مقدمه‌ای بر اسپینورها

مهدی کوره‌چیان

مقدمه

جهان فیزیک به دو گستره گرانش و نسبیت عام و دنیای کوانتومی تقسیم شده است. این آرزوی دیرینه فیزیکدانان و ریاضیدانان بوده که بتوانند فرمالیسم و نظریه واحدی برای توجیه تمام نظریات فیزیکی ارائه کنند. در چند دهه اخیر کارهایی در این زمینه از نظر ریاضی انجام شده است که یکی از موفق ترین آن ها جبرهای کلیفورد می باشد. ایده پیدایش آن ها مانند بسیاری دیگر از مفاهیم ریاضی توسط فیزیکدانان ارائه شده است. دیراک برای توصیف معادله موج کوانتومی ذره‌ای با اسپین $\frac{1}{2}$ بصورت هوشمندانه ای از این جبر استفاده می کند. بعدها این مفهوم توسط ریاضیدانانی نامی مانند عطیه[1] توسعه یافته و به تدریج غنا و ویژگی های منحصر به فرد آن کشف می شود. امروزه با استفاده از این فرمالیسم جبری بسیاری از پدیده های فیزیکی مانند الکترومغناطیس ، نسبیت خاص ، اسپین ذرات ، معادلات دیراک را می توان توسط یک زبان واحد بیان کرد. خواننده علاقه مند می تواند برای آگاهی بیشتر در این مورد به منابع[۱]و [۲] و [۳] مراجعه کند. شاید بخاطر همین امر باشد که راجر پنروز[2] گروه کلیفورد $cl(1,3)$ را گروه توصیف کننده جهانی که در آن زندگی می کنیم می داند. پس تلاش او برای معرفی مفهوم هندسی معادل جبرهای کلیفورد در نسبیت عام کاملا منطقی به نظر می رسد.

در این مقاله سعی می شود تا بطور خلاصه مفهوم هندسی و جبری اسپینورها[3] مورد بررسی قرار گیرد. در این‌جا منبع اصلی جلد اول کتاب Spinors and space-time نوشته پنروز می‌باشد.

[1] Atiyah
[2] Roger Penrose
[3] Spinors

۱ دیدگاه هندسی اسپینورها

۱.۱ معرفی فضای مینکوفسکی

فرض کنیم V یک فضای برداری حقیقی چهاربعدی $\mathbb{R}^4$ باشد. اگر آن را به یک متریک با نشانه‌گان[4] $(---+)$ و یک جهت فضاگون[5] و یک جهت زمانی[6] مجهز کنیم، فضای به دست آمده را فضای مینکوفسکی می‌نامند. اگر (t,x,y,z) یک مختصات روی این فضای برداری باشد هر بردار دلخواه مانند U را می‌توان در این مختصاتبه صورت

$$U = u^0 t - u^1 x - u^2 y - u^3 z \qquad (۱)$$

نوشت. اگر (t',x',y',z') پایه دیگری برای این فضا باشد با توجه به روابطی که در جبر خطی وجود دارد این دو پایه را می توان توسط یک ماتریس ناتکین 4×4 توسط رابطه

$$t'_i = \alpha_i^j t_j \qquad (۲)$$

به یکدیگر تبدیل کرد. حال اگر g_i پایه دیگری برای این فضا باشد بین پایه ها تبدیلی زیر وجود دارد[7]

$$g_i = \alpha_i^k \beta_k^j t'_j \qquad (۳)$$

پس رابطه تبدیل پایه ها یک رابطه تعدی می باشد. ماتریس‌های تبدیل مختصاتی را می توان به دو کلاس مجزا ماتریس‌های با دترمینان مثبت ومنفی تقسیم کرد. به دسته اول ویژه[8] و به دسته دوم غیرویژه[9] می گوییم. با انتخاب هر کدام به عنوان کلاس تبدیلات مختصاتی مربوط به فضا یک جهت[10] نسبت می دهیم. متریک متناظر با این فضا را با نماد η^{ij} نمایش می دهیم که فرم ماتریسی آن بصورت

