌شود و سپس با ذکر قضایایی، شرایطی را بیان می‌کنیم که تحت آن شرایط، ویژگی‌های مهم دینامیکی یک همسان‌ریختی با توجه به گویا یا گنگ بودن عدد چرخشی به صورت کامل مشخص می‌شود.

۱ مقدمه

قبل از این که بخواهیم در مورد عدد چرخشی صحبت کنیم، ابتدا کمی مقدمات و مفاهیم اولیه را بیان می‌کنیم. نگاشت

$$\begin{cases} f : X \mapsto X \\ \quad x \mapsto f(x) \end{cases}$$

(که X یک فضای متریک است) را در نظر بگیرید. می‌توان f را به عنوان یک سیستم در نظر گرفت که x را به عنوان ورودی می‌گیرد و $f(x)$ را به عنوان خروجی تحویل می‌دهد. اگر f یک همسان‌ریختی X باشد، می‌توان آن را به عنوان یک سیستم دینامیکی گسسته در نظر گرفت که هر مدار جواب با شروع از x به صورت

$$x, f(x), f^{۲}(x) = f\ o\ f(x), \ldots, f^k(x), \ldots$$

است که $f^k(x)$ نمایشگر k بار ترکیب نگاشت f با خودش است. به این مدار جواب، مدار پیش‌رو x گویند و با $O(x)$ نمایش می‌دهند. همچنین به مجموعه‌ی

$$x, f^{-۱}(x), f^{-۲}(x), \ldots$$

مدار پس‌رو x گویند. در میان خانواده‌ی همه‌ی همسان‌ریختی‌ها، خانواده‌ی همسان‌ریختی‌های روی دایره واحد، $S^۱$ ، کاربرد زیادی دارند. برای مطالعه این همسان‌ریختی‌ها، می‌توان از $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ که با $S^۱$ یکی است استفاده کرد. پس، از این‌جا به بعد، از همسان‌ریختی‌های

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto f(x) \quad (mod\ ۱) \end{cases}$$

استفاده می‌کنیم. همچنین متر روی $S^۱$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(x, y) = \min\{|\gamma| \mid \gamma : [۰, ۱] \mapsto S^۱, \\ \gamma(۰) = x, \gamma(۱) = y, \gamma \in C([۰, ۱])\}$$

که منظور از $|\gamma|$ طول خم متناظر با γ روی $S^۱$ است.

[۱] Rotation number(Winding number)

۲ دینامیک نگاشت دوران

یکی از همسان‌ریختی‌هایی که می‌توان روی این فضا تعریف کرد، نگاشت دوران

$$\begin{cases} R_a : \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \mapsto \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \\ \qquad x \mapsto x + a \quad (mod\ 1) \end{cases}$$

که $a \in \mathbb{R}$ است. از این جا به بعد ۱ mod را در نوشتن حذف می‌کنیم مگر اینکه نیاز به تصریح آن باشد. ما علاقه‌مند به این هستیم که بدانیم تکرارهای زیاد نگاشت دوران وقتی از x شروع می‌شوند به کجا ختم می‌شوند. در ادامه می‌بینیم که گویا یا گنگ بودن a می‌تواند به طور کامل دینامیک نگاشت دوران را مشخص کند.

قضیه ۱. اگر $a \in Q$ ، آنگاه برای هر x ثابت، $o(x)$ متناهی است. به عبارت دقیق‌تر

$$R_a : \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \mapsto \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$$

تناوبی است.

اثبات. فرض کنید $a = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ که p, q اعداد صحیح و نسبت به هم اول هستند. در این صورت داریم:

$$\forall x \in \mathbb{R} \;:\; R_a^q(x) = x + q \times \frac{p}{q} = x + p = x \quad (mod\ 1)$$

در نتیجه R_a تناوبی با دوره تناوب q است. □

در حالتی‌که $a \in \mathbb{Q}^C$، مسئله اینقدر ساده نیست. به عبارت دقیق‌تر، در این حالت هر یک از مدارها با شروع از $x \in S^1$ به طور یکنواخت روی S^1 توزیع می‌شود. در این حالت، دو سوال به ذهن می‌رسد:

۱. برای هر دو نقطه‌ی $x, y \in S^1$ ، آیا مدار x شامل نقطه‌ای به دلخواه نزدیک به y است؟

۲. دو بازه‌ی دلخواه در S^1 با طول‌های متفاوت را در نظر بگیرید. آیا بازه‌ی بزرگ‌تر، شامل تعداد بیشتری از نقاط مدار x است یا خیر؟

این دو سوال در قضیه‌ی زیر پاسخ داده می‌شوند:

