روش مستقیم در حساب تغییرات

دکتر محمد صفدری

۱ مقدمه

دو نقطه $A = (x_1, y_1)$ و $B = (x_2, y_2)$ را در یک صفحه قائم در فضا در نظر بگیرید. می‌خواهیم خمی بین این دو نقطه بیابیم به طوری که هرگاه ذره‌ای را که بدون اصطکاک و تنها تحت تاثیر گرانش حرکت می‌کند، و تنها می تواند روی خم حرکت کند، در A رها کنیم در کمترین زمان به B برسد. این مسئله به مسئله Brachistochrone (در لغت به معنای کمترین زمان) معروف است.

این مسئله اولین بار توسط گالیله در ۱۶۳۸ در نظر گرفته شد. اما وی نتوانست به طور کامل آن را حل کند. یوهان برنولی در ۱۶۹۶ مسئله را در مجله Acta Eruditorum مطرح کرد و ریاضیدانان را به تلاش برای حل آن دعوت کرد. در پاسخ به وی چند نفر از جمله لایبنیتز، لوپیتال و برادر بزرگترش ژاکوب برنولی راه حل‌هایی برای مسئله ارائه کردند.

نیوتن هم راه حلی برای این مسئله ارائه کرد ولی نامه‌اش را بدون نام فرستاد. برنولی در نقل مشهوری راجع به راه حل نیوتن گفته است که "شیر را از جای پنجه‌اش شناختم".

اگر بخواهیم این مسئله را با روش‌های جدید حل کنیم خواهیم داشت:

$$\Delta t = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{v}$$

در این جا t_1 زمانی است که ذره در A است و t_2 زمانی که ذره در B است. همچنین $v = \frac{ds}{dt}$ سرعت ذره است. هدف این است که زمان حرکت یعنی Δt کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. اگر y ارتفاع ذره باشد، به خاطر پایستگی انرژی در حرکت با شتاب گرانشی ثابت g داریم $v = \sqrt{2gy}$. فرض کنید خم مورد نظر به صورت $(x(y), y)$ داده شده باشد. آنگاه می‌دانیم که

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(\frac{dx}{dy})^2 + 1}\, dy$$

پس خواهیم داشت

$$\Delta t = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\frac{(dx/dy)^2 + 1}{2gy}}\, dy$$

بنابراین مسئله تبدیل شد به پیدا کردن تابع $x(y)$ که مقدار انتگرال بالا را به حداقل رساند و در شرایط مرزی $x(y_1) = x_1$ ، $x(y_2) = x_2$ صدق کند.

پیش از آنکه به حل مسئله بالا بپردازیم بگذارید آن را تعمیم دهیم. مسئله بالا مثالی ساده از مسئله اصلی حساب تغییرات است. فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ یک باز کران دار و $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد. می خواهیم تابع $u : \Omega \to \mathbb{R}$ را بیابیم که مقدار تابعک

$$I[u] := \int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

را به حداقل رساند و در شرط مرزی $u|_{\partial\Omega} = u_0|_{\partial\Omega}$ صدق کند. در این‌جا $u_0 : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ یک مقدار مرزی داده شده است.

مسائل بسیاری در ریاضیات، علوم و مهندسی به صورت بالا بیان می شوند. به طور خاص در فیزیک فرمول بندی بالا از یک مسئله را فرمول بندی لاگرانژی می‌نامند. تقریبا تمام نظریات بنیادی در فیزیک به صورت لاگرانژی فرمول بندی می‌شوند یا قابل فرمول بندی هستند. در متون فیزیک معمولا F را با L نمایش می‌دهند و به آن لاگرانژی یا چگالی لاگرانژی می‌گویند، و I را با S نمایش می‌دهند و به آن کنش می‌گویند. به عنوان مثال در مکانیک کلاسیک لاگرانژی یک سیستم ذرات برابر تفاضل انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل آن سیستم است.

۲ معادله اویلر ـ لاگرانژ

به مسئله اصلی برگردیم. I را می توان به عنوان تابعی با برد $\mathbb{R}$ در نظر گرفت که دامنه آن فضایی از توابع روی $\bar{\Omega}$ هستند. درباره این فضای توابع جلوتر به طور مفصل صحبت خواهیم کرد. فعلا کافی است بدانیم که اعضای این فضا روی $\partial\Omega$ برابر با $u_\circ$ می‌باشند. هدف این است که تابع u را در این فضا بیابیم که نقطه مینیمم I باشد. با شبیه سازی با حساب دیفرانسیل بعد متناهی می‌توان حدس زد که اگر I مشتق پذیر بود، مشتق آن در نقطه u می‌بایست برابر صفر می‌شد. اگرچه می‌توان این مطلب را دقیق کرد فعلا بگذارید تا به صورت فرمال از I در u مشتق بگیریم. فرض کنید v تابعی روی $\bar{\Omega}$ است که روی $\partial\Omega$ برابر صفر است. v در واقع نقش برداری را دارد که می خواهیم در جهت آن مشتق بگیریم. برای هر $t \in \mathbb{R}$ تابع $u + tv$ روی مرز Ω برابر $u_\circ$ است، پس متعلق به دامنه I است. حال داریم

