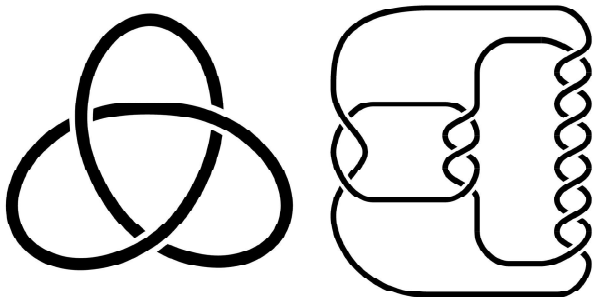


همولوژی فلور گره و کاربردهایی در توپولوژی بعد پایین

سامان حبیبی اصفهانی

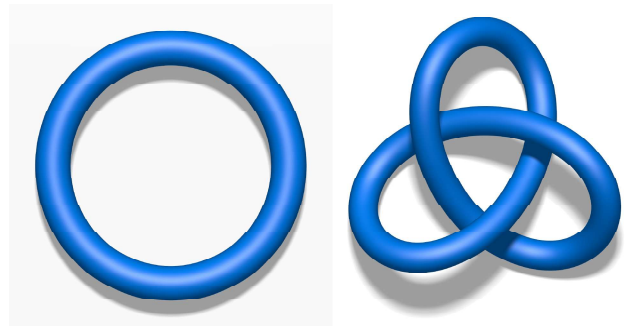
۱ نظریه گره‌ها

$H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ موجود باشد که $H_t = H|_{\mathbb{R}^3 \times \{t\}}$ برای هر $t \in [0, 1]$ یک دیفیومورفیسم باشد، $H_0 = id_{\mathbb{R}^3}$ ، $H_1(L) = L$ ، $H \setminus (L \times \{0, 1\})$ ابتدا برای ساده‌تر شدن مطالعه لینک‌ها، به جای مطالعه آن‌ها در فضای سه بعدی، به تصویر آن‌ها روی یک صفحه نگاه می‌کنیم. فرض کنید L لینکی در \mathbb{R}^3 و P در \mathbb{R}^3 افکنش به روی یک صفحه جهت‌دار $P \subset \mathbb{R}^3$ باشد. برای یک انتخاب عمومی P ، pr_P به لینک L یک غوطه‌ورسازی با متناهی نقطه مضاعف است. در یک نقطه مضاعف، قسمتی از لینک را که از زیر تکه دیگر رد می‌شود را با یک خم بریده شده نشان می‌دهیم. به تصویر بدست آمده روی صفحه P ، دیاگرام لینک می‌گوییم. تصویر چند دیاگرام را در ۲ می‌بینیم.



تصویر ۲. دیاگرام تریفویل (سمت چپ)، دیاگرام (سمت راست). از مطالعه گره‌های ساده شروع می‌کنیم. گره K را بدیهی می‌نامیم اگر با دایره اقلیدسی (در \mathbb{R}^3) ایزوتوپیک باشد (در واقع گره نخورده باشد).

به تصویر ۱ نگاه کنید. آن‌ها را لینک می‌نامیم. تصور کنید لینک‌هایمان از ماده‌ای بسیار منعطف درست شده‌اند که کاملاً قابلیت کشیده شدن و فشرده شدن را دارد و پاره نیز نمی‌شوند. آیا می‌توان لینک‌های نشان داده شده را با کشیدن و فشردن به هم تبدیل کرد؟



تصویر ۱. گره بدیهی (سمت چپ)، گره سه پر (سمت راست). اگر راهی برای تبدیل‌شان نیابیم چطور می‌توانیم مطمئن باشیم به هم تبدیل نمی‌شوند؟ نظریه گره‌ها و لینک‌ها به مطالعه این اشیا می‌پردازد. در واقع یک لینک L -مولفه‌ای L در \mathbb{R}^3 اجتماع L خم ساده بسته مجزاست که به طور هموار در \mathbb{R}^3 نشسته‌اند. به یک لینک همبند، گره می‌گوییم. می‌خواهیم لینک‌هایی را که به هم تبدیل می‌شوند را با هم معادل بگیریم. لینک‌های L_1 و L_2 را معادل می‌گوییم اگر با هم ایزوتوپیک محیطی باشند. یعنی نگاشت هموار d قت کنید در تصویر ۱ برای بهتر دیده شدن لینک‌ها در واقع یک همسایگی از لینک‌ها در فضای ۳ بعدی ترسیم شده است.

یک گره (یا فضای برداری)، به صورت ناوردا، نسبت دهیم و سپس به کمک این ساختار ساده‌تر در مورد یکی بودن یا نبودن دو لینک قضاوت کنیم.

گاهی این ساختارها ساختارهایی ساده‌اند، مثلاً می‌توان به هر گره یک عدد نسبت داد که به نوعی پیچیدگی آن گره را بیان می‌کند (شبه روشی که برای رده‌بندی رویه‌های همبند و فشرده استفاده می‌شود) اما در مورد گره‌ها ناوردهای عددی به اندازه کافی گره‌ها را از هم تمییز نمی‌دهند. می‌توان از ساختارهای پیچیده‌تری استفاده کرد تا بتوان گره‌های بیشتری را از هم تمییز داد. اما آنگاه پیچیدگی‌های خود ساختار باعث سختی مطالعه خواهند شد. برای نمونه گره بنیادی فضای مکمل گره ناوردای قدرتمندی در مطالعه گره‌هاست اما تصور کنید این گره را برای دو گره حساب کرده‌اید. حال خود این سوال که آیا گره‌های بدست آمده یکی‌اند یا نه، سوال مشکلی محسوب می‌شود.

در این نوشته در گام اول سه ناوردای عددی در نظریه گره‌ها، یعنی عدد باز شدن گره، گونای سافرت گره^۲ و گونای چهار بعدی گره را معرفی خواهیم کرد. سپس به سراغ ناوردهای چندجمله‌ای در نظریه گره‌ها می‌رویم و در انتها نیز یک ناوردای همولوژیک در نظریه گره‌ها معرفی می‌کنیم. این ناوردها نه تنها در تمییز دادن گره‌های مختلف از هم کاربرد دارند بلکه اطلاعات توپولوژیکی از گره‌ها و فضای مکمل‌شان نیز در خود ذخیره می‌کنند.

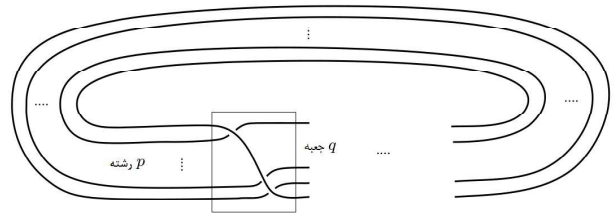
۲ ناوردهای عددی در نظریه گره‌ها

یک دیاگرام برای لینک L در نظر بگیرید. یک تقاطع خاص از این دیاگرام را انتخاب کنید. تصور کنید می‌توانید در این تقاطع رشته‌های گره را از هم عبور داده، شکل ۴، به دیاگرام جدیدی برسید که خارج از دیسک نمایش داده شده با دیاگرام قبلی یکی است و درون دیسک تقاطع آن تغییر یافته، از روگذر به زیرگذر یا برعکس.

گره چنبره‌ای. اگر دو عدد صحیح $p, q > 1$ نسبت به هم اول باشند، گره چنبره‌ای $T_{p,q}$ به صورت مجموعه نقاط زیر تعریف می‌شود،

$$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = 1, z_1^p + z_2^q = 0\} \subset S^3. \quad (1)$$

این گره را می‌توان روی یک چنبره استاندارد گره نخورده رسم کرد بطوریکه طول جغرافیایی را q بار و عرض جغرافیایی را p بار قطع می‌کند. یک دیاگرام برای گره چنبره‌ای $T_{p,q}$ را در تصویر ۳ می‌بینید.



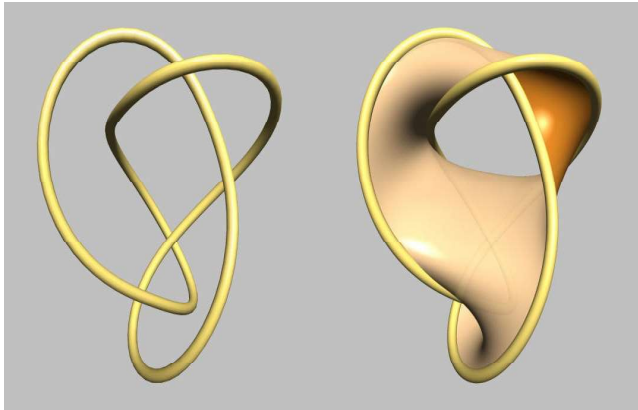
تصویر ۳. گره چنبره‌ای $T_{p,q}$.