قضیه ۲. (Weyl–Laplace) نگاشت دوران R_a را در نظر بگیرید که $a \in \mathbb{Q}^C$. همچنین فرض کنید U بازه‌ای به فرم $[c, d]$ باشد که $0 \leq c < d \leq 1$. تعریف کنید

$$T(x, n) = \#\{1 \leq k \leq n \mid R_a^k(x) \in U\}$$

که $\#A$ نشان‌دهنده‌ی تعداد اعضای مجموعه A است. آنگاه داریم:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{T(x, n)}{n} = d - c$$

یادداشت. قضیه‌ی وایل در واقع می‌گوید که با تکرارهای هرچه بیشتر R_a ، میانگین تعداد نقاطی که در یک بازه‌ی دلخواه قرار می‌گیرند برابر با طول بازه است. [۲] اکنون که مهم‌ترین ویژگی‌های دینامیکی نگاشت دوران مشخص شد، می‌توان این سوال را پرسید که آیا پارامتری شبیه به a در نگاشت دوران برای یک همسان‌ریختی دلخواه f روی دایره قابل تعریف است که با توجه به گویا یا گنگ بودن آن، بتوان دینامیک f را تعیین کرد. در قسمت بعد تلاش می‌شود تا به این سوال، با تعریف مفهومی جدید به نام عدد چرخشی پاسخ داده شود.

۳ عدد چرخشی

در این بخش می‌خواهیم پارامتری به نام عدد چرخشی معرفی کنیم که بر اساس آن می‌توان ویژگی‌های مهم دینامیکی یک همسان‌ریختی دلخواه روی دایره را تعیین کرد. فرض کنید همسان‌ریختی دلخواه

$$f : S^1 \mapsto S^1$$

به ما داده شده است. همچنین فرض کنید همسان‌ریختی

$$h : S^1 \mapsto S^1$$

وجود دارد که

$$R_a \; o \; h = h \; o \; f$$

[۲] به قضیه‌ی وایل، قضیه‌ی هم توزیع یا Equidistributed هم گفته می‌شود.

به ازای یک $a \in \mathbb{R}$. به عبارت دیگر $a \in \mathbb{R}$ موجود است که f با R_a مزدوج توپولوژیک است. در نتیجه برای $x \in S^1$ داریم

$$f^k(x) = \overbrace{h^{-1}\ o\ R_a\ o\ h\ o\ \ldots\ o\ h^{-1}\ o\ R_a\ o\ h}^{\text{k مرتبه}}$$
$$= h^{-1}\ o\ R_a^k\ o\ h(x)$$

بنابراین با توجه به دینامیک R_a ، دینامیک f را می‌توان تعیین کرد. به عنوان مثال فرض کنید $a \in \mathbb{Q}$ که $a = \frac{p}{q}$. در این صورت R_a تناوبی با دوره تناوب q است. در این صورت داریم

$$\forall x:\ R_a^q(x) = x\ \Rightarrow f^q(x) = h^{-1}\ o\ R_a^q\ o\ h(x)$$
$$= h^{-1}\ o\ h(x) = x$$

در نتیجه f نیز تناوبی با دوره تناوب q است. بنابراین در حالتی که $a \in \mathbb{R}$ موجود باشد که f با R_a مزدوج توپولوژیک است، ویژگی‌های دینامیکی f با توجه به گویا و یا گنگ بودن R_a به طور کامل مشخص می‌شود.

حال فرض کنید f یک همسان‌ریختی دلخواه روی دایره باشد که با نگاشت دوران، مزدوج توپولوژیک نیست. در این حالت، می‌توان برای f ، عدد چرخشی را طوری تعریف کرد که گویا یا گنگ بودن این عدد، در شرایطی، دینامیک f را بتواند به طور کامل مشخص کند. در ادامه برآنیم که عدد چرخشی را معرفی کنیم.

همسان‌ریختی دلخواه $f : S^1 \mapsto S^1$ و تابع تصویر

$$\begin{cases} \pi : \mathbb{R} \mapsto \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \\ \qquad x \mapsto x + \mathbb{Z} \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. بنابراین می‌توان هر تابع $f : S^1 \mapsto S^1$ را به همسان‌ریختی $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ترفیع داد به‌طوری‌که $\pi\ o\ F = f\ o\ \pi$.

تعریف ۱. همسان‌ریختی $f : S^1 \mapsto S^1$ را جهت نگه‌دار [۳] گویند اگر ترفیع یکنوای F از f موجود باشد که:

$$F(x+1) = F(x) + 1$$

از این جا به بعد منظور ما از تابع ترفیع F تابعی با شرایط بالاست.

قضیه‌ی زیر ما را قادر می‌سازد که عدد چرخشی را برای همسان‌ریختی جهت نگه‌دار $f : S^1 \mapsto S^1$ تعریف کنیم.