$$I[u+tv] = \int_\Omega F(x, u+tv, \nabla u + t\nabla v)\, dx$$

اگر نسبت به t مشتق بگیریم و t را برابر صفر قرار دهیم خواهیم داشت

$$\circ = I'[u] = \int_\Omega \nabla_u F(x,u,\nabla u) v + \nabla_\xi F(x,u,\nabla u)\cdot \nabla_x v\, dx$$

در این‌جا ξ متغیری است در F که ∇u را در آن جایگذاری کرده‌ایم. همچنین برای اینکه ابهامی پیش نیاید مشتق v را که نسبت به x است با $\nabla_x v$ نمایش داده‌ایم. اکنون در جمله دوم انتگرال بالا می‌توانیم از انتگرال گیری جزء به جزء استفاده کنیم. توجه کنید که چون v روی $\partial\Omega$ صفر است در این انتگرال گیری جمله مرزی نخواهیم داشت. پس

$$\circ = \int_\Omega [\nabla_u F - \nabla_x(\nabla_\xi F)] v\, dx$$

اما این تساوی برای هر v برقرار است. پس تابع u در معادله دیفرانسیل پاره‌ای زیر صدق می‌کند

$$\nabla_u F(x,u,\nabla u) - \nabla_x(\nabla_\xi F(x,u,\nabla u)) = \circ$$

که به آن معادله اویلر ـ لاگرانژ می‌گویند.

با استفاده از معادله اویلر ـ لاگرانژ می‌توان اطلاعات قابل توجهی راجع به جواب مسئله یعنی u به دست آورد. به طور خاص در بعد یک، که معادله اویلر ـ لاگرانژ یک معادله دیفرانسیل عادی است، در بسیاری از موارد می‌توان جواب را به طور کامل مشخص کرد. مثلا مسأله Brachistochrone را در نظر بگیرید. معادله اویلر ـ لاگرانژ برای این مسأله به صورت زیر به دست می‌آید (توجه کنید که در این مسأله متغیر مستقل y و $u = x(y)$ جواب است).

$$F(y,u,\xi) = \sqrt{\frac{\xi^۲ + ۱}{۲gy}}$$

$$\nabla_u F(y,x,x') - \nabla_y(\nabla_\xi F(y,x,x')) = \circ$$

ولی F به u بستگی ندارد پس $\nabla_u F = \circ$ است و داریم

$$\nabla_y(\nabla_\xi F(y,x,x')) = \circ \Rightarrow \nabla_\xi F(y,x,x') = c$$

که c یک عدد ثابت است. حال داریم

$$\nabla_\xi F = \frac{\xi}{\sqrt{(۲gy)(\xi^۲+۱)}}$$

بنابراین معادله اویلر ـ لاگرانژ می‌شود

$$\frac{x'}{\sqrt{(۲gy)(x'^۲+۱)}} = c \Rightarrow \frac{x'^۲}{y(x'^۲+۱)} = ۲gc^۲ =: \frac{۱}{۲a}$$

در این‌جا a ثابتی است که برای راحتی به این صورت تعریف شده است. اگر این معادله را برای x' حل کنیم خواهیم داشت

$$x' = \sqrt{\frac{y}{۲a-y}} \Rightarrow x = \int \sqrt{\frac{y}{۲a-y}}\, dy$$

با تغییر متغیر $y=a(1-cos\theta)$ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} x &= \int \sqrt{\frac{a(1-\cos\theta)}{a(1+\cos\theta)}}a\sin\theta\, d\theta = \int a\tan\frac{\theta}{2}\sin\theta\, d\theta \\ &= \int a(1-\cos\theta)\, d\theta = a(\theta-\sin\theta)+C \end{aligned}$$

در نتیجه خم جواب را می‌توان به صورت پارامتری

$$x = a(\theta-\sin\theta)+C$$
$$y = a(1-\cos\theta)$$

نمایش داد. ثابت‌های a و C باید طوری تعیین شوند که خم از دو نقطه ابتدایی و انتهایی A و B بگذرد. این خم در واقع قسمتی از یک سیکلوئید است، خمی که یک نقطه ثابت روی یک دایره که در حال حرکت روی یک خط راست است طی می‌کند.