$T_{2,3}$ را گره سه پر می‌نامیم، دیاگرامی برای تریفویل را در سمت چپ تصویر ۲ مشاهده می‌کنید. بعلاوه $T_{p,q}$ گره بدیهی است اگر و فقط اگر $p = \pm 1$ یا $q = \pm 1$.

یکی از اهداف عمومی ریاضی، طبقه‌بندی و شناخت ساختارهای مختلف هندسی و جبری است. در توپولوژی گاهی این طبقه‌بندی برای خمینه‌ها ذاتی (در حد هومئومورفیسم در کتگوری خمینه‌های توپولوژیک، هومئومورفیسم قطعه قطعه خطی در کتگوری خمینه‌های قطعه قطعه خطی و دیفیومورفیسم در کتگوری خمینه‌های هموار) است. گاهی نیز به مطالعه زیرخمینه‌های یک خمینه پرداخته و آن‌ها را در حد ایزوتوپی‌های محیطی بررسی می‌کنیم. بنابراین در هر حالت مفهومی از معادل بودن داریم که نتیجه آن تشکیل کلاس‌های هم‌ارزی از این اشیا خواهد بود. به ویژگی‌هایی علاقه‌مندیم که روی هر کلاس مقدار ثابتی اختیار می‌کنند.

وقتی با اشیا پیچیده از جمله لینک‌ها روبه‌رو هستیم تکنیک‌مان برای مطالعه‌شان معمولاً این است که آن‌ها را در فضاهای ساده‌تری کد کنیم. مثلاً به هر لینک یک عدد یا یک ساختار جبری (مثل

^۲Seifert Genus of Knot



تصویر ۵. یک رویه سایفرت برای گره .

گونای سایفرت گره K ، که آن را با $g(L)$ نشان می‌دهیم را برابر با کمینه گونای همه رویه‌های سایفرت گره K تعریف می‌کنیم. از صورت تعریف واضح است که گونای سایفرت، ناوردای گره است.

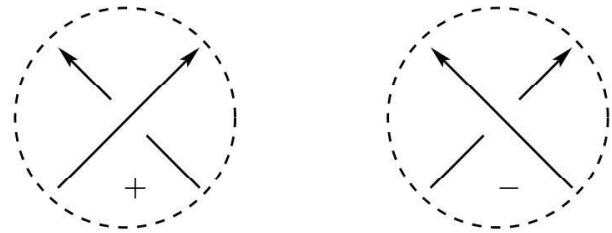
مشابه با آنچه در مورد عدد باز شدن گره دیدیم، سختی محاسبه گونای سایفرت در این است که نشان دهیم برای گره داده شده K هیچ رویه‌ای سایفرتی با گونای کمتر وجود ندارد. گره بدیهی تنها گره با گونای صفر است.

قضیه ۲. گونای سایفرت گره چنبره‌ای $T_{p,q}$ که $(p, q) = 1$ برابر است با $g(T_{p,q}) = \frac{(p-1)(q-1)}{4}$

یافتن رویه‌ای با گونای $\frac{(p-1)(q-1)}{4}$ چندان مشکل نیست (تمرین). به کمک مطالعه چندجمله‌ای الکساندر گره‌های چنبره‌ای نشان خواهیم داد این کمینه گونای ممکن برای این گره‌هاست.

یک ناوردای دیگر برای مطالعه گره‌ها گونای چهاربعدی گره است. فرض کنید گره K در \mathbb{R}^3 نشسته باشد. با افزودن یک نقطه در بی‌نهایت \mathbb{R}^3 به S^3 تبدیل شده و گره در S^3 می‌نشیند. گونای چهار بعدی گره K که آن را با $g_4(K)$ نمایش می‌دهیم اینگونه تعریف می‌شود:

رویه همبند، فشرده، جهت‌پذیر و هموار F که به صورت $(F, \partial F) \subset (D^4, \partial D^4 = S^3)$ در D^4 نشسته است و مرز آن برابر

تصویر ۴. L_+ (سمت چپ)، L_- (سمت راست).

برای هر گره K با تعداد منتهای تغییر تقاطع، می‌توان به گره بدیهی رسید. کمترین تعداد مورد نیاز برای رسیدن به گره بدیهی را، عدد باز شدن گره K می‌نامیم و آن را با $u(K)$ نمایش می‌دهیم. سختی محاسبه $u(K)$ در این است که نمی‌دانیم چه دیاگرامی از گره K است که مقدار کمینه این کمیت را بدست می‌دهد.

قضیه ۱ (صورت ضعیف حدس میلنور^۳). عدد باز شدن گره چنبره‌ای $T_{p,q}$ که $(p, q) = 1$ برابر است با $u(T_{p,q}) = \frac{(p-1)(q-1)}{4}$.

نسبتاً ساده است که نشان دهیم گره چنبره‌ای را می‌توان با $\frac{(p-1)(q-1)}{4}$ تغییر تقاطع به گره بدیهی تبدیل کرد (تمرین). اما اینکه اثبات کنیم هیچ روشی برای باز کردن گره چنبره‌ای با تعداد کمتری تغییر تقاطع وجود ندارد مساله چالش برانگیز است. این حدس میلنور (سال ۱۹۶۸) نخستین بار توسط کرونهاایمر^۴ و مروکا^۵ (سال ۱۹۹۲) به کمک ابزارهای نظریه پیمانهای اثبات شد. طرحی از یک اثبات برای این حقیقت به کمک اطلاعات ذخیره شده در همولوژی شبکه‌ای ارائه خواهیم کرد.

گره‌ها و لینک‌ها را می‌توان به کمک رویه‌هایی که کران می‌کنند مطالعه کرد. برای هر گره K همواره رویه مرزدار، فشرده و هموار در \mathbb{R}^3 وجود دارد بطوریکه مرز آن همان K باشد. آن را یک رویه سایفرت برای گره K می‌نامیم، تصویر ۵. برای هر گره رویه‌های سایفرت مختلفی موجود است، با گوناوای مختلف.

^۳Milnor's Conjecture^۴Peter Kronheimer^۵Tomasz Mrowka

۳ چندجمله‌ای الکساندر

جیمز الکساندر^۶ در سال ۱۹۲۳ ناوردای قدرتمندی در نظریه گره‌ها یافت. وی توانست به هر لینک یک چندجمله‌ای لوران نسبت دهد که با اینکه قابل محاسبه از روی یک دیاگرام آن می‌باشد اما به دیاگرامی که لینک را نمایش می‌دهد وابسته نیست. شاید این اولین روش سیستماتیک در تمییز دادن لینک‌ها از یکدیگر بود. برای نمونه چندجمله‌ای الکساندر گره بدیهی ۱ است و چندجمله‌ای الکساندر تریفول $1 - t + t^{-1}$. در نتیجه این دو گره با هم ایزوتوپیک نیستند. هر چند با گذر زمان روش‌های الگوریتمی برای محاسبه چندجمله‌ای الکساندر بر حسب یک دیاگرام داده شده لینک بدست آمد، اما تعریف اولیه جیمز الکساندر ذاتی توپولوژیک داشت. در این‌جا ابتدا به طور مختصر تعریف کلاسیک آن را ارائه می‌دهیم. هر چند خواننده می‌تواند این بخش را رد کرده و تنها روش محاسبه این چندجمله‌ای را مشاهده کند.

فرض کنید L لینکی در S^3 باشد، یک همسایگی باریک آن را با $nd(L)$ نمایش می‌دهیم. $nd(L)$ اجتماع مجزایی از تعدادی چنبره توپر است. بستار مکمل یک همسایگی لینک L یعنی $X = \overline{S^3 - nd(L)}$ را بیرون لینک می‌نامیم. اگر F یک رویه سایفرت برای لینک L باشد، قسمتی از آن که در ناحیه بیرون لینک قرار می‌گیرد (بعد از بستار گیری) با خود F دیفیومورفیسم است. از همین جهت رویه اخیر را نیز با همان F نمایش می‌دهیم. یک همسایگی این رویه را در X در نظر بگیرید، $[-1, +1] \times F$ ، که خود F در لایه $\{0\} \times F$ قرار گرفته است. حال اصطلاحاً X را از روی F می‌بریم، یعنی ابتدا $X - F$ را در نظر گرفته سپس از آن بستار می‌گیریم. این کار شبیه به آن است که به جای F یک همسایگی باز F ، مثلاً $(-1, +1) \times F$ را از X کم کنیم، خمینه سه بعدی مرزدار فشرده بدست آمده را Y می‌نامیم.

در Y دونسخه مشابه F ، یعنی $\{+1\} \times F$ و $\{-1\} \times F$ وجود دارند. این‌ها مولفه‌های مرزی Y هستند. این رویه‌ها را F_+ و F_- نشان می‌دهیم. اجتماع مجزای بی‌نهایت شمارا نسخه Y را در نظر بگیرید. این نسخه‌ها را با اعداد صحیح اندیس‌گذاری کنید. برای

با گره K است، $\partial F = K$ ، را یک رویه برشی برای گره K می‌نامیم. برای هر گره رویه‌های برشی مختلفی وجود دارد.