قضیه ۳. فرض کنید $f : S^1 \mapsto S^1$ یک همسان‌ریختی جهت نگه‌دار باشد و $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ یک ترفیع آن باشد. برای $x \in \mathbb{R}$ تعریف کنید:

$$\tau(F) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(F^n(x) - x)$$

آنگاه برای هر $x \in \mathbb{R}$ این حد وجود دارد و مقدار آن، مستقل از x است. به علاوه، تفاوت $\tau(F)$ برای دو ترفیع متفاوت f به اندازه یک عدد صحیح می‌باشد.[۴]

تعریف ۲. عدد چرخشی همسان‌ریختی جهت‌نگه‌دار $f : S^1 \mapsto S^1$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau(f) := \pi(\tau(F)) \qquad (1)$$

که F یک ترفیع f است.

یادداشت. با توجه به قضیه قبل، عدد چرخشی که به صورت (۱) تعریف می‌شود خوش تعریف است.

۱.۳ عدد چرخشی گویا

بر اساس آنچه تا پیش از این گفتیم، اکنون می‌توانیم احکام زیر را راجع به عدد چرخشی گویا بیان کنیم.

قضیه ۴. اگر f یک همسان‌ریختی جهت نگه‌دار روی S^1 باشد، آنگاه:

$\tau(f)$ گویاست اگر و فقط اگر f یک نقطه تناوبی داشته باشد.

اثبات. فرض کنید $\tau(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ که p و q اعداد صحیح و نسبت به هم اول باشند. داریم

$$\tau(f^m) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(F^{mn}(x) - x) = m\tau(f)$$

بنابراین $\tau(f^q) = 0$. بنابراین کافیست نشان دهیم که اگر $\tau(f) = 0$ آنگاه f یک نقطه ثابت دارد.

[۳] orientation-preserving

فرض کنید $\tau(f)=0$ و f نقطه ثابت نداشته باشد. در این صورت اگر F یک ترفیع f باشد که $F(0)\in[0,1)$ و $x\in\mathbb{R}$ موجود باشد که $F(x)-x\in\mathbb{Z}$ آنگاه f حتما نقطه ثابت دارد، زیرا در این صورت

$$\begin{aligned} &\forall x\in\mathbb{R}\ :\ \pi(F(x)-x)=0\\ \Rightarrow\quad &\pi(F(x))-\pi(x)=0\\ \Rightarrow\quad &f(\pi(x))=\pi(x)\end{aligned}$$

پس $\pi(x)$ نقطه ثابت f است.

اما اگر برای هر $x\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $F(x)-x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ، چون $F-Id$ پیوسته است، طبق قضیه‌ی مقدار میانی با توجه به اینکه $F(0)\in[0,1)$ ، داریم:

$$F(1)=F(0+1)=F(0)+1\rightarrow F(1)-1=F(0).$$

در نتیجه برای هر $x\in(0,1)$ داریم $0<F(x)-x<1$. چون $F-Id$ پیوسته است، بیشینه و کمینه خود را روی بازه فشرده $[0,1]$ می‌گیرد. از طرفی می‌دانیم $F(x)-x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$، بنابراین $\delta>0$ موجود است که:

$$\forall x\in\mathbb{R}\ :\ 0<\delta\leq F(x)-x\leq 1-\delta<1$$

پس برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم:

$$\delta\leq\frac{F^n(0)}{n}\leq 1-\delta$$

در نتیجه:

$$\tau(f)=\lim_{n\to\infty}\frac{F^n(0)}{n}=0$$

بر عکس، فرض کنید x یک نقطه‌ی تناوبی F از مرتبه‌ی q باشد.در این صورت ثابت $p\in\mathbb{Z}$ وجود دارد که $F^q(x)=x+p$ اکنون داریم

$$\begin{aligned}&\frac{F^{mq}(x)-x}{mq}\\ &=\frac{1}{mq}\sum_{i=0}^{m-1}F^q(F'^q(x))-F'^q(x)=\frac{p}{q}\\ &\rightarrow\tau(f)=\frac{p}{q}.\end{aligned}$$

□

در حالتی که عدد چرخشی گویا باشد می‌توان ثابت کرد که مدارهای پیش‌رو و پس‌رو هر نقطه‌ی غیرتناوبی به مدارهای تناوبی میل می‌کنند. در قسمت بعد تلاش می‌کنیم احکامی راجع به همسان‌ریختی‌های با عدد چرخشی گنگ بیان کنیم.