اگر چه روش فوق در حالت یک بعدی کاراست، اما وقتی که بعد از یک بیشتر است نمی‌توان آن را به کار برد. زیرا در این حالت معادله اویلر–لاگرانژ یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای می‌باشد و این معادلات را به جز در حالت‌های خیلی خاص نمی‌توان به طور صریح حل کرد. در واقع در بسیاری از موارد برای آنکه نشان دهیم معادله اویلر–لاگرانژ جواب دارد ثابت می‌کنیم که تابعک I مینیمم دارد و مینیمم آن در معادله صدق می‌کند. این روش را ریمان در تز دکتری خود در ۱۸۵۱ به کار برد تا قضیه نگاشت ریمان را ثابت کند. این قضیه می‌گوید هر زیرمجموعه سره باز و همبند ساده از صفحه مختلط را می‌توان با یک نگاشت یک به یک، پوشا و تحلیلی به گوی واحد تصویر کرد. برای اثبات این قضیه، ریمان احتیاج داشت تا معادله دیفرانسیل پاره‌ای زیر را حل کند:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

در این‌جا $\Omega \subset \mathbb{C}$ یک باز همبند ساده داده شده است و g تابعی پیوسته و مشخص روی $\partial\Omega$ می‌باشد. همچنین $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ لاپلاسین تابع u است.

به سادگی می‌توان دید که معادله $\Delta u = 0$ معادله اویلر–لاگرانژ متناظر تابعک

$$I[u] = \int_\Omega |\nabla u|^2 dxdy = \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 dxdy$$

است. ریمان فرض کرد که چون این تابعک از پایین کران‌دار است پس حتما مینیمم دارد. وی این فرض خود را «اصل دیریشله» نامید. در آن زمان این فرض معقول و بی‌نیاز به اثبات به نظر می‌رسید. ولی باید در نظر داشت که دامنه تابعک I یک فضای با بعد نامتناهی از توابع است و شهودی که از فضاهای متناهی‌البعد داریم لزوما درباره آن درست نیست. کارل وایرشتراس، که مفاهیم حد و پیوستگی را دقیق کرد، اولین مثال نقض برای اصل دیریشله را یافت. وی نشان داد که تابعک

$$I[u] = \int_0^1 x(u'(x))^2 dx$$

که به وضوح از پایین کران‌دار است، در بین توابع $u:[0,1]\to\mathbb{R}$ با شرط مرزی $u(0)=u(1)=0$ مینیمم خود را اختیار نمی‌کند. با این حال، هیلبرت نشان داد که اصل دیریشله برای برخی تابعک‌ها، از جمله تابعکی که ریمان در نظر داشت، درست است.

هیلبرت همچنین مسأله نوزدهم از لیست مشهور مسائل خود را که در سال ۱۹۰۰ در کنگره بین المللی ریاضیدانان ارائه کرد، به حساب تغییرات اختصاص داد. وی پرسید که اگر تابعک I توسط یک تابع تحلیلی F تعریف شده باشد آیا تابع مینیمم کننده I نیز یک تابع تحلیلی است؟ البته باید فرض کنیم که $D^2_{\xi\xi}F$ یک ماتریس مثبت معین است، یعنی F نسبت به ξ محدب است. این فرض معادل این است که معادله اویلر–لاگرانژ متناظر یک معادله دیفرانسیل بیضوی باشد. پاسخ مسأله نوزدهم هیلبرت مثبت است. اولین قدم در راه اثبات آن را برنستاین در ۱۹۰۴ برداشت. او ثابت کرد که اگر فرض کنیم u تابعی C^3 است آنگاه تحلیلی است. ریاضیدانان دیگری برای حل این مسأله تلاش کردند و توانستند فرض همواری اولیه یعنی C^3 بودن u را ضعیف‌تر کنند. اما روش مستقیم در حساب تغییرات، که در ادامه به آن می‌پردازیم، وجود جواب‌هایی با این فرض‌های ضعیف‌تر همواری را هم نتیجه نمی‌دهد. بنابراین برای کامل شدن اثبات احتیاج به ابزارهای نوینی بود تا فرض همواری اولیه روی u را باز هم ضعیف‌تر کنند. این کار به طور مستقل توسط ریاضیدان ایتالیایی انیو دی جیورجی و ریاضیدان آمریکایی جان نش در ۱۹۵۷ انجام شد و حل مسأله نوزدهم هیلبرت توسط این دو کامل گردید.