عدد صحیح

$$(۲) \quad g_s(K) = \min\{g(F) \mid \text{است } K \text{ برای } F\}$$

را گونای چهار بعدی گره K می‌نامیم. گره K را برشی (یا برای تاکید به طور هموار برشی) می‌گوییم اگر $g_s(K) = 0$ ، یعنی دیسک هموار رویه برشی K است.

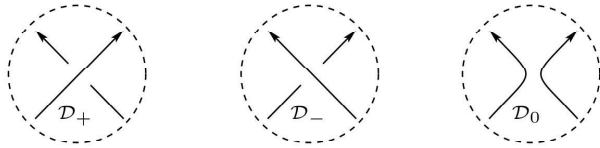
اگر شرط هموار بودن را ضعیف کنیم و همه رویه‌های توپولوژیک را در تعریف دخیل کنیم، دیسک توپولوژیک رویه برشی‌ای برای تمام گره‌ها خواهد بود و برای هر گره K گونای صفر بدست می‌آید. اما می‌توان شرط میانه‌ای برگزید. گره K را در حد توپولوژیک برشی می‌گوییم اگر دیسک توپولوژیک D در D^* موجود باشد که $D \cap S^3 = K$ و بعلاوه در هر نقطه دیسک D در D^* یک راستای D^2 عمود موجود باشد.

برای هر گره K در \mathbb{R}^3 با رویه سایفرت F ، بعد از افزودن یک نقطه در بی‌نهایت و انتقال K و F به S^3 ، می‌توان یک رویه برشی ساخت. S^3 مرز D^* است. کافی است درون رویه F (و نه مرز آن را) کمی به درون D^* (به صورت هموار) هل دهید تا به یک رویه برشی برای گره K برسید. پس $g_s(K) \leq g(K)$. از طرفی با هر بار تغییر تقاطع گونای چهار بعدی حداکثر یک واحد تغییر می‌کند در نتیجه $g_s(K) \leq u(K)$.

قضیه ۳ (صورت قوی حدس میلنور). گونای چهار بعدی گره چنبره‌ای $T_{p,q}$ که $(p, q) = 1$ برابر است با $\frac{(p-1)(q-1)}{4}$. $g_s(T_{p,q}) = \frac{(p-1)(q-1)}{4}$. برهان کرونهایمر و مروکا این گزاره را نیز اثبات می‌کند. ما نیز کلیت برهانی برای این قضیه به کمک همولوژی شبکه‌ای ارائه می‌دهیم.

یکی از موثرترین ابزارها در نظریه گره‌ها در تمییز لینک‌ها از یکدیگر و محاسبه کمیت‌های عددی‌شان، ناوردهای چندجمله‌ای هستند.

^۶James Alexander



تصویر ۶.

در واقع داشتن این رابطه به همراه این نکته که $\Delta_0(t) = 1$ برای محاسبه چندجمله‌ای الکساندر هر لینکی کافی است.

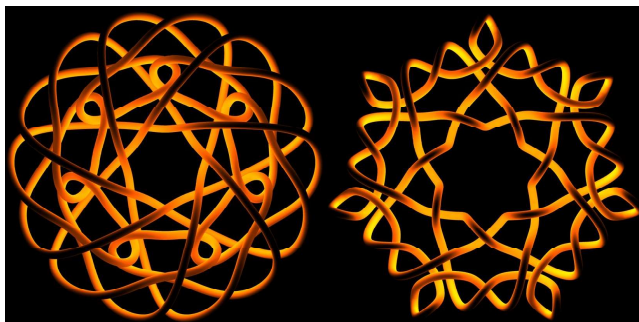
همانطور که گفتیم این چندجمله‌ای حاوی اطلاعات توپولوژیک درباره لینک و مکمل آن است.

قضیه ۴. اگر K گره‌ای در \mathbb{R}^3 با چندجمله‌ای الکساندر $\Delta_K(t)$ درجه $d(K)$ و گونای سایفرت $g(K)$ باشد آنگاه $g(K) \geq d(K)$.

در نتیجه به کمک محاسبه چندجمله‌ای الکساندر می‌توان کران پایینی برای گونای سایفرت گره ارائه کرد، هر چند می‌توان نشان داد می‌توان مقدار $d(K) - g(K)$ می‌تواند به هر اندازه دلخواه بزرگ شود.

قضیه ۴، قضیه ۲ را نتیجه می‌دهد چراکه چندجمله‌ای الکساندر گره چنبره‌ای $T_{p,q}$ برابر است با $\Delta_{T_{p,q}} = t^k \frac{(t^{pq}-1)(t-1)}{(t^p-1)(t^q-1)}$. در نتیجه $g(T_{p,q}) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$.

در ادامه ابزار قدرتمندتری برای مطالعه گره‌ها معرفی می‌کنیم. تمرین. با ابزارهایی که تا به این‌جا معرفی شد گره‌های زیر را بررسی کنید.



تصویر ۷.

هر i صحیح، مرز F_+ از نسخه‌ای از Y که اندیس i دارد را به مرز F_- از نسخه‌ای از Y که اندیس $i+1$ دارد می‌چسبانیم. از آنجایی که این دو مولفه مرزی هر دو یک کپی از F هستند یک نگاشت طبیعی میان‌شان موجود است. چسباندن را به کمک همین نگاشت انجام می‌دهیم. بعد از انجام این (بی‌نهایت) عمل یک خمینه سه بعدی همبند فشرده بدون مرز خواهیم داشت. این خمینه را با X_∞ نمایش می‌دهیم. یک خود-هومومرفیسم نسبتاً طبیعی روی این خمینه بسته سه بعدی موجود است، $t: X_\infty \rightarrow X_\infty$ ، هر نقطه x از X_∞ یک اندیس را مشخص می‌کند و آن هم‌اندیس نسخه Y ای است که پیش از عمل چسباندن، در آن Y زندگی می‌کرده است. مگر نقاطی که روی مرز Y بوده‌اند، این نقاط دواندیس متوالی را مشخص می‌کنند. معادل همین نقطه در خمینه بانندیس یکی بیشتر را در نظر بگیرید (در مورد نقاط مرزی نیز همین کار را انجام دهید)، آن را با y نشان می‌دهیم. قرار می‌دهیم $t(x) = y$. همولوژی اول X_∞ با ضرایب صحیح، $H_1(X_\infty; \mathbb{Z})$ ، را در نظر بگیرید. نگاشت t یک نگاشت در سطح همولوژی القا می‌کند، یا معادلاً این نگاشت القایی روی گروه همولوژی عمل می‌کند. بعلاوه \mathbb{Z} نیز روی هر گروه آبدلی عمل می‌کند. در نتیجه $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ (چندجمله‌های لوران با ضرایب صحیح) روی گروه همولوژی عمل می‌کند. پس $H_1(X_\infty; \mathbb{Z})$ یک $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ -مدول است. یک ماتریس نمایش این مدول را در نظر بگیرید. دترمینان این ماتریس در حد یک ضریب $\pm t^{\pm n}$ ، برای یک عدد طبیعی n ، ناوردای لینک است، یعنی به رویه سایفرت انتخاب شده، یا نمایش انتخاب شده برای مدول بستگی ندارد. می‌توان با ضرب در توان مناسبی از t (با علامت مثبت یا منفی) این چندجمله‌ای را نرمال کرد (بطوریکه هم متقارن باشد و هم مقدار آن در ۱ برابر با ۱ شود). چندجمله‌ای بدست آمده را چندجمله‌ای الکساندر متقارن می‌گوییم. چندجمله‌ای الکساندر لینک L را با $\Delta_L(t)$ نمایش می‌دهیم.

جان کانوی نشان داد چندجمله‌ای الکساندر متقارن در رابطه $\Delta_{L_+}(t) - \Delta_{L_-}(t) = (t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})\Delta_L(t)$ صدق می‌کند، که L_+ ، L_- و L_0 لینک‌هایی هستند که دیاگرام‌شان، D_+ ، D_- و D_0 ، خارج یک دیسک مشابه هم و داخل دیسک آن‌چنان است که در تصویر ۶ نشان داده شده.