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

می‌باشد. اگر η_{ij} متریک متناظر فضای هم بردارهای فضای مینکوفسکی (دوگان فضای مینکوفسکی) باشد، با توجه به آنکه برای هر فضای متریک می توان پایه متناظر فضای هم برداریش را بفرم کانونی انتخاب کرد بطوری که $g^{ik} g_{kj} = \delta_{ij}$ برقرار باشد، پس برای فضای متریک مینکوفسکی فوق داریم

$$\eta^{ik} \eta_{kj} = \delta_{ij} \qquad (۴)$$

[4] signature
[5] orientation
[6] time orientation
[7] در نوشتن فرمول‌ها از نمادگذاری فیزیکی استفاده شده و سیگما حذف گردیده.
[8] proper
[9] inproper
[10] orientation

همچنین به این فضا می‌توان عمل دو خطی $\langle , \rangle$ را از $V \times V \to \mathbb{R}$ به عنوان یک شبه متریک نسبت داد.

$$U, W \in V, \langle U, W \rangle := u^i w^j \eta_{ij} = u^{۰} w^{۰} - u^{۱} w^{۱} - u^{۲} w^{۲} - u^{۳} w^{۳} \quad (۵)$$

و برای هر بردار U از این فضای برداری همانند فضای اقلیدسی یک نرم در نظر گرفت.

$$||U|| := \langle U, U \rangle = u^i u^j \eta_{ij} = (u^{۰})^{۲} - (u^{۱})^{۲} - (u^{۲})^{۲} - (u^{۳})^{۲} \quad (۶)$$

این نرم بردارهای فضای داده شده را در سه دسته مجزا طبقه‌بندی می‌کند.

$$\begin{cases} \text{time like} & \text{if } ||U|| > ۰ \\ \text{space like} & \text{if } ||U|| < ۰ \\ \text{null or light like} & \text{if } ||U|| = ۰ \end{cases} \quad (۷)$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که علامت حاصلضرب مؤلفه‌های زمانی دو بردار زمان‌گونه یا نورگونه (که آن‌ها را casual می‌نامیم) با علامت حاصل ضرب داخلی این دو بردار برابر است. در نتیجه دو بردار از این دسته بر هم عمود نیستند مگر آنکه یکی از آنها نورگونه و متناسب[11] باشند. پس بردارهای فضای V را می‌توان به دو گروه مجزا تبدیل کرد. آن‌هایی که حاصلضرب داخلی دو بردار[12] از یک کلاس مثبت آنها باشد را یک دسته و آن هایی که حاصلضرب داخلی اعضای نامتناسبشان از دو کلاس متفاوت منفی باشد.

به بردارهای دسته اول بردارهای آینده نشان[13] و به دسته دیگر گذشته نشان[14] می‌گویند. اگر بردار زمانی t زمان‌گونه باشد آنگاه چاربردار[15] (t, x, y, z) را راست زمان[16] می‌نامند! و آن دسته بردارهایی هستند که مولفه زمانی آنها $u^{۰}$ بزرگتر از صفر باشد.

برای قسمت فضایی بردارها می‌توان جبر کواترنیون ها را اعمال کرد تا بتوان از این طریق یک جهت نیز به این قسمت نسبت داد. اگر $\{e^i\}$ یک پایه متعامد یکه متناظر با این فضا باشد و داشته باشیم

$$e^k = i \epsilon_{ijk} e^i \times e^j \quad (۸)$$

که ϵ_{ijk} برابر است با ۱+ اگر جایگشت روی مجموعه $\{۱, ۲, ۳\}$ زوج باشد و در غیراین صورت برابر است با ۱−، آن‌گاه می‌توان برای قسمت فضاگونه دو جهت راستگرد و چپگرد معرفی کرد.

حال چاربردار (t, x, y, z) را راستگرد می‌گوییم هرگاه هم از نظر زمانی ویژه باشد و هم جهت تعریف شده بر روی محورهای فضاگونه

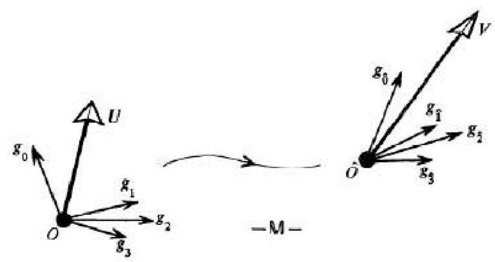
[11] proportional
[12] non proportional
[13] future pointing
[14] past pointing
[15] بردار چهارتایی
[16] orthochronous

آن در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد و برای راحتی کار به‌این چاربردار محدود شده[17] می‌گویند.