۳ روش مستقیم و فضاهای سوبولف

همان طور که دیدیم وقتی بعد از یک بیشتر است حل معادله اویلرـ لاگرانژ به سادگی امکان پذیر نیست. بنابراین برای اثبات اینکه تابعک I نقطه مینیممی مثل u دارد نیاز داریم تا روش دیگری را به کار بریم. یعنی می‌خواهیم به طور مستقیم ثابت کنیم که I مینیمم خود را اختیار می‌کند. به یاد آورید که معادله اویلرـ لاگرانژ از مشتق گیری از I به دست آمده بود. پس ما می‌خواهیم مینیمم را بدون مشتق گیری پیدا کنیم. برای سادگی از این‌جا به بعد فرض می‌کنیم که I به صورت زیر تعریف شده است:

$$I[u] = \int_\Omega F(\nabla u(x))\, dx$$

یعنی فرض می‌کنیم که F به x و u بستگی ندارد. همچنین فرض می‌کنیم F تابعی C^1 است. می‌دانیم که $I : X \to \mathbb{R}$ تابعی است که دامنه آن، یعنی X، فضایی از توابع است که روی $\partial\Omega$ مقدار مشخصی را اختیار می‌کنند. درباره X کمی جلوتر صحبت می‌کنیم. فعلا این را می‌گوییم که X کران‌دار نیست، بنابراین نمی‌تواند فشرده باشد. حال بگذارید کمی از شهود خود در بعد متناهی کمک بگیریم. فرض کنید می‌خواهیم مینیمم تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را پیدا کنیم. چون دامنه f فشرده نیست نمی‌توانیم از روش‌های معمول بهره گیریم. ولی ابزارهایی وجود دارند که در این حالت به کار می‌آیند. یکی از آنها آنالیز محدب است که از ایده بسیار ساده‌ای استفاده می‌کند. می‌خواهیم شرایطی روی f بگذاریم تا مطمئن شویم مینیمم دارد. اولا باید فرض کنیم که f از پایین کران‌دار است. یک فرض مفید دیگر این است که f تابعی محدب (و در نتیجه پیوسته) باشد. اما هنوز این فرض‌ها کافی نیستند. مثلا تابع e^x روی $\mathbb{R}$ محدب و از پایین کران‌دار است ولی مینیمم خود را اختیار نمی‌کند. برای اینکه بر این مشکل غلبه کنیم کافی است فرض کنیم که حد f در بینهایت نامتناهی است. ساده است که ببینیم با این شرایط f حتما مینیمم خود را اختیار خواهد کرد. جالب این است که همین شرط‌های ساده در فضاهای با بعد نامتناهی هم وجود مینیمم را تضمین می‌کند. اما پیش از آنکه این مطلب را توضیح دهیم باید مشخص کنیم که فضای X چیست.

باز کران‌دار $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ و عدد $1 \leq p < \infty$ را در نظر بگیرید. فضای توابع pـ انتگرال‌پذیر روی Ω را به صورت

$$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid \int_\Omega |f|^p dx < \infty\}$$

تعریف می‌کنیم. فضاهای L^p فضای برداری نرم‌دار هستند که نرم $f \in L^p$ به صورت

$$\|f\|_{L^p} := (\int_\Omega |f|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

تعریف می‌شود. خواص طبیعی نرم L^p به سادگی به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \|f\|_{L^p} = 0 \Leftrightarrow f = 0 \; a.e. \\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow \|cf\|_{L^p} = |c|\, \|f\|_{L^p} \\ \|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \end{cases}$$

با استفاده از نرم می‌توان فاصله هر دو تابع f و g را در فضای L^p به صورت $\|f-g\|_{L^p}$ تعریف کرد. می‌توان نشان داد که فضای L^p با این متریک یک فضای کامل است. به فضاهای نرم‌دار کامل فضای باناخ نیز می‌گویند.

خود فضاهای L^p را نمی‌توان به عنوان دامنه تابعک I به کار برد. زیرا برای تعریف I باید از توابع مشتق بگیریم و توابع L^p حتی پیوسته هم نیستند. البته اگر بخواهیم دامنه I را فضای توابع C^1 در نظر بگیریم باز به مشکل برمی‌خوریم. برای اینکه اثبات مستقیم وجود مینیمم در فضای توابع C^1 بسیار سخت است. پس باید فضایی از توابع بیابیم که به نوعی بین فضای L^p و فضای توابع C^1 باشد. برای این کار به مفهوم مشتق ضعیف احتیاج داریم. اگر تابع $w : \Omega \to \mathbb{R}$ مشتق پذیر بود و ϕ تابعی هموار بود که محمل آن یعنی مجموعه $\{\phi = 0\}$ درون Ω بود (در این حالت می‌نویسیم $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$) آنگاه با مشتق‌گیری جزء به جزء به دست می‌آوردیم

$$\int_\Omega w \nabla_i \phi\, dx = -\int_\Omega \phi \nabla_i w\, dx \quad i = 1, \ldots, n$$