۲.۳ عدد چرخشی گنگ

همان‌گونه که در قسمت قبل اشاره شد، در حالتی که عدد چرخشی گویا است رفتار نهایی هر یک از نقاط غیر تناوبی کاملا مشخص است. هدف ما در این قسمت آن است که اطلاعاتی راجع به ساختار رفتار نهایی مدارها در حالتی که عدد چرخشی گنگ است به دست آوریم. ابتدا مجموعه‌ی w ـ حدی را برای یک سیستم دینامیکی تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳. فرض کنید $f\,:\,S^1\mapsto S^1$ یک تابع پیوسته و $x\in S^1$ باشد. در این صورت، مجموعه‌ی w ـ حدی x (یعنی $w(x)$) به صورت زیر تعریف می‌شود:

مجموعه‌ی w ـ حدی x شامل تمام نقاط $y\in S^1$ است که برای آن‌ها دنباله‌ی n_i موجود باشد که

$$n_1<n_2<\dots$$

$$\lim_{i\to\infty}n_i=\infty$$

$$\lim_{i\to\infty}f^{n_i}(x)=y$$

به عبارت دیگر، مجموعه w ـ حدی x ، شامل تمام نقاطی است که مدار x به اندازه دلخواه به آن نقاط نزدیک می‌شود. توجه داشته باشید که تعریف فوق، به سادگی می‌تواند برای هر سیستم دینامیکی دلخواه نیز به کار گرفته شود.

مثال. $x\in S^1$ را در نظر بگیرید. اگر R_a نگاشت دوران گنگ روی دایره باشد،($a\in\mathbb{Q}^c$)، آنگاه طبق قضیه‌ی وایل مدارهای R_a در S^1 چگال هستند. در نتیجه برای هر $y\in S^1$ ، دنباله‌ی

$$n_1<n_2<\dots$$

از اعداد طبیعی وجود دارد که $\lim_{i\to\infty}f^{n_i}(x)=y$. پس مجموعه‌ی w ـ حدی نقطه x برابر با S^1 است.

مثال قبل می‌گوید که برای دوران گنگ، $w(x)$ مستقل از انتخاب x است. قضیه‌ی بعد، نتیجه‌ای مشابه این مطلب را برای هر همسان‌ریختی جهت نگهدار $f : S^1 \mapsto S^1$ با عدد چرخشی گنگ بیان می‌کند.

قضیه ۵. فرض کنید $f : S^1 \mapsto S^1$ یک همسان‌ریختی جهت نگه‌دار باشد و عدد چرخشی f نیز گنگ باشد. آنگاه برای هر $x, y \in S^1$ داریم: $w(x) = w(y)$.

ما در این‌جا نمی‌خواهیم اثبات این قضیه را بیان کنیم. اما توجه کنید که مهم‌ترین قسمت در اثبات این قضیه آن است که نشان دهیم برای همسان‌ریختی‌های با عدد چرخشی گنگ، مدار x در نهایت هر بازه‌ی دلخواه را ملاقات می‌کند.

تعریف دیگری که در ادامه، مورد استفاده قرار می‌گیرد، تعریف مجموعه‌های سرگردان است.

تعریف ۴. مجموعه‌ی باز ناتبهگون[۴] $U \subset S^1$ و تابع پیوسته $f : S^1 \mapsto S^1$ را در نظر بگیرید. مجموعه U را تحت تابع f سرگردان گوییم هرگاه، $\forall n \in \mathbb{N} : f^n(U) \cap U = \emptyset$ و نیز $\bigcup_{x \in U} w(x)$ یک مدار تناوبی نباشد.

شرط دوم می‌گوید که تحت تکرارهای تابع f روی U ، نقاط U هیچ رفتار تناوبی‌ای از خود نشان ندهند. همچنین شرط اول این را می‌گوید که تحت تکرارهای تابع f ، باز U سرگردان شود و به خود U بازنگردد.

یادداشت. مجموعه‌ی ناسرگردان مجموعه‌ای است که سرگردان نباشد.

قضیه ۶. فرض کنید مجموعه کانتور $K \subset [0,1]$ و عدد گنگ $\gamma \in (0,1)$ به ما داده شده است. در این صورت، همسان‌ریختی

$$f : S^1 \mapsto S^1$$

موجود است که $\tau(f) = \gamma$ و برای هر $x \in S^1$ ، داریم: $w(x) = k$.

اثبات این قضیه را می‌توان در [۶] یافت. عکس این قضیه نیز بسیار مهم است:

قضیه ۷. فرض کنید f یک همسان‌ریختی جهت نگهدار روی دایره باشد که عدد چرخشی آن گنگ است. اگر هیچ مجموعه‌ی سرگردانی برای f موجود نباشد آنگاه برای هر $x \in S^1$، داریم: $w(x) = S^1$.

اکنون تا حدی به پاسخ سوال اولمان نزدیک شده‌ایم: آیا همسان‌ریختی جهت نگه‌دار f روی دایره با عدد چرخشی گنگ، با دوران گنگ مزدوج توپولوژیک است یا خیر؟ قضیه ۶ نشان می‌دهد که جواب این سوال همیشه مثبت نیست. به عبارت دیگر، می‌توان همسان‌ریختی‌هایی روی دایره واحد یافت که مجموعه‌ی w ــ حدی هر نقطه‌ی x کل S^1 نیست. پوانکاره در قضیه‌ی زیر شرایطی را بیان می‌کند که تحت آن شرایط پاسخ به این سوال مثبت است.