۴ همولوژی فلور گره

همولوژی شبکه‌ای، چندجمله‌ای به نام چندجمله‌ای پوانکاره نسبت می‌دهیم که بعد فضاهای برداری را در خود ذخیره می‌کند.

$$P_K(q, t) = \sum_{d, s \in \mathbb{Z}} \dim_{\mathbb{F}} \widehat{GH}_d(K, s) \cdot t^s q^d.$$

این چندجمله‌ای تمام اطلاعات موجود در همولوژی شبکه‌ای را در خود دارد. همانطور که دانستن بعد یک فضای برداری روی یک میدان \mathbb{F} در حد یکرختی آن فضا را مشخص می‌کند، این جا نیز دانستن بعد تک‌تک فضاهای برداری (یا به طور معادل دانستن چندجمله‌ای پوانکاره) در حد یکرختی همولوژی شبکه‌ای را مشخص می‌کند. حال اگر از بخشی از اطلاعات این چندجمله‌ای دو متغیره صرف نظر کنیم و قرار دهیم $-1 = q$ ، به یک چندجمله‌ای یک متغیره می‌رسیم که آن را مشخصه اوایلر مدرج همولوژی شبکه‌ای می‌نامیم،

$$\chi(\widehat{GH}(L)) = P_K(-1, t) = \sum_{d, s \in \mathbb{Z}} (-1)^d \dim_{\mathbb{F}} \widehat{GH}_d(L, s) \cdot t^s \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]. \quad (۳)$$

حال نکته جالب این است که این چندجمله‌ای (مشخصه اوایلر مدرج) برابر است با چندجمله‌ای الکساندر متقارن لینک. این نشان می‌دهد که همولوژی شبکه‌ای حداقل به اندازه چندجمله‌ای الکساندر در خود اطلاعات دارد. در حقیقت اطلاعات بسیار بیشتری در همولوژی شبکه‌ای موجود است.

۱.۴ کاربردهای همولوژی شبکه‌ای

همولوژی شبکه‌ای ابزار مناسبی برای مطالعه ناوردهای عددی گره، از جمله گونای سایفرت و گونای چهار بعدی آن است. همانطور که گفتیم اطلاعات زیادی در مورد گره در همولوژی شبکه‌ای ذخیره می‌شود اما گاهی تفسیر این اطلاعات خود کار مشکلی است.

^۷Heegaard Floer Homology

^۸Peter Ozsváth

^۹Zoltan Szabo

^{۱۰}Jacob Rasmussen

^{۱۱}Sucharit Sarkar

^{۱۲}Ciprian Manolescu

همولوژی هیگارد فلور^۷، که نخستین بار توسط پیتر اوجوات^۸ و سلطان سابو^۹ معرفی شد، ناوردایی برای مطالعه خمینه‌های ۳ بعدی بسته و جهت‌پذیر است که به کمک منتقل کردن تکنیک‌های هندسه هممتافته به نمودارهای هیگارد تعریف شد. جیکوب راسموسن^{۱۰} و به طور مستقل اجوات و سابو نسخه‌ای از این ناوردا را برای لینک‌های درون خمینه‌های سه بعدی ارائه دادند، این ناوردا که همولوژی فلور گره نامیده می‌شود به هر لینک (که در گروه بنیادی بدیهی است) درون یک خمینه سه بعدی تعدادی گروه همولوژی نسبت می‌دهد که این گروه‌ها ناوردای این لینک هستند.

مدتی بعد سوچاریت سارکار^{۱۱} و سپس چیپریان مانولسکیو^{۱۲} راه‌هایی یافتند تا این ناوردا را برای لینک‌های درون \mathbb{R}^2 (یا S^2) به صورت ترکیباتی تعریف و محاسبه کنند. به این نسخه ترکیباتی، همولوژی شبکه‌ای گفته می‌شود هر چند که با نسخه اصلی همولوژی فلور گره یکرخت است.

ساده‌ترین نسخه همولوژی شبکه‌ای برای لینک L در S^3 ، یعنی $\widehat{GH}(L)$ ، یک فضای برداری متناهی بعد روی میدان $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ است که به یک مدرج‌سازی دوگانه مجهز شده است یعنی $\widehat{GH}(L) = \bigoplus_{d, s \in \mathbb{Z}} \widehat{GH}_d(L, s)$. همولوژی شبکه‌ای $\widehat{GH}(L)$ همولوژی همبافتی مجهز به مدرج‌سازی دوگانه است، $\widehat{GC}(\mathbb{G}, \hat{\partial})$ که $\widehat{GC}(\mathbb{G}) = \bigoplus_{d, s \in \mathbb{Z}} \widehat{GC}_d(\mathbb{G}, s)$ این همبافت از روی نوع خاصی از دیاگرام، به نام دیاگرام شبکه‌ای \mathbb{G} از لینک L قابل محاسبه است و

$$\hat{\partial} : \widehat{GC}_d(\mathbb{G}, s) \rightarrow \widehat{GC}_{d-1}(\mathbb{G}, s).$$

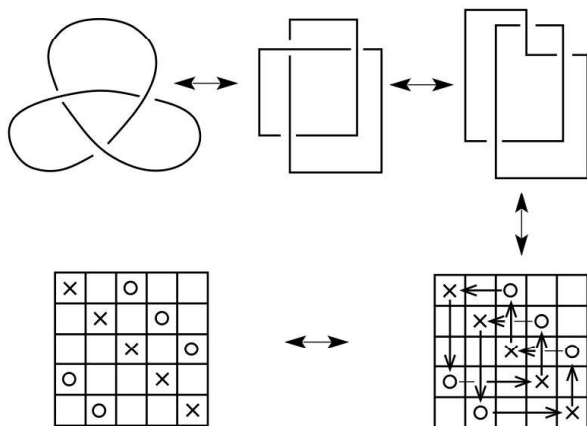
نکته جالب این است که می‌توان این ناوردای همولوژیک را تعمیمی از چندجمله‌ای الکساندر در نظر گرفت. به خانواده‌ای از فضاهای برداری با بعد متناهی که دارای مدرج‌سازی دوگانه‌اند، مثل

(۲- G) در هر ستون دقیقاً یک خانه علامت X دارد و دقیقاً یک خانه علامت O .

(۳- G) هیچ خانه‌ای دارای هر دو علامت X و O نیست. n را عدد شبکه‌ای \mathbb{G} می‌نامیم.

دیاگرام شبکه‌ای \mathbb{G} نمایش دهنده لینک L (با یک جهت روی آن) است که به این صورت ساخته می‌شود:

در هر ستون پاره‌خط جهت‌داری رسم کنید که خانه با علامت X را به خانه با علامت O وصل می‌کند. در هر سطر نیز پاره‌خط جهت‌داری رسم کنید که خانه با علامت O را به خانه با علامت X وصل می‌کند. قرارداد می‌کنیم که همواره خطوط عمودی از روی خطوط افقی رد شوند. در این وضعیت \mathbb{G} را یک دیاگرام شبکه‌ای برای لینک L گوئیم که به یک جهت نیز مجهز شده است، تصویر ۸. هر لینک جهت‌دار در \mathbb{R}^2 (یا S^2) را می‌توان توسط یک دیاگرام شبکه‌ای نمایش داد.



تصویر ۸. نحوه ساختن یک دیاگرام شبکه‌ای برای تریفویل.

به زودی در خواهیم یافت که نشان دادن دیاگرام شبکه‌ای مان روی چنبره مفید خواهد بود. اینکار را با یکی کردن مرز بالایی دیاگرام با مرز پایینی آن و مرز چپی دیاگرام با مرز راستی آن انجام می‌دهیم. چنبره بدست آمده جهت خود را از جهت صفحه به ارث می‌برد. این شی را دیاگرام شبکه‌ای چنبره‌ای می‌نامیم. خطوط عمودی و افقی دیاگرام مسطح روی چنبره تبدیل به دایره‌های عمودی و افقی می‌شوند (ما

برای نمونه دیدیم درجه چند جمله‌ای الکساندر متقارن کرانی پایین برای گونای گره است. یافتن این اطلاعات در گروه‌های همولوژی می‌تواند کار مشکلی باشد. خواهیم دید از همولوژی شبکه‌ای می‌توان یک ناوردای عددی، که آن را ناوردای τ می‌نامیم، بدست آورد. این ناوردا کران پایینی برای گونای چهار بعدی (و در نتیجه عدد باز شدن گره و گونای سایفرت گره) است. در نتیجه با محاسبه همولوژی شبکه‌ای گره، کران پایینی برای گونای چهار بعدی آن می‌یابیم. به کمک این روش می‌توان اثباتی برای حدس میلنور ارائه کرد. به کمک ناوردای τ همچنین اثباتی برای وجود ساختارهای نامتعارف روی \mathbb{R}^2 می‌دهیم.

کاربرد دیگر همولوژی شبکه‌ای تشخیص دقیق گونای سایفرت گره است. در واقع مقدار گونای گره K ، در $\widehat{GH}(K)$ ذخیره می‌شود. در نتیجه با محاسبه $\widehat{GH}(K)$ ، $g(K)$ هم محاسبه می‌گردد، هر چند این محاسبه NP-Complete است. یک نتیجه ساده این قضیه این است که همولوژی شبکه‌ای گره بدیهی را تشخیص می‌دهد. جالب است که هنوز اثباتی برای این قضیه، بر اساس تعریف ترکیب‌بندی همولوژی شبکه‌ای یافت نشده است.