توجه کنید که ϕ در همسایگی $\partial\Omega$ صفر است بنابراین در این انتگرال گیری جزء به جزء جمله مرزی نداریم. اکنون همانند خیلی از تعمیم‌ها در ریاضیات، قضیه فوق را به عنوان تعریف به کار می‌بریم. می‌گوییم $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ مشتق ضعیف تابع w است اگر برای

هر $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ داشته باشیم:

$$\int_\Omega w\nabla_i\phi\,dx = -\int_\Omega \phi\, v_i\, dx \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

در این حالت می‌نویسیم $\nabla w = v$. می‌توان نشان داد که با کمی شرایط اضافی تابعی که مشتق ضعیف دارد تقریبا همه جا به معنی کلاسیک مشتق پذیر است و مشتق کلاسیک آن برابر مشتق ضعیف آن است. ولی باید توجه داشت که توابعی که تقریبا همه جا مشتق پذیرند لزوما به معنی ضعیف مشتق پذیر نیستند. به عنوان مثال تابع $f(x) = |x|$ روی $\mathbb{R}$ به جز در مبدأ، مشتق پذیر است. می‌توانید برای تمرین نشان دهید که f به صورت ضعیف هم مشتق پذیر است و داریم

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

توجه کنید که مشتق ضعیف تابعی است که در یک انتگرال ظاهر شده است، و اگر مقادیر آن را در یک مجموعه اندازه صفر تغییر دهیم مقدار انتگرال تغییر نمی‌کند. بنابراین اصولا مشتق ضعیف تقریبا همه جا تعریف می‌شود و نه همه جا. حال تابع زیر را روی $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید.

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

این تابع هم به جز در مبدأ همه جا مشتق پذیر است. به عنوان تمرین دیگر می‌توانید نشان دهید که g به صورت ضعیف مشتق پذیر نیست. (راهنمایی: اگر g به صورت ضعیف مشتق پذیر باشد، مشتق ضعیف آن باید تقریبا همه جا صفر باشد.)

حال با استفاده از این مفاهیم می‌توانیم دامنه مناسب تابعک I را پیدا کنیم. ابتدا فضاهای سوبولف $W^{1,p}(\Omega)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$W^{1,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) \mid$$

f به صورت ضعیف مشتق پذیر است و

$$\nabla_i f \in L^p(\Omega) \;\; i = 1, 2, \ldots, n\}$$

فضاهای سوبولف هم فضای باناخ هستند. نرم این فضاها به صورت

$$\|f\|_{W^{1,p}} := (\|f\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^n \|\nabla_i f\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}}$$

تعریف می‌شود.

اکنون می‌توانیم دامنه تابعک I را فضای X قرار دهیم که

$$X := \{w \in W^{1,p}(\Omega) \mid w = u_0 \;\text{ on } \partial\Omega\}$$

در این‌جا u_0 مقدار مرزی داده شده است. برای اینکه مقدار I روی X متناهی باشد فرض می کنیم که برای $C, b > 0$ داریم:

$$|F(\xi)| \leq C|\xi|^p + b \tag{1}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} |I[w]| &\leq \int_\Omega |F(\nabla w)|\,dx + b|\Omega| \\ &\leq C\int_\Omega |\nabla w|^p dx + b|\Omega| \\ &< \infty \end{aligned}$$

که منظور از $|\Omega|$ حجم Ω است. همچنین فرض می‌کنیم که F و در نتیجه I از پایین کران‌دار باشند. قرار دهید

$$m := \inf_{w\in X} I[w] > -\infty$$

در این صورت طبق تعریف اینفیمم دنباله u_k در X وجود دارد که $I[u_k] \to m$. اولین قدم برای یافتن نقطه مینیمم u این است که نشان دهیم دنباله u_k زیردنباله‌ای همگرا دارد. یعنی باید از نوعی فشردگی استفاده کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم که دنباله u_k در $W^{1,p}$ کران‌دار است. گرچه کران‌داری در فضاهای با بعد نامتناهی برای فشردگی کافی نیست ولی شرطی لازم است. برای اثبات این مطلب باید شرطی اضافه روی F بگذاریم. پس فرض می‌کنیم برای $c, a > 0$ داریم

$$F(\xi) \geq c|\xi|^p - a \tag{2}$$

این فرض متناظر فرضی است که در بعد متناهی داشتیم که حد تابع در بینهایت نامتناهی شود. به این فرض وادارندگی (coercivity)