قضیه ۸. فرض کنید f یک همسان‌ریختی جهت نگهدار روی S^1 باشد و f بازه‌های سرگردان نداشته باشد. آنگاه f با دوران گنگ مزدوج توپولوژیک است.[۲]

سوالی که در این جا پیش می‌آید این است که آیا راهکار یا شرایطی وجود دارد که از وجود بازه‌های سرگردان خودداری کنیم. ضرورتا، دو پاسخ برای این سوال موجود است. اولین پاسخ، این است که نقاط بد مشخص را حذف کنیم و سعی کنیم نگاشت تزویج را مشخص کنیم. در واقع در این حالت، سعی می‌شود این نقاط به کمک فضای خارج قسمتی حذف شوند. پاسخ بیشتر راضی کننده، توسط Denjoy در سال ۱۹۳۲ داده شده است [۳].

قضیه ۹. فرض کنید $f : S^1 \mapsto S^1$ یک وابرسانی C^1 باشد که $\tau(f) \in Q^C$. اگر مشتق f با تغییرات کراندار باشد، آنگاه f با دوران گنگ R_a مزدوج توپولوژیک است.

یادداشت. اگر در قضیه‌ی فوق به جای شرط با تغییرات کراندار بودن f، شرط C^2 بودن f را قرار دهیم، حکم برقرار است. برای اثبات می‌توانید به [۷] رجوع کنید.

Denjoy با ارائه یک مثال نشان داد که شرط C^1 بودن f با عدد چرخشی گنگ، تضمین نمی‌کند که f با دوران گنگ مزدوج توپولوژیک است. قضیه زیر که در [۵] آمده است، این مطلب را دقیق‌تر بیان می‌کند.

[۴] non-degenerate

قضیه .(Denjoy) فرض کنید α یک عدد گنگ باشد. آنگاه وابرسانی جهت‌نگه‌دار C^1 روی دایره وجود دارد که عدد چرخشی آن α است و $w(x) \neq S^1$.

اثبات. فرض کنید L_n دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت باشد که:

۱. $\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = 1$

۲. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n = 1$

۳. برای هر $n \geq 0$ داشته باشیم: $L_n > L_{n+1}$.

۴. برای $n < 0$ داشته باشیم: $L_n < L_{n+1}$.

۵. برای $n \geq 0$ داشته باشیم: $3L_{n+1} - L_n > 0$.

به عنوان مثال، اگر قرار دهید:

$$L_n = t(|n|+2)^{-1}(|n|+3)^{-1}T^{-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(|n|+r)^{-1}(|n|+3)^{-1}$$

آنگاه $\{L_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ در شرایط فوق صدق می‌کند.

بازه‌ی بسته‌ی I_n به طول L_n را در نظر بگیرید. فرض کنید $I_n = [a_n, b_n]$، پس $L_n = b_n - a_n$ و در نتیجه

$$\int_{a_n}^{b_n}(b_n - t)(t - a_n)dt = \frac{L_n^3}{6}$$

بنابراین

$$\frac{6(L_{n+1} - L_n)}{L_n^3}\int_{a_n}^{b_n}(b_n - t)(t - a_n)dt = L_{n+1} - L_n$$

در نتیجه اگر تابع f را برای $x \in I_n$ به صورت زیر تعریف کنیم:

$$f(x) = a_{n+1} + \int_{a_n}^{x} 1 + \frac{6(L_{n+1} - L_n)}{L_n^3}(b_n - t)(t - a_n)dt$$

آنگاه $f(b_n) = a_{n+1} + L_n + L_{n+1} - L_n = b_{n+1}$. همچنین f روی I_n مشتق پذیر است و

$$f'(x) = 1 + \frac{6(L_{n+1} - L_n)}{L_n^3}(b_n - x)(x - a_n)$$

پس $f'(a_n) = 1 = f'(b_n)$. توجه کنید که برای $n < 0$ داریم: $L_{n+1} - L_n > 0$. در نتیجه:

$$1 \leq f'(x) \leq 1 + \frac{6(L_{n+1} - L_n)}{L_n^3}\left(\frac{L_n}{2}\right)^2 = \frac{3L_{n+1} - L_n}{2L_n}, x \in I_n$$

همچنین برای $n > 0$ داریم:

$$0 < \frac{3L_{n+1} - L_n}{2L_n} \leq f'(x) \leq 1, x \in I_n.$$

بنابراین، برای $x \in I_n$، $f'(x)$ به طور یکنواخت به ۱ میل می‌کند وقتی n به بینهایت میل می‌کند.