قضیه ۵. اگر گره‌ای در S^3 باشد، گونای سایفرت گره K برابر است با بزرگ‌ترین اندیس s که $\widehat{GH}_*(K, s)$ ناصفر است.

در بخش بعدی توصیفی از ساختار همولوژی شبکه‌ای ارائه می‌دهیم.

۲.۴ ساختن همولوژی شبکه‌ای

برای تعریف همولوژی شبکه‌ای از نوع خاصی از دیاگرام لینک، به نام دیاگرام شبکه‌ای استفاده می‌کنیم.

تعریف ۶. یک دیاگرام شبکه‌ای مسطح \mathbb{G} یک جدول $n \times n$ است که روی صفحه قرار گرفته یعنی یک مربع با n سطر و n ستون. بعلاوه n تای این خانه‌ها با علامت X و n تای دیگرشان با علامت O پر شده‌اند. این علامت‌ها طوری قرار گرفته‌اند که:

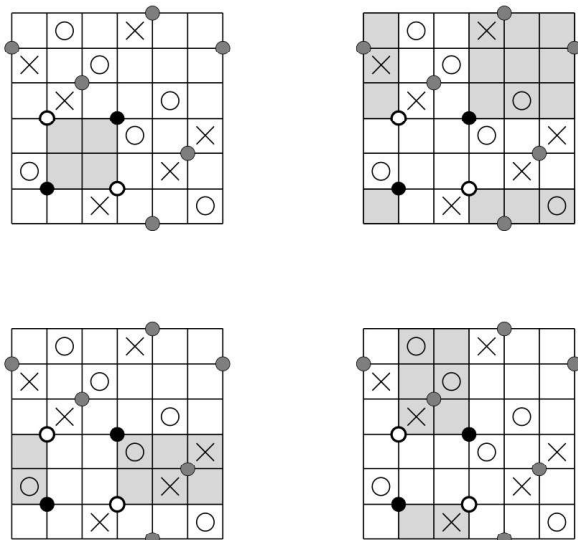
(۱- G) در هر سطر دقیقاً یک خانه علامت X دارد و دقیقاً یک

خانه علامت O .

نشسته روی چنبره که اضلاع آن روی دایره‌های افقی و عمودی قرار دارد را در نظر بگیرید به طوریکه مجموعه‌های x و y در $n - 2$ عضو روی چنبره اشتراک دارند و چهار نقطه باقی‌مانده، چهار گوشه مستطیل را تشکیل می‌دهند. بعلاوه جهت روی چنبره، جهتی روی مستطیل القا می‌کند و در نتیجه مرز مستطیل، یعنی اضلاع آن نیز جهتی خواهند داشت. گوییم مستطیل از x به y می‌رود اگر جهت اضلاع افقی مستطیل از عضوهای x به سوی عضوهای y باشند و اضلاع عمودی مستطیل از اعضای y به x ، تصویر ۱۰. اگر $x, y \in S(\mathbb{G})$ ، منظور از $Rect(x, y)$ مجموعه مستطیل‌های از x به y است. این مجموعه یا تهی است یا دو عضو دارد که در این صورت $Rect(y, x)$ هم دو عضو خواهد داشت. به مستطیل $r \in Rect(x, y)$ مستطیل تهی می‌گوییم اگر

$$x \cap \text{int}(r) = y \cap \text{int}(r) = \emptyset.$$

مجموعه مستطیل‌های تهی از x به y را با $Rect^\circ(x, y)$ نمایش می‌دهیم.

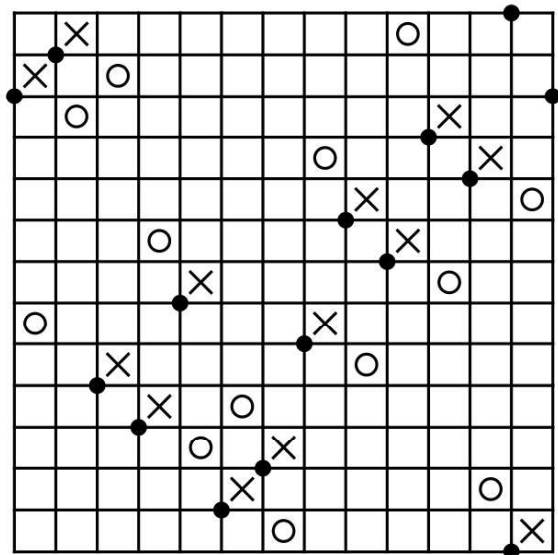


تصویر ۱۰. مستطیل‌های واسط میان دو حالت شبکه‌ای.

همبافت‌های شبکه‌ای مجهز به دو مدرج‌سازی هستند به نام‌های مدرج‌سازی ماسلوف و مدرج‌سازی الکساندر که هر دو توسط توابعی صحیح مقدار روی حالت‌های شبکه‌ای یک دیاگرام شبکه‌ای

آن‌ها را این چنین می‌نامیم). برای گره K یک دیاگرام شبکه‌ای چنبره‌ای با عدد شبکه‌ای n در نظر بگیرید، n پاره‌خط افقی دیاگرام شبکه‌ای که به n دایره روی چنبره می‌روند را با $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$ و n پاره‌خط عمودی که آن‌ها نیز به n دایره روی چنبره می‌روند را هم با $\beta = \{\beta_i\}_{i=1}^n$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۷. یک حالت شبکه‌ای برای دیاگرام شبکه‌ای چنبره‌ای \mathbb{G} با عدد شبکه‌ای n یک تناظر یک‌به‌یک میان دایره‌های افقی و دایره‌های عمودی آن است. در واقع یک حالت شبکه‌ای یک مجموعه n عضوی از نقاط $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ روی چنبره است، با این ویژگی که هر عضو x دقیقاً روی یک دایره افقی و یک دایره عمودی است، تصویر ۹. مجموعه حالت‌های شبکه‌ای دیاگرام \mathbb{G} را با $S(\mathbb{G})$ نمایش می‌دهیم.



تصویر ۹. نقاط سیاه عضوهای یک حالت شبکه‌ای را تشکیل می‌دهند.

همبافت نسبت داده شده به یک دیاگرام شبکه‌ای توسط حالت‌های شبکه‌ای تولید می‌شود و نگاشت مرزگیری این همبافت توسط شمارش مستطیل‌های واصل میان این حالت‌های شبکه‌ای تعریف می‌شود. مفهوم مستطیل میان دو حالت شبکه‌ای را این چنین تعریف می‌کنیم:

تعریف ۸. دو حالت شبکه‌ای $x, y \in S(\mathbb{G})$ همراه با مستطیلی

۳.۴ ناوردای τ و حدس میلنور

فرض کنید K_+ گره‌ای با یک تقاطع مشخص شده مثبت باشد و K_- همان گره که تقاطع مشخص شده آن به یک تقاطع منفی تغییر یافته است.

قضیه ۱۰. نگاشت‌های $\mathbb{F}[U]$ -مدول زیر موجوداند،

$$C_- : GH^-(K_+) \rightarrow GH^-(K_-) \quad (۵)$$

$$C_+ : GH^-(K_-) \rightarrow GH^-(K_+),$$

C_- یک نگاشت با مدرج‌سازی دوگانه (نگاشتی که درجه‌های ماسلوف و الکساندر را حفظ می‌کند) و C_+ یک نگاشت همگن از درجه $(-۲, -۱)$ است (درجه ماسلوف را ۲ واحد و درجه الکساندر را ۱ واحد کاهش می‌دهد) بطوریکه

$$C_- \circ C_+ = U \quad C_+ \circ C_- = U. \quad (۶)$$

تعریف دقیق این نگاشت‌ها را بیان نخواهیم کرد چرا که فرض وجودشان برای اثبات حدس میلنور کفایت می‌کند.

برای هر مدول M روی $\mathbb{F}[U]$ منظور از زیر مدول تابدار $Tors(M)$ از M ،

$$Tors(M) = \{m \in M \mid \exists p \in \mathbb{F}[U] \setminus \{0\}, p \cdot m = 0\}$$

است. قضیه اخیر نشان می‌دهد برای هر گره K ، $GH^-(K)/Tors(GH^-(K)) \cong \mathbb{F}[U]$ (تمرین). در نتیجه برای هر گره K عضوهای همگن غیر تابدار در $GH^-(K)$ وجود دارند. تعریف ۱۱ (ناوردای τ). برای هر گره K ، $\tau(K)$ را -۱ برابر بزرگ‌ترین عدد صحیح i تعریف می‌کنیم که برای این i ، عضو غیر تابدار همگنی با درجه الکساندر i در $GH^-(K)$ وجود دارد.