می‌گویند. این نامساوی نتیجه می‌دهد که برای $w \in X$ داریم

$$\begin{aligned} I[w] &\geq c\int_\Omega |\nabla w|^p dx - a|\Omega| \\ &\geq c_1\|w\|_{W^{1,p}} - c_2 \end{aligned} \qquad (۳)$$

که $c_1, c_2 > 0$. در این‌جا ما از نامساوی پوانکاره هم استفاده کرده‌ایم که می‌گوید برای $w \in W^{1,p}$ که روی $\partial\Omega$ برابر u_0 است داریم

$$\|w\|_{L^p} \leq C_1\|\nabla w\|_{L^p} + C_2$$

که C_1, C_2 به w بستگی ندارند و فقط به Ω و u_0 بستگی دارند (اثبات در [۳]).

حال چون $I[u_k] \to m$ پس دنباله $I[u_k]$ کران‌دار است. با استفاده از ۳ به دست می‌آوریم که $\|u_k\|_{W^{1,p}}$ هم کران‌دار است. اما همان طور که قبلا گفتیم زیرمجموعه‌های کران‌دار $W^{1,p}$ لزوما فشرده نیستند. توجه کنید که فشردگی در این‌جا نسبت به متریک روی $W^{1,p}$ است که توسط نرم آن تعریف می‌شود. با این حال می‌توان نشان داد که زیرمجموعه‌های کران‌دار $W^{1,p}$ وقتی $p > 1$ است به یک معنا فشرده هستند. این فشردگی را فشردگی ضعیف می‌نامند. با استفاده از فشردگی ضعیف می‌توانیم زیر دنباله u_{k_j} و تابع $u \in W^{1,p}$ را پیدا کنیم که برای هر $v \in W^{1,q}$ که $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ است داشته باشیم

$$\int_\Omega u_{k_j} v + \nabla u_{k_j} \cdot \nabla v\, dx \to \int_\Omega uv + \nabla u \cdot \nabla v\, dx$$

در این حالت می‌گوییم که u_{k_j} به طور ضعیف به u همگراست و می‌نویسیم $u_{k_j} \rightharpoonup u$. توقع داریم که تابع $u \in W^{1,p}$ را که به این صورت یافتیم نقطه مینیمم تابعک I باشد. می‌توان نشان داد که u روی $\partial\Omega$ برابر u_0 است. پس تنها می‌ماند که نشان دهیم $I[u] = m$. برای این کار کافی است که I نسبت به همگرایی ضعیف پیوسته باشد. اما پیوستگی نسبت به همگرایی ضعیف شرطی بسیار قوی است که نتیجه می‌دهد F باید به صورت

$$F(\xi) = a_1 \cdot \xi + a_2$$

باشد، که $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$ بردارهایی ثابت‌اند. به عبارت دیگر تابعک I باید خطی باشد، ولی در بیشتر موارد I غیر خطی است. خوشبختانه برای اثبات اینکه u مینیمم است احتیاج به همه قدرت پیوستگی نداریم. زیرا پیوستگی نتیجه می‌دهد که

$$I[u] = \lim I[u_{k_j}] = m$$

اما ما تنها نیاز داریم که بدانیم

$$I[u] \leq \lim I[u_{k_j}] = m$$

توجه کنید که نیمه دیگر تساوی یعنی نامساوی $I[u] \geq m$ از تعریف m نتیجه می‌شود. چون m مقدار اینفیمم I بود. پس می‌توان گفت که ما فقط به نیمی از پیوستگی احتیاج داریم. به شرط بالا اصطلاحا نیم‌پیوستگی از پایین گفته می‌شود و از آنجا که از همگرایی ضعیف استفاده کرده‌ایم می‌گوییم I نیم‌پیوسته ضعیف از پایین است.[۱]

حال بگذارید کمی غیر دقیق بحث کنیم. پیوستگی I نسبت به همگرایی ضعیف معادل این بود که F خطی باشد یا معادلا داشته باشیم

$$F(t\xi_1 + (1-t)\xi_2) = tF(\xi_1) + (1-t)F(\xi_2)$$

که $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ و $t \in [0,1]$. اگر بخواهیم I نیم‌پیوسته ضعیف باشد می‌توان توقع داشت که نیمی از تساوی بالا برای آن کافی باشد، یعنی داشته باشیم

$$F(t\xi_1 + (1-t)\xi_2) \leq tF(\xi_1) + (1-t)F(\xi_2)$$

این رابطه چیزی نیست مگر محدب بودن F. اکنون می‌توانیم به طور دقیق استدلال کنیم و به سادگی نشان دهیم که محدب بودن F نتیجه می‌دهد که I نیم‌پیوسته ضعیف از پایین است. فرض کنید $u_j \rightharpoonup u$، آنگاه

$$\begin{aligned} I[u_j] &= \int_\Omega F(\nabla u_j)\, dx \\ &\geq \int_\Omega F(\nabla u) + \nabla_\xi F(\nabla u) \cdot (\nabla u_j - \nabla u)\, dx \end{aligned} \qquad (۴)$$