با توجه به آن‌چه تا به حال بدست آوردیم، می‌توان نتیجه گرفت که درون هر یک از بازه‌های I_n، تابع f به طور یکنواخت C^1 است و توسیع C^1 به کل S^1 نیز دارد. از طرفی می‌توان دید که $f''(\frac{a_n+b_n}{2}) = 0$ و اگر $x \to a_n$ آنگاه $f''(x)$ به

$$f''(a_n) = \frac{6(L_{n+1} - L_n)}{L_n^3}L_n = \frac{6(L_{n+1} - L_n)}{L_n}L_n^{-1}$$

میل می‌کند. همچنین، وقتی n به بینهایت میل کند $f''(x)$ بیکران می‌شود. بنابراین f تابعی C^2 نیست.

حال قرار دهید: $\Lambda = S^1 \cup_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{int}(I_n)$. می‌توان دید که Λ یک مجموعه کانتور است و برای هر $x \in \Lambda$، مدار x در Λ چگال است. چون هر بازه I_n هیچگاه با دینامیک حاصل از f به خودش بر نمی‌گردد و به بقیه I_j ها می‌رود، برای هر $x \in \mathrm{int}(I_n)$ داریم: $x \notin w(x)$. همچنین $x \notin \Omega(f)$ که $\Omega(f)$ نقاط ناسرگردان f است. در نتیجه برای هر $x \in S^1$، داریم: $\Lambda = w(x) = \Omega(f)$ و حکم ثابت می‌شود. □

تا این‌جا دیدیم که گویا و یا گنگ بودن عدد چرخشی می‌تواند تا حد قابل توجهی دینامیک همسان‌ریختی متناظر را مشخص کند. سوالی که در این‌جا مطرح می‌شود این است که تغییرات کوچک در یک همسان‌ریختی، چه تاثیری روی عدد چرخشی آن می‌گذارد. در قسمت بعد تلاش می‌شود که به این سوال پاسخ داده شود.

۴ زبانه‌های آرنولد

فرض کنید $f : S^1 \mapsto S^1$ یک همسان‌ریختی روی دایره باشد و تابع τ^* را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\begin{cases} \tau^* : S^1 \mapsto S^1 \\ \quad \alpha \mapsto \tau(R_\alpha \, o \, f) \end{cases}$$

تابع τ^* پیوسته است. قرار دهید: $f_\alpha = R_\alpha \, o \, f$ و همچنین فرض کنید $\hat{f}$ و $\hat{f_\alpha}$ به ترتیب ترفیع‌های f و f_α باشند.

لم ۱. اگر $f : S^1 \mapsto S^1$ یک همسان‌ریختی دایره باشد که هیچ مدار تناوبی ندارد، آنگاه برای $\alpha > 0$ داریم: $\tau(R_\alpha \, o \, f) > \tau(f)$.

اثبات. فرض کنید $f : S^1 \mapsto S^1$ یک همسان‌ریختی باشد که مدار تناوبی ندارد. با استفاده از لم زرن[5]، می‌توان گفت که زیرمجموعه‌ی fـ ناوردای K از S^1 موجود است که مینیمال است. چون K مینیمال است، هر مدار در K، چگال در K است. بنابراین اگر $x \in K$، آنگاه دنباله‌ی $\{n_i\}$ موجود است که وقتی $n_i \to \infty$، داریم $f^{n_i}(x) \to x$.

فرض کنید:

$$\begin{cases} \pi : \mathbb{R} \mapsto S^1 \\ \quad y \mapsto y - [y] \end{cases}$$

تابع تصویر باشد. $\hat{x}$ را به گونه‌ای انتخاب کنید که $\pi(\hat{x}) = x$. بنابراین دنباله‌ای از اعداد صحیح مثبت، $\{p_i\}$، وجود دارد که:

$$\hat{f}^{n_i}(\hat{x}) - \hat{x} - p_i \to 0.$$

می‌توان با استقرا زیردنباله‌ای از این دنباله یافت که

$$\forall x \in \mathbb{N} : \hat{f_\alpha}^{\,n}(\hat{x}) \geq \hat{f}^n(\hat{x}) + \alpha.$$

از قضیه‌ی مقدار میانی و این‌که $\hat{f_0}^{\,n}(\hat{x}) < \hat{x} + p_i$، نتیجه می‌شود که دنباله‌ی $\{\alpha_i\}$ موجود است به‌طوری‌که:

$$\alpha_i \leq \hat{x} + p_i - \hat{f}^{n_i}(\hat{x}) \ \ \& \ \ \hat{f_{\alpha_i}}^{\,n_i}(\hat{x}) = \hat{x} + p_i.$$

پس برای هر i، x یک نقطه تناوبی f_{α_i} است. در نتیجه تابع $\alpha \to \tau^*(\alpha)$ صعودی است و در نقاطی که $\tau^*(\alpha)$ گنگ باشد τ^* اکیدا صعودی است. □

می‌توان ثابت کرد که برای β های گویا، $\tau^{*-1}(\beta)$ درون ناتهی دارد. همچنین، مجموعه‌ی $\{\alpha : \tau^*(\alpha) \in \mathbb{Q}^c\}$ مجموعه‌ی هیچ جا چگال در S^1 است. لم زیر این حکم را بیان می‌کند.