با توجه به قضیه ۱۰ می‌توان بررسی کرد با هر تغییر تقاطع ناوردای τ چقدر تغییر می‌کند.

قضیه ۱۲. اگر K_+ گره‌ای با یک تقاطع مشخص شده مثبت و K_- همان گره که تقاطع مشخص شده آن به تقاطع منفی تغییر یافته است، باشد؛ آن‌گاه $0 \leq \tau(K_+) - \tau(K_-) \leq ۱$. در نتیجه برای هر گره K ، $|\tau(K)| \leq u(K)$.

چنبره‌ای القا می‌شوند. در این‌جا وارد جزئیات تعریف این دو نگاشت صحیح مقدار نمی‌شویم.

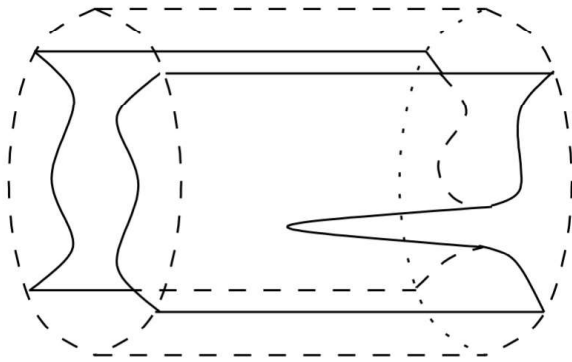
فرض کنید $R = \mathbb{F}[V_1, \dots, V_n]$ و $\mathbb{O} = \{O_i\}_{i=1}^n$ ، یک تناظر یک‌به‌یک میان نشان‌های O و مولدهای V_i از جبر چندجمله‌ای‌های R موجود می‌باشد. به بیان غیر رسمی همبافت شبکه‌ای GC^- یک R -مدول، تولید شده توسط حالت‌های شبکه‌ای است، مجهز به نگاشت مرزگیری $\partial_{\mathbb{X}}^-$ که مستطیل‌های تهی‌ای را می‌شمارد که می‌توانند شامل علامت O باشند ولی X نه. تکرر $O_i(r)$ برای مستطیل r در نقطه O_i را برابر با 0 یا 1 تعریف می‌کنیم به ترتیب اگر شامل O_i باشد یا نباشد. این تکرر توان متغیر فرمال V_i خواهد بود.

تعریف ۹. همبافت شبکه‌ای $GC^-(\mathbb{G})$ مدول آزاد تولید شده روی حلقه R توسط $S(\mathbb{G})$ ، مجهز به اندومورفیسم R -مدول‌هاست که مقدار آن روی هر $x \in S(\mathbb{G})$ توسط رابطه زیر داده شده است،

$$\partial_{\mathbb{X}}^-(x) = \sum_{y \in S(\mathbb{G})} \sum_{\{r \in \text{Rect}^\circ(x, y) \mid r \cap \mathbb{X} = \emptyset\}} V_1^{O_1(r)} \dots V_n^{O_n(r)} \cdot y. \quad (۴)$$

فرض کنید \mathbb{G} دیاگرام یک گره باشد. برای یک $i \in \{1, \dots, n\}$ ، همولوژی همبافت بالا روی حلقه $\mathbb{F}[U]$ برای $U = V_i$ یک ناوردای گره است، هرچند که این R -مدول‌های همولوژی به کمک یک دیاگرام شبکه‌ای گره محاسبه شده‌اند. در صورتی که L یک لینک l -مولفه‌ای باشد که O_{i_1}, \dots, O_{i_l} روی l مولفه مختلف آن قرار گرفته‌اند، ابتدا باید به همبافت خارج‌قسمتی $\frac{GC^-(\mathbb{G})}{V_{i_1} \dots V_{i_l}}$ برویم. همولوژی این همبافت روی حلقه $\mathbb{F}[U]$ برای $U = V_i$ ، $i \in \{1, \dots, n\}$ ، یک ناوردای لینک است.

اگر قرار دهیم $U = 0$ به فضاها برداری همولوژی \widehat{GH} می‌رسیم که در بخش پیش معرفی کردیم. آن‌ها ساختار ساده‌تری دارند (فضای برداری‌اند)، ساده‌تر محاسبه می‌شوند اما اطلاعات کمتری نیز دربردارند. برای نمونه برای محاسبه گونای ساینفرت گره کافی‌اند (قضیه ۵)، اما اثبات حدس میلنور به کمک نسخه مدولی همولوژی شبکه‌ای ممکن خواهد بود.



تصویر ۱۱. بخشی از یک کوپوردیسم میان دو گره.

۵ ساختارهای هندسی در ابعاد پایین^{۱۳}

در این بخش \mathbb{R}^4 را به عنوان یک فضای توپولوژیک با توپولوژی استاندارد اقلیدسی آن، به یک ساختار هموار نامتعارف مجهز می‌کنیم. منظور از یک ساختار هموار نامتعارف روی \mathbb{R}^4 ، ساختار همواری غیر از ساختار هموار استاندارد اقلیدسی آن است. در نتیجه خمینه‌ای خواهیم داشت که در حد توپولوژیک با \mathbb{R}^4 یکی است (هومئومورفیک است) اما دیفیومورفیک نیست.

این مساله که با چه شرایطی یک خمینه توپولوژیک M ، ساختاری غنی‌تر، یعنی قطعه‌قطعه خطی یا هموار می‌پذیرد، مساله چالش برانگیزی است. بر حسب بعد M این مساله را در سه بخش بررسی می‌کنیم.

۱.۵ ساختارهای قطعه‌قطعه خطی و هموار روی

خمینه‌های با بعد $n = 3$

در دنیای خمینه‌های سه بعدی ساختارهای توپولوژیک، قطعه‌قطعه خطی و هموار تفاوتی با هم ندارند.

قضیه ۱۵ (مویز^{۱۴}). فرض کنید M یک خمینه توپولوژیک سه بعدی باشد. در اینصورت M دارای یک اطلس هموار (قطعه‌قطعه)

^{۱۳}بخش‌های ۱، ۵، ۲، ۵ و ۳، ۵ به نقل از کتاب داستان توپولوژی بعد پایین نوشته نوشته ایمان افتخاری می‌باشند.

^{۱۴}Edwin Moise

دیدیم گره‌های چنبره‌ای را می‌توان در $\frac{(p-1)(q-1)}{4}$ گام باز کرد. از طرفی ناوردای τ برای گره‌های شبکه‌ای دقیقا برابر است با $\frac{(p-1)(q-1)}{4}$ (برای محاسبه این ناوردا حتی لازم نیست همولوژی شبکه‌ای را به طور کامل محاسبه کنیم)، که صورت ضعیف حدس میلنور را نتیجه می‌دهد.

گزاره زیر صورت قوی حدس میلنور را اثبات می‌کند.

قضیه ۱۳. برای هر گره K در \mathbb{R}^3 (یا S^3)، $\tau(K) \leq g_s(K)$.

برای دیدن صحت این گزاره، بایستی به مطالعه تغییرات ناوردای τ هنگامی که توسط یک کوپوردیسم با گونای g از گره K_0 به گره K_1 می‌رویم پرداخت. منظور از یک کوپوردیسم میان دو گره K_1 و K_2 ، رویه‌ای فشرده، هموار و مرزدار مثل S در $S^3 \times [0, 1]$ است که $\partial S \subset \{0, 1\} \times S^3$ و $\partial S \cap (\{i\} \times S^3) = K_i$ برای $i \in \{0, 1\}$. هر گاه بتوان دو گره را توسط یک کوپوردیسم (مشابه آنچه توصیف شد) با گونای g به هم وصل کرد آنگاه $|\tau(K_0) - \tau(K_1)| \leq g$ برای دیدن این نامساوی باید کوپوردیسم موجود را به کوپوردیسم‌های مقدماتی شکست و تغییرات τ را تحت کوپوردیسم‌های مقدماتی مطالعه کرد. محاسبه دقیق این تغییرات و در نتیجه اثبات صورت قوی حدس میلنور نتیجه گزاره زیر است که از ارائه تعریف دقیق نگاشت‌های موجود در آن خودداری می‌کنیم. بعلاوه با اینکه حکم نهایی در مورد گره‌هاست، مسیر اثبات آن از مطالعه همولوژی شبکه‌ای لینک‌ها می‌گذرد.

قضیه ۱۴. اگر لینک L' توسط یک کوپوردیسم زینی، تصویر ۱۱، از لینک L بدست آمده باشد بطوریکه تعداد مولفه‌های L' یکی از تعداد مولفه‌های L بیشتر باشد، در این صورت نگاشت‌های $\mathbb{F}[U]$ -مدول زیر موجوداند،

$$\sigma : GH^-(L) \otimes W \rightarrow GH^-(L') \quad (V)$$

$$\mu : GH^-(L') \rightarrow GH^-(L) \otimes W,$$

که $W = \mathbb{F}_{(0,0)} \oplus \mathbb{F}_{(-1,-1)}$. بعلاوه نگاشت σ همگن و از مرتبه $(-1, 0)$ و نگاشت μ همگن و از مرتبه $(-1, -1)$ است و $\mu \circ \sigma$ هر دو برابرند با ضرب در U .