با توجه به اصل هم ارزی نسبیت خاص، تمام چارچوب‌های لخت با یکدیگر هم ارز هستند و هیچ کدام بر دیگری ارجحیت ندارد. با توجه به‌این اصل، فضای مینکوفسکی یک فضای آفین هندسی می‌شود؛ یعنی کمیت‌های فیزیکی مانند بردارها تحت انتقال از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر و یا دوران نسبت به یک محور ماهیتشان عوض نمی‌شود و هیچ مبدأ مختصاتی ارجحی وجود ندارد.

در نتیجه یک چارچوب مختصاتی برای بیان رویدادها شامل انتخاب یک مبدأ دلخواه مانند O و یک چاربردار $g_i = O\vec{Q}_t$ می‌باشد که $Q_i \in M$ می‌باشد. حال اگر P و O یک چارچوب مختصاتی دیگر برای توصیف رویدادها عالم باشد و $\vec{U}$ بردار دلخواهی در چارچوب اولی باشد ، آن‌گاه ماتریس وارون پذیر g_i^j وجود دارد که به وسیله‌ی آن می‌توان مختصات $\vec{V}$ را در چارچوب جدید به دست آورد.

$$\vec{V} = g_i^j U_j \quad (۹)$$



به ماتریس فوق یک تبدیل خطی بین‌این دو چارچوب لخت می‌گویند. اگر تبدیلات خطی ضرب داخلی را حفظ کند (به عبارت دیگر طول بردارها تحت‌این تبدیلات خاص حفظ شود) ، آن را تبدیل فعال لورنتز[18] و اگر جهت پذیری فضایی و نیز جهت زمانی را حفظ کند به آن تبدیل لورنتز محدود شده[19] می‌گویند.این تبدیلات خاص تشکیل یک گروه جبری می‌دهند که آن را گروه لورنتز محدود شده[20] می‌نامند. کمیت تانسوری متریک را که در واقع یک تانسور متقارن هموردا می‌باشد می‌توان توسط رابطه

$$\eta_{ij} = v_k^i v_l^j \eta_{kl} \quad (۱۰)$$

بوسیله بردار انتقال دو فضا بدست آورد و با استفاده ازاین رابطه و محاسبات جبری نمایش ماتریسی برای گروه محدود شده تبدیلات

[17] restricted
[18] active Lorentz transformation
[19] restricted lorentz transformation
[20] restricted Lorentzian group

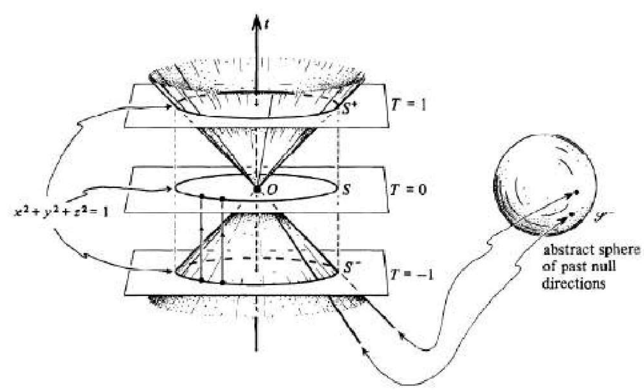
لورنتز بست آورد. خواننده علاقه مند می‌تواند برای اطلاع بیشتر نسبت به‌این مسئله به منبع [۴] مراجعه کند.

۲.۱ مسیرهای نورگونه و تبدیلات اسپینی

فرض کنیم (t, x, y, z) بردارهای پایه متعامد یکه فضای مینکوفسکی M باشند. هر بردار دلخواه U را می‌توان دراین پایه به صورت