لم ۲. فرض کنید که برای هر $\alpha \in [0,1)$ و هر $m \in \mathbb{N}$ نگاشت f_α^m و نگاشت همانی با هم مساوی نباشند. آنگاه اگر $\alpha \in Q$، مجموعه‌ی $\tau^{*-1}(\alpha)$ درون ناتهی دارد. همچنین مجموعه‌ی

$$\{\alpha : \tau^*(\alpha) \in \mathbb{Q}^c\}$$

یک مجموعه‌ی هیچ جا چگال در S^1 است.

اثبات. قرار دهید $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ و همچنین فرض کنید $k_{\frac{r}{s}}$ شامل تمام α هایی باشد که $\tau(f_\alpha) = \frac{r}{s}$. پس:

$$k_{\frac{r}{s}} = \{\alpha \mid \exists x : \hat{f_\alpha}^{\,s}(x) = x + r\}.$$

با توجه به پیوستگی و یکنوایی تابع τ^*، می‌توان نتیجه گرفت که این مجموعه ناتهی است. تعریف کنید:

$$k^+_{\frac{r}{s}} = \{\alpha \in k_{\frac{r}{s}} \mid \ \hat{f}^s_\alpha(x) \geq x + r, \forall x\}$$
$$k^-_{\frac{r}{s}} = \{\alpha \in k_{\frac{r}{s}} \mid \ \hat{f}^s_\alpha(x) \leq x + r, \forall x\}$$

مرور اثبات در لم قبل نشان می‌دهد که این دو مجموعه ناتهی هستند و هر دو شامل نقاط تنها هستند. از آنجایی که برای هر α، x موجود است که $\hat{f}^s_\alpha(x) \not\equiv x + r$، پس $k^+_{\frac{r}{s}}$ و $k^-_{\frac{r}{s}}$ با یکدیگر یکی نیستند. در نتیجه $k_{\frac{r}{s}}$ یک بازه نابدیهی است و بدین ترتیب حکم ثابت می‌شود. □

اگر $\alpha \in k_{\frac{r}{s}}$ ، آنگاه f_α نقاط تناوبی با تناوب s دارد. همچنین اگر $\alpha \in k^+_{\frac{r}{s}}, k^-_{\frac{r}{s}}$ ، آنگاه هر یک از این نقاط تناوبی از یک سمت جاذب و از سمت دیگر دافع هستند. اگر α یک نقطه درونی $k_{\frac{r}{s}}$ باشد، آنگاه حداقل یکی از نقاط تناوبی f_α از هر دو سمت جاذب است.

می‌توان نتیجه‌ای مشابه لم ۲ برای هر خانواده از وابرسانی‌های روی دایره که عدد چرخشی این خانواده غیر ثابت است بدست آورد. به عبارت دقیق‌تر، اگر $\mu \in \mathbb{R}^k$ و $\{f_\mu\}$ خانواده‌ای از وابرسانی‌های روی دایره باشد، آنگاه برای هر α_0 گویا، مجموعه‌ی $\{\mu \mid \tau(f_\mu) = \alpha_0\}$ مجموعه‌ای است که درون ناتهی دارد. همچنین این مجموعه در فضای پارامتری با تصویر دو تابع پیوسته محدود می‌شود. هر یک از این دو تابع پیوسته مربوط به مقادیری از پارامتر است که عدد چرخشی وابرسانی متناظر با آن مقادیر برابر

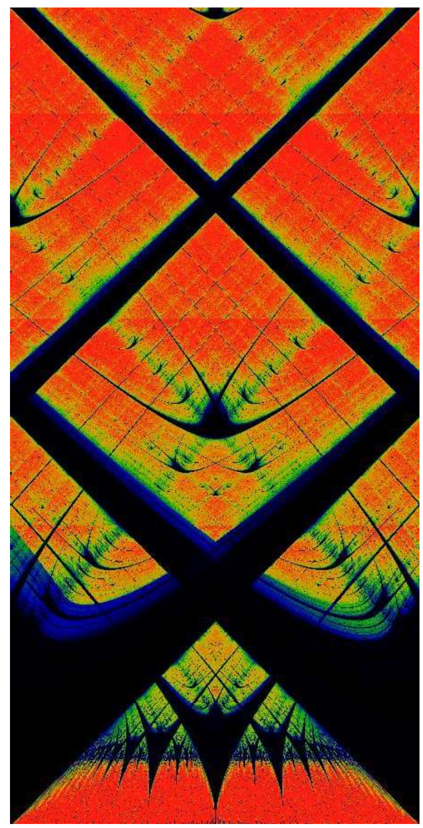
[5]Zorn's Lemma

با یک عدد گنگ ثابت می‌باشد. به ناحیه‌ای در فضای پارامترها که در آن، تابع، عدد چرخشی ثابت گویایی دارد، زبانه‌ی آرنولد گفته می‌شود. فضای همه وابرسانی‌های روی دایره در فضای همه همسان‌ریختی‌های جهت‌نگه‌دار روی دایره چگال است. بنابراین، آنچه که در این بخش گفتیم را می‌توان در مورد توابع پیوسته‌ای که درجه‌ی براور [۶] آن‌ها یک می‌باشد [۷] هم گفت.