ماکسیمال است. به علاوه هر دو ساختار هموار (قطعه‌قطعه خطی) ماکسیمال M با هم معادل‌اند.

نتیجه قضیه مویز این است که برای هر خمینه توپولوژیک سه بعدی می‌توان ساختاری هموار (قطعه‌قطعه) در نظر گرفت. همانطور که خواهیم دید این قضیه در سایر ابعاد صحیح نیست.

۲.۵ ساختارهای قطعه‌قطعه خطی و هموار روی خمینه‌های با بعد $n < 4$

در ابعاد بزرگ‌تر از ۴، اولین قدم مهم را رابین کرامول کربی^{۱۵} و کارل سیبنمان^{۱۶} برداشتند. ناوردای کربی-سیبنمان^{۱۷} در واقع تنها مانع وجود ساختار قطعه‌قطعه خطی را برای دسته‌ای از خمینه‌ها مشخص می‌کند. یک خمینه بسته M دارای یک ساختار قطعه‌قطعه خطی است اگر و فقط اگر ناوردای کربی-سیبنمان در $H^4(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ صفر شود. برای بررسی یکتایی یا عدم یکتایی ساختار قطعه‌قطعه خطی آن‌ها کلاس مانع دیگری در $H^3(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ارائه کردند که باز هم برای خمینه‌های با بعد بزرگ‌تر از ۴ مانع کاملی است.

وجود ساختارهای قطعه‌قطعه خطی روی یک خمینه توپولوژیک M شرطی قوی‌تر از وجود یک مثلث‌بندی روی M است. به کمک ناوردای مطرح شده می‌توان خمینه‌های توپولوژیک بسته‌ای ارائه کرد که ساختار قطعه‌قطعه خطی نمی‌پذیرند اما اینکه آیا خمینه‌ای وجود دارد که نتوان روی آن یک مثلث‌بندی نیز ارائه کرد، سوال دیگری است.

حدس مثلث‌بندی بیان می‌کند که اگر M یک خمینه توپولوژیک بسته باشد آنگاه روی M یک مثلث‌بندی موجود است.

در سال ۲۰۱۶ چپیریان مانولسکیو به کمک نظریه زایبرگ-ویتن^{۱۸}

نشان داد این حدس صحیح نیست.

قضیه ۱۶ (مانولسکیو). برای هر عدد صحیح $4 < n$ خمینه توپولوژیک بسته n بعدی وجود دارد که هیچ مثلث‌بندی‌ای نمی‌پذیرد.

سوال مشابه دیگری در مورد وجود ساختار هموار روی یک خمینه قطعه‌قطعه خطی نیز مورد بررسی قرار گرفته و رویکرد ارائه کلاس‌های مانع در این مورد نیز، قبل از کارهای کربی و سیبنمان، توسط جیمز مانکرز^{۱۹} و موریس هرش^{۲۰} مطرح شده است. ژان سرف^{۲۱} براساس نظریه کلاس‌های مانع قضیه‌ای برای خمینه‌های با بعد حداقل ۷ اثبات کرد.

قضیه ۱۷. روی هر خمینه قطعه‌قطعه خطی M از بعد $n \leq 7$ یک ساختار هموار سازگار با ساختار قطعه‌قطعه خطی آن وجود دارد. اگر بعد اکیدا از ۷ بزرگ‌تر باشد این ساختار یکتاست.

یکتایی برای $n = 7$ صحیح نیست. جان میلنور^{۲۲} در سال ۱۹۵۶ نشان داد در این بعد اتفاق ویژه‌ای رخ می‌دهد.

قضیه ۱۸. روی کره S^7 دقیقاً ۲۸ ساختار هموار مختلف وجود دارد.

در سال ۱۹۶۳ میلنور و میشل کروایر^{۲۳} نشان دادند ساختارهای هموار مختلف روی S^n برای هر n مخالف ۴ به همراه جمع همبند، یک گروه متناهی و جابه‌جایی تشکیل می‌دهند، این گروه را با \mathcal{S}_n نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۹. برای همه اعداد صحیح و مثبت $4 \neq n$ ، یک گروه آبله متناهی است. برای ابعاد کمتر از ۱۹ این گروه توسط جدول ۱۲ مشخص می‌شود. در این جدول منظور از $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ ، \mathbb{F}_k و منظور از $\langle 1 \rangle$ گروه بدیهی است.

^{۱۵}Robion Kirby

^{۱۶}Carl Siebenmann

^{۱۷}Kirby-Siebenmann Invariant

^{۱۸}Seiberg-Witten Invariant

^{۱۹}James Munkres

^{۲۰}Morris Hirsch

^{۲۱}Jean Cerf

^{۲۲}John Milnor

^{۲۳}Michel Kervaire

روی این خمینه بی‌نهایت ساختار هموار متمایز وجود دارد. ساختن بی‌نهایت ساختار هموار متمایز روی یک خمینه توپولوژیک پدیده‌ای کاملاً خاص است که بعد ۴ را از سایر ابعاد متمایز می‌کند.

این حکم برای \mathbb{R}^4 نیز صحیح است. در واقع \mathbb{R}^n برای هر $n \neq 4$ ساختار هموار یکتا دارد. \mathbb{R}^4 ناشمارا ساختار هموار متمایز می‌پذیرد. بعلاوه این سوال، یعنی وجود ساختار همواری غیر از ساختار هموار استاندارد، در مورد S^4 باز است.

۴.۵ ساختن \mathbb{R}^4 های نامتعارف به کمک گره‌های غیر برشی در حد توپولوژیک برشی

در ادامه اثباتی برای وجود یک ساختار هموار نامتعارف روی \mathbb{R}^4 ارائه می‌دهیم. گزاره‌های زیر حقایق استاندارد در مطالعه خمینه‌های ۳ بعدی و ۴ بعدی هستند که ما نیز آن‌ها را فرض می‌کنیم و به اثبات‌شان نمی‌پردازیم.

- (مویز) هر خمینه ۳ بعدی توپولوژیک یک ساختار هموار یکتا (در حد دیفیومورفیسم) می‌پذیرد و هر همومورفیسم میان دو خمینه ۳ بعدی با یک دیفیومورفیسم میان‌شان ایزوتوپ است.
- (فریدمن) هر گره $K \subset S^3$ با $\Delta_K(t) = 1$ ، در حد توپولوژیک برشی است.
- (فریدمن و کوین) هر خمینه همبند و غیر فشرده ۴ بعدی توپولوژیک (احتمالاً مرزدار) ساختار هموار می‌پذیرد.

فرض کنید X_K یک خمینه مرزدار ۴ بعدی فشرده و هموار باشد که توسط چسباندن یک ۲-دسته ۴ بعدی به D^4 در راستای K با عدد قاب‌بندی صفر بدست آمده است. یعنی X_K با چسباندن D^4 به $D^2 \times D^2$ حاصل شده به طوریکه

$$nd(K) \cong S^1 \times D^2 \subset S^3 = \partial D^4$$

با $(\partial D^2) \times D^2 = S^1 \times D^2$ توسط قاب‌بندی سایفرت روی K یکی شده باشد.

\mathfrak{S}_n	n	\mathfrak{S}_n	n
\mathbb{F}_6	۱۰	$\langle 1 \rangle$	۱
\mathbb{F}_{992}	۱۱	$\langle 1 \rangle$	۲
$\langle 1 \rangle$	۱۲	$\langle 1 \rangle$	۳
\mathbb{F}_3	۱۳	??	۴
\mathbb{F}_2	۱۴	$\langle 1 \rangle$	۵
$\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_{8128}$	۱۵	$\langle 1 \rangle$	۶
\mathbb{F}_2	۱۶	\mathbb{F}_{28}	۷
$\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_8$	۱۷	\mathbb{F}_2	۸
$\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_8$	۱۸	$\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$	۹

تصویر ۱۲. ساختارهای هموار روی S^n .

همانطور که در جدول ۱۲ دیده می‌شود در بعد ۱۲ هم حدس پوانکاره^{۲۴} در کنگوری هموار صحیح است. در مورد $n = 61$ نیز چنین است. در واقع حدس میلنور بیان می‌کند گروه \mathfrak{S}_n برای $n \geq 6$ به جز ابعاد ۱۲ و ۶۱ نابدیهی است.

قضیه ۲۰. فرض کنید M خمینه‌ای قطعه‌قطعه خطی و بسته از بعد $n > 4$ باشد. در این صورت تعداد ساختارهای هموار مختلف M متناهی‌اند و برابراند با تعداد اعضای \mathfrak{S}_n .