$$U = u^{۰}t - u^{۱}x - u^{۲}y - u^{۳}z \qquad (۱۱)$$

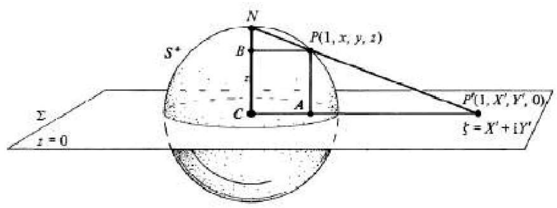
نوشت. همان طور که قبلا گفته شد بردارهای نورگونه آن‌هایی هستند که نرم آن ها برابر با صفر باشند. فضایی که شامل بردارهای نورگونه آینده سو[۲۱] باشند را با نماد τ^{+} و گذشته را با نماد τ^{-} نمایش می‌دهند. حال دو کره فضایی که توسط بردارهای نورگونه تولید می‌شوند را در لحظه‌های $t = \pm ۱$ در نظر می‌گیریم و آن ها را به ترتیب S^{+} و S^{-} می‌نامیم و خود به عنوان ناظرایستا در مبدأ قرار می‌گیریم. واضح است که نقاط داخلی S^{-} شامل نورهای زمان‌گونه‌ای است که از گذشته به ما می‌رسد و S^{+} شامل نقاط زمان‌گونه به سمت آینده می‌شود.



حال فرض کنیم اشعه نوری از نقطه $(-۱, x, y, z)$ به سمت ناظر تابیده شود. با توجه به شکل بالااین پرتو از مبدأ عبور می‌کند وبه نقطه متناظرش $(۱, -x, -y-, z)$ می‌رسد که مختصاتش قرینه نقطه آغازی می‌باشد. پس می‌توان یک تناظر یک به یک و پوشا بین دوکره برقرار کرد. به‌این نگاشت، نگاشت پادقطبی[۲۲] می‌گویند. تجسم اینکه این نگاشت جهت‌پذیری را معکوس می‌کند دور از ذهن نمی‌باشد. یعنی اگر از نظر ناظر ساکن در مبدأ بردار مماسی که بر روی S^{-} در جهت حرکت عقربه‌های زمان حرکت می‌کند وقتی به S^{+} توسط این تابع نگاشته می‌شود ، از دید همان ناظر در جهت خلاف عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند.

[۲۱] future point null vector
[۲۲] anti podal

در ریاضی می‌توان نقاط روی سطح یک کره را بصورت یک به یک و پوشا متناظر با صفحه اعداد مختلط در نظر گرفت که‌این کار از لحاظ تاریخی به ریمان نسبت داده شده است. مثلا S^{+} را به عنوان کره ریمان در نظر می‌گیریم. کافیست نقطه قطب شمال کره $N = (۱, ۰, ۰, ۱)$ را از روی سطح کره برداریم. سپس خطوطی را که ازاین نقطه و یک نقطه دلخواه از سطح کره عبور می‌کند را امتداد داده تا مشاهده کنیم صفحه اعداد مختلط (یعنی $Z = ۰$) را در کدام نقطه قطع می‌کند.



هر نقطه روی صفحه اعداد مختلط را بصورت

$$\zeta = X' + iY' \qquad (۱۲)$$

در نظر می‌گیریم. از آن جا که مؤلفه زمانی برای تمام نقاط S^{+} ثابت و برابر $t = ۱$ است می‌توان از آن صرف نظر کرد و محاسبات را فقط روی قسمت فضایی انجام داد. مثلا اگر یک نقطه دلخواه برابر با (x, y, z) داشته باشیم ، آن‌گاه با توجه به قضیه تالس در هندسه اقلیدسی می‌توان معادله خطی را که ازاین نقطه و قطب شمال کره می‌گذرد را بصورت زیر محاسبه کرد.

$$\frac{X'}{x} = \frac{Y'}{y} = \frac{Z' - ۱}{z - ۱} \qquad (۱۳)$$

از طرف دیگراین خط صفحه اعداد مختلط را در نقطه $Z' = ۰$ قطع می‌کند. حال اگر رابطه جبری نقاط روی این کره $(x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۱)$ را در معادله بالا جایگذاری کنیم مقادیر X' و Y' بصورت زیر بدست می‌آید.

$$X' = \frac{-x}{\sqrt{۱ - x^{۲} - y^{۲}} - ۱} = \frac{x}{۱ - z}$$
$$Y' = \frac{-y}{\sqrt{۱ - x^{۲} - y^{۲}} - ۱} = \frac{y}{۱ - z}$$
$$\zeta = X' + iY' = \frac{x + iy}{۱ - z}$$