در این‌جا از این مطلب استفاده کرده‌ایم که صفحه مماس بر نمودار یک تابع محدب کاملا زیر نمودار قرار دارد. یعنی صفحه مماس در هر نقطه $\nabla u(x)$ که با معادله

$$F(\nabla u(x)) + \nabla_\xi F(\nabla u(x)) \cdot (y - \nabla u(x))$$

[۱] اگر بخواهیم دقیق باشیم باید به جای lim از lim inf استفاده کنیم ولی در این‌جا lim و lim inf یکی هستند.

داده شده است زیر نمودار $F(y)$ است. حال کافی است قرار دهیم $y = \nabla u_j(x)$ و از طرفین نامساوی انتگرال بگیریم.

اکنون به نامساوی ۴ برمی‌گردیم. اگر از طرفین وقتی $j \to \infty$ حد بگیریم خواهیم داشت

$$\lim I[u_j] \geq I[u] + \lim \int_\Omega \nabla_\xi F(\nabla u) \cdot (\nabla u_j - \nabla u)\, dx$$

اما ∇u_j به طور ضعیف به ∇u همگراست. یعنی اگر $\nabla_\xi F(\nabla u)$ در L^q باشد آنگاه حد سمت راست در نامساوی بالا برابر صفر است. برای اینکه مطمئن شویم این اتفاق می‌افتد فرض می‌کنیم

$$|\nabla_\xi F(\zeta)| \leq C|\zeta|^{p-۱} \quad (۵)$$

آنگاه خواهیم داشت

$$|\nabla_\xi F(\nabla u)| \leq C|\nabla u|^{p-۱}$$

اما $|\nabla u|^{p-۱} \in L^q$ زیرا $q = \frac{p}{p-۱}$ پس

$$\int_\Omega (|\nabla u|^{p-۱})^q dx = \int_\Omega |\nabla u|^p dx < \infty$$

در نتیجه نشان دادیم که اگر F محدب و $C^۱$ باشد و در نامساوی‌های ۱ و ۲ و ۵ صدق کند آنگاه تابعک I مینیمم خود را روی X اختیار می‌کند.

به عنوان مثال اگر قرار دهیم $p = ۲$ و

$$I[w] = \int_\Omega |\nabla w|^۲ dx$$

آنگاه I مینیمم خود را در نقطه‌ای مثل u اختیار خواهد کرد. یعنی در واقع موفق شده‌ایم اصل دیریشله را اثبات کنیم. اگر استدلال ابتدای مقاله را تکرار کنیم و از I در u مشتق بگیریم برای هر $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ به دست می‌آوریم که

$$\int_\Omega \sum_{i=۱}^{n} \nabla_i u \nabla_i \phi\, dx = ۰$$

حال اگر بتوانیم نشان دهیم (اثبات در [۳]) که ∇u هم مشتق ضعیف دارد نتیجه می‌شود که

$$\int_\Omega (\sum_{i=۱}^{n} D_{ii}^۲ u) \phi\, dx = ۰$$

چون این تساوی برای هر ϕ برقرار است باید داشته باشیم

$$\Delta u = \sum D_{ii}^۲ u = ۰ \text{ a.e.}$$

یعنی توانستیم معادله لاپلاس را حل کنیم.

۴ مسئله پلاتو و رویه‌های مینیمال

خم ساده و بسته $\mathcal{C}$ را در $\mathbb{R}^۳$ در نظر بگیرید. می‌خواهیم رویه‌ای در $\mathbb{R}^۳$ پیدا کنیم که مرز آن $\mathcal{C}$ باشد و مساحت آن کمترین مقدار ممکن باشد. چنین رویه‌ای را یک رویه مینیمال می‌نامند. این مسأله را اولین بار لاگرانژ در ۱۷۶۰ مطرح کرد، اما به آن مسأله پلاتو گفته می‌شود. پلاتو فیزیکدانی بلژیکی در قرن نوزدهم بود که رفتار حباب‌های صابون را مطالعه می‌کرد. چون انرژی حباب‌های صابون متناسب با مساحت سطح آن‌هاست و سیستم‌های فیزیکی تمایل دارند که انرژی خود را به حداقل برسانند، حباب‌های صابون به شکل رویه‌های مینیمال درمی‌آیند. مسأله پلاتو تا مدت‌ها حل نشده باقی ماند تا اینکه در ۱۹۳۰ مستقلا توسط رادو و داگلاس حل شد. روش داگلاس نوآورانه‌تر بود و هیچ شرط اضافی روی خم $\mathcal{C}$ تحمیل نمی‌کرد. به خاطر حل این مسأله داگلاس یکی از دو نفری بود که در سال ۱۹۳۶ اولین مدال فیلدز را دریافت کردند.