مثال ۱. نگاشت دایره به صورت [۸]

$$f_{\omega,K}(\theta)=\theta+\Omega-\frac{K}{2\pi}sin(2\pi\theta)$$

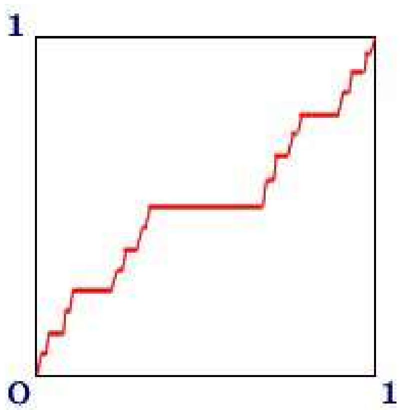
را در نظر بگیرید که در آن Ω و K .پارامتر هستند.



شکل ۱: زبانه‌های آرنولد. در این شکل مناطق سیاه‌رنگ متناظر با مقادیری از پارامترهای Ω و K است که برای آنها عددچرخشی نگاشت $f_{\Omega,K}$ یک عدد گویا است. محور افقی در این شکل محور مربوط به Ω است که از ۰ تا ۱ تغییر می‌کند. محور عمودی نیز مربوط به K است که از ۰ تا 4π تغییر می‌کند. همچنین در این شکل دیده می‌شود که هر یک از این مناطق توسط منحنی دو تابع پیوسته در فضای پارامتری محدود می‌شود. همانطور که در این بخش گفته شد، هر یک از این دو منحنی متناظر با مقایری از پارامتر است که به ازای آن‌ها عدد چرخشی نگاشت یک عدد گنگ ثابت است.

مناطق سیاه‌رنگ در شکل ۱ زبانه‌های آرنولد در فضای پارامتری دو بعدی $\Omega - K$ را نشان می‌دهد. هر منطقه‌ی سیاه‌رنگ در شکل، متناظر با مقادیری از پارامترهای Ω و K است که برای آنها عددچرخشی نگاشت $f_{\omega,K}$ یک عدد گویای ثابت است. همچنین در این شکل دیده می‌شود که هر یک از این مناطق توسط دو منحنی از توابع پیوسته محدود می‌شود. همانطور که در این بخش گفته شد، هر یک از این دو منحنی متناظر با مقایری از پارامتر است که به ازای آن‌ها عدد چرخشی نگاشت یک عدد گنگ ثابت است.

همچنین اگر قرار دهیم $K = 1$، آنگاه منحنی تغییرات عدد چرخشی برحسب Ω به صورت شکل ۲ است که به آن پلکان شیطان[۹] می‌گویند. شکل ۲ پلکان شیطان را در این حالت نشان می‌دهد.



شکل ۲: پلکان شیطان. وقتی $k = 1$ محور افقی متناظر با Ω و محور عمودی متناظر با عدد چرخشی است.

[۶] Brouwer Degree

[۷] می‌توان دید که درجه‌ی براور همسان‌ریختی‌های جهت‌نگه‌دار برابر با یک است.همچنین خانواده‌ی همسان‌ریختی‌های جهت‌نگه‌دار، یک مولفه‌ی همبندی فضای توابع پیوسته روی دایره را تشکیل می‌دهند.

[۸] Standard Circle Map

[۹] Devil’s Staircase

References

[1] Bansal, N. “Algorithmic Aspects of Combinatorial Discrepancy”. In: *A Panorama of discrepancy Theory*. Springer, 2014. Chap. 6, 425–457.

[2] Henri Poincaré. “Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (II)”. In: *Journal de mathématiques pures et appliquées* (1882), pp. 251–296.

[3] Arnaud Denjoy. “Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore”. In: *Journal de mathématiques pures et appliquées* 11 (1932), pp. 333–376.

[4] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Vol. 54. Cambridge university press, 1997.

[5] David Chillingworth. *DYNAMICAL SYSTEMS: STABILITY, SYMBOLIC DYNAMICS AND CHAOS*. 1998.

[6] Christian Kuehn. *An introduction to rotation theory*. 2007.

[7] Welington De Melo and Sebastian Van Strien. *One-dimensional dynamics*. Vol. 25. Springer Science & Business Media, 2012.