روش‌هایی که برابر حل این مسائل به کار رفته است برای مطالعه خمینه‌های ۴ بعدی کارایی نداشته و ایده‌های کاملاً متفاوتی برای پرداختن به بعد ۴ لازم است.

۳.۵ ساختارهای هموار در بعد ۴

سایمون دونالدسون^{۲۵} با استفاده از معادلات یانگ-میلز^{۲۶} دو ساختار هموار متمایز روی $(\mathbb{C}P^2 \# (\mathbb{C}P^2))$ ، $X(1,9) = \mathbb{C}P^2 \# (\mathbb{C}P^2)$ که خمینه‌ای بسته و همبند ساده است ارائه کرد. پس از مدتی اثبات شد

^{۲۴}Poincare's Conjecture

^{۲۵}Simon Donaldson

^{۲۶}Yang-Mills Equations

آن K است. پس تصویر این دیسک تحت نشانند X_K در \mathbb{R}^4 یک دیسک برشی برای K می‌باشد.

قضیه ۲۱. فرض کنید $K \subset S^3$ گره‌ای است با چندجمله‌ای الکساندر $\Delta_K(t) = 1$ و $\tau(K) \neq 0$. خمینه R_K با \mathbb{R}^4 استاندارد اقلیدسی هومئومورفیک است ولی دیفیومورفیک نیست.

برهان. با توجه به قضیه فریدمن K در حد توپولوژیک برشی است پس خمینه R_K بعدی R_K هومئومورفیک با \mathbb{R}^4 موجود است که یک نسخه هموار از X_K دارد. از آنجایی که $\tau(K) \neq 0$ ، $g_s(K) \geq 0$ و در نتیجه گره K در حد هموار برشی نیست پس خمینه X_K به طور هموار در \mathbb{R}^4 نمی‌نشیند.

قضیه ۲۲. روی \mathbb{R}^4 یک ساختار نامتعارف موجود است.

برهان ۲۳. گره $W_-(T_{-2,2})$ که دیاگرام شبکه‌ای آن را در تصویر ۹ مشاهده می‌کنید، را در نظر بگیرید. چندجمله‌ای الکساندر این گره برابر با ۱ است. اثبات اینکه این گره برشی نیست با محاسبه $\tau(W_-(T_{-2,2})) \leq -1$ نشان داده می‌شود. که بر اساس قضیه فوق نشان از وجود یک ساختار ناهموار روی \mathbb{R}^4 دارد.

۶ منابعی برای مطالعه بیشتر

- داستان توپولوژی بعد پایین نوشته ایمان افتخاری
- برای مطالعه تاریخچه توپولوژی بعد پایین می‌توانید به این کتاب مراجعه کنید. این کتاب که شامل شش فصل است با مطالعه تاریخچه و سرآغاز نظریه گره‌ها شروع می‌شود. فصل دوم کتاب به مطالعه حدس پوانکاره در مورد خمینه‌های سه بعدی و حدس هندسی سازی ترستن^{۲۷} می‌پردازد. فصل سوم که به لحاظ تاریخی نیز ادامه فصل قبلی است داستان کارهای ریچی^{۲۸}، همیلتون^{۲۹} و پرلمان^{۳۰} را در مورد خمینه‌های سه بعدی بیان می‌کند. فصل چهارم کتاب در مورد تعمیم حدس پوانکاره به ابعاد

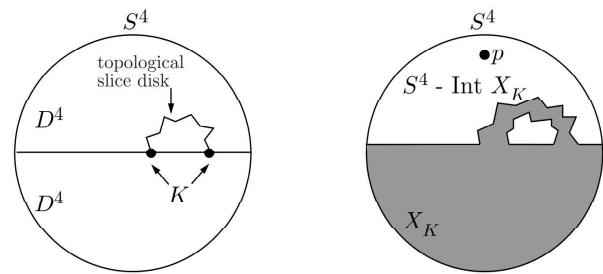
^{۲۷}William Thurston

^{۲۸}Gregorio Ricci-Curbastro

^{۲۹}Richard Hamilton

^{۳۰}Grigori Perelman

برای هر گره در حد توپولوژیک برشی $K \subset S^3$ ، یک خمینه $R = R_K$ بعدی R_K هومئومورفیک با \mathbb{R}^4 موجود است به طوری که X_K به طور هموار در آن می‌نشیند. چرا که می‌توان S^4 را به عنوان اجتماع دو D^4 در نظر گرفت که که یک همسایگی استوانه‌ای از گره برشی K از درون یکی درآمده و به D^4 دیگر چسبانده شده، تصویر ۱۳.



تصویر ۱۳. در آوردن یک دیسک برشی توپولوژیک از یکی از دو نسخه D^4 در S^4 .

خمینه بدست آمده با X_K هومئومورفیک است و به یک نشانند توپولوژیک درون $S^4 = S^4 \setminus \{p\}$ نیز مجهز شده است. با توجه به قضیه فریدمن و کوین می‌توان یک ساختار هموار برای $\mathbb{R}^4 \setminus \text{int}(X_K)$ در نظر گرفت. از طرفی بنابر قضیه مویس، یکسان‌سازی ∂X_K با $\partial(\mathbb{R}^4 \setminus \text{int}(X_K))$ را تحت ایزوتوبی می‌توان به یک دیفیومورفیسم تبدیل کرد. با چسباندن هموار به یک خمینه هموار R می‌رسیم که با \mathbb{R}^4 هومئومورفیک است و با توجه به ساختن آن X_K نیز به طور هموار درون R می‌نشیند.

از طرفی اگر برای $K \subset S^3$ ، X_K به طور هموار در \mathbb{R}^4 بنشیند آنگاه K به طور هموار برشی است.

برای دیدن صحت این ادعا فرض کنید $D_\epsilon \subset D^4$ گویی به شعاع ϵ حول مبدا باشد. برای هر نگاشت هموار $\phi : D^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ با مشتق ناصفر در مبدا، برای ϵ به اندازه کافی کوچک مکمل $\phi(D_\epsilon)$ با $\mathbb{R}^4 \setminus D^4$ دیفیومورفیک است.

برای هر ϵ ، یک نسخه از K در $D^4 \subset X_K$ وجود دارد که مرز و یک دیسک 2 بعدی هموار در $X_K \setminus \text{int}(D_\epsilon)$ وجود دارد که مرز

و ارتباطشان با خمینه‌های سه بعدی می‌توانید به این کتاب مراجعه کنید.

● *Holomorphic disks and topological invariants for closed three manifolds* by P. Ozsvath and Z. Szabo

● *Holomorphic disks and knot invariants* by P. Ozsvath and Z. Szabo

نوشته‌های بالا، به ترتیب، نسخه اصلی مطرح شده از همولوژی هیگارد فلور و همولوژی فلور گره اند، که در این نوشته از بیان تعریف آن‌ها خودداری کردیم.

● *Grid homology for knots and links* by P. Ozsvath and Z. Szabo

این کتاب درباره همولوژی شبکه‌ای و کاربردهای آن می‌باشد.

● *The geometry of four – manifolds* by Peter B. Kronheimer and S. Donaldson

برای مطالعه بیشتر در مورد مقدمات هندسه و توپولوژی خمینه‌های چهار بعدی می‌توانید به کتاب بالا مراجعه کنید.

بالتر به خصوص بعد چهار است. در این فصل مساله ساختارهای قطعه‌قطعه خطی و هموار روی خمینه‌های چهار بعدی مورد کنکاش قرار گرفته و ناوردهای زایبرگ-ویتن مطرح می‌شوند. موضوع فصل پنجم این کتاب نظریه فلور^{۳۱} و اثبات حدس آرنولد^{۳۲}، ناوردهای دونالدسون و نظریه توپولوژیک میدان‌های کوانتومی $TQFT$ ، همولوژی تقاطع‌های لاگرانژی فلور، همولوژی هیگارد فلور و معرفی برخی از کاربردهای توپولوژیک این ناوردهاست. در این فصل ارتباط‌هایی میان توپولوژی بعد پایین و فیزیک نظری نیز دیده می‌شود. فصل ششم کتاب باز به نظریه گره‌ها باز گشته تا نشان دهد ابزارهای جدید، که در فصل‌های قبل توسعه یافته‌اند تا چه حد در نظریه گره‌ها کارساز خواهند بود. در این فصل با همولوژی فلور گره و همینطور همولوژی خواناتوف نیز آشنا می‌شویم.

● *An introduction to knot theory* by R. Lickorish

برای آشنایی با نظریه گره‌ها، به خصوص ناوردهای چندجمله‌ای تعریف شده در این زمینه یعنی چندجمله‌ای جونز، چندجمله‌ای الکساندر و چندجمله‌ای $HOMFLY$

^{۳۱}Floer Theory

^{۳۲}Arnold's Conjecture