برای سادگی بگذارید فرض کنیم که رویه مینیمالی که به دنبالش می‌گردیم نمودار تابع u روی باز $\Omega \subset \mathbb{R}^۲$ است. همچنین خم $\mathcal{C}$ توسط نمودار یک مقدار مرزی $u_۰$ داده شده است. در این صورت u مقدار انتگرال متناظر مساحت نمودار یعنی

$$I[u] = \int_\Omega \sqrt{۱ + |\nabla u|^۲}\, dx$$

را به حداقل می‌رساند. در این حالت تابع F به صورت

$$F(\xi) = \sqrt{۱ + |\xi|^۲}$$

است و داریم

$$|F(\xi)| \leq ۱ + |\xi|$$

اگر این را با نامساوی ۱ مقایسه کنیم می‌بینیم که باید داشته باشیم $p = ۱$. ولی اگر بخواهیم روش مستقیم را به کار ببریم به مشکل برمی‌خوریم. زیرا زیرمجموعه‌های کران‌دار $W^{۱,۱}$ لزوما فشرده

ضعیف نیستند. این مشکل در واقع در فضای L^1 هم وجود دارد. به عنوان مثال دنباله توابع

$$f_n(x) = \begin{cases} n & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & x \notin [0, \frac{1}{n}] \end{cases}$$

را در $L^1((-1,1))$ در نظر بگیرید. داریم $\|f_n\|_{L^1} = 1$. پس این دنباله در L^1 کران‌دار است. اما به سادگی می‌شود دید که هیچ زیر دنباله‌ای ندارد که به طور ضعیف همگرا شود. (توجه کنید که همگرایی ضعیف در L^1 با کمک دوگان آن فضا یعنی فضای توابعی که خارج یک مجموعه اندازه صفر کران‌دار هستند، تعریف می‌شود. به این فضای دوگان، فضای L^∞ می‌گوییم.)

برای غلبه بر این مشکل می‌بایست فضای $W^{1,1}$ را گسترش دهیم. زیرا ریشه مشکل در این است که یک دنباله کران دار در $W^{1,1}$ هست که نقطه حدی ندارد، و بنابراین هیچ زیردنباله‌ای ندارد که به طور ضعیف همگرا شود. این فضای بزرگتر فضای توابع با تغییرات کران‌دار روی Ω است که آن را با $BV(\Omega)$ نمایش می‌دهیم. برای تعریف این فضا لازم داریم تا تعریف مشتق ضعیف را تعمیم دهیم. می‌گوییم تابع $w \in L^1$ متعلق به BV است هرگاه اندازه‌های علامت دار μ_i (با برخی خواص تکنیکی) روی Ω وجود داشته باشند به طوری برای هر $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ داشته باشیم

$$\int_\Omega w \nabla_i \phi \, dx = - \int_\Omega \phi \, d\mu_i \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

توجه کنید که در تعریف قبلی اندازه μ_i برابر $(\nabla_i w)dx$ بود که dx اندازه لبگ استاندارد است و $\nabla_i w$ مشتق ضعیف w بود که تابعی انتگرال‌پذیر بود. ولی در این‌جا مشتق ضعیف w نه یک تابع انتگرال پذیر، بلکه یک اندازه است. جزئیات بیشتر درباره این توابع را می‌توانید در منبع [۴] ببینید. مطالعه توابع BV احتیاج به ابزارهای پیشرفته آنالیز از جمله نظریه هندسی اندازه دارد. در این‌جا فقط اشاره می‌کنیم که می‌توان ثابت کرد که زیر مجموعه‌های کران‌دار BV به طور ضعیف فشرده هستند و بنابراین می‌شود روش مستقیم را برای یافتن رویه‌های مینیمال به کار برد.

References

[1] H. H. Goldstine. *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*. Springer, 1980.

[2] B. Dacorogna. *Direct methods in the calculus of variations*. Springer, 2008.

[3] L. C. Evans. *Partial differential equations*. American Mathematical Society, 2010.

[4] L. C. Evans and R. F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. CRC press, 2015.