همچنین اگر مختصات ζ روی صفحه مختلط داده شده باشد به راحتی می‌توان نقطه متناظر با آن را روی کره S^{+} بدست آورد که بر حسب ζ و مزدوج مختلط آن $\bar{\zeta}$بصورت زیر بیان می‌شود.

$$x = \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{۱ + \bar{\zeta}\zeta}, y = \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{i(۱ + \bar{\zeta}\zeta)}, z = \frac{\bar{\zeta}\zeta - ۱}{۱ + \bar{\zeta}\zeta} \qquad (۱۴)$$

این روابط را می‌توان بر حسب مختصات قطبی بیان کرد. کافی است معادلات

$$x = \sin\theta\cos\phi, y = \sin\theta\sin\phi, z = \cos\theta \qquad (۱۵)$$

را در رابطه $\zeta = X' + iY' = \frac{x+iy}{۱-z}$ جایگذاری کنیم و ζ را بر حسب مختصات قطبی به صورت

$$\zeta = X' + iY' = \cot\frac{\theta}{۲}(\cos\phi + i\sin\phi) = e^{i\phi}\cot\frac{\theta}{۲} \qquad (۱۶)$$

بنویسیم. روابط فوق بر روی S^+ را می‌توان توسط نگاشت پادقطبی به کره S^- گسترش داد. برای‌این کار به جای مختصات دکارتی (x,y,z) مختصات $(-x,-y,-z)$ و به جای زوج مختصاتی قطبی (θ,ϕ) مقدار $(\pi-\theta,\pi+\phi)$ در معادلات (۱۷) و (۱۴) جایگذاری می‌کنیم و برای مختصات قطبی داریم:

$$\zeta = -e^{i\phi}\tan\frac{\theta}{۲} \qquad (۱۷)$$

به‌این نوع نگاشت ، نگاشت کنجنگاری[۲۳] می‌گویند. دراینجا نقطه قطب شمال $N = (۱,۰,۰,۱)$ نقش بی نهایت صفحه مختلط راایفا می‌کند.

۳.۱ تبدیلات لورنتز فضای مینکوفسکی و رابطه آن با تبدیلات اسپینی

از آن جا که بی نهایت در ریاضیات مفهومی‌حدی و مبهم است، می‌توان از آن با استفاده از روشی که بیان می‌شود اجتناب کرد واز معادلش که مقداری متناهی است در انجام محاسبات استفاده کرد. اگر $(\zeta = \infty)$ را متناظر با نقطه $N = (۱,۰,۰,۱)$ در نظر بگیریم، کافیست برای نمایش آن به جای استفاده از یک عدد مختلط از یک زوج دوتایی استفاده کرد که در هیچ نقطه‌ای هر دو مختصات آن برابر صفر نباشند.

$$\zeta = (\xi,\eta) = \frac{\xi}{\eta} \qquad (۱۸)$$

دراین حالت $N = \zeta = (۱,۰)$ در نظر می‌گیریم. برای‌این کار ابتدا صفحه $\mathbb{C}^۲ - \{۰\}$ را انتخاب کرده، سپس بین نقاط آن رابطه هم‌ارزی زیر را اعمال می‌کنیم:

$$x \cong y \iff \exists\lambda \in \mathbb{C} - \{۰\} \text{ such that } x = \lambda y \qquad (۱۹)$$

فضای خارج‌قسمتی حاصل ازاین رابطه هم‌ارزی $(\frac{\mathbb{C}^۲-\{۰\}}{\cong})$ را فضای تصویری مختلط یک بعدی می‌نامند و با نماد $\mathbb{CP}^۱$ نمایش می‌دهیم. بااین روش می‌توان کل صفحه اعداد مختلط را که معادل همان بی‌نهایت کره S^+ است در یک نقطه جمع کرد که آن را با $\zeta = (۱,۰)$ نمایش می‌دهیم. خواننده علاقه‌مند برای درک بهتر مفهوم صفحه تصویری می‌تواند به [۵] مراجعه کند.

[۲۳] Stereographic projection

حال اگر رابطه (۱۸) را در معادله (۱۵) جایگذاری کنیم با یک محاسبه ساده به روابط

$$x = \frac{\xi\bar{\eta} + \eta\bar{\xi}}{\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}}, y = \frac{\xi\bar{\eta} - \eta\bar{\xi}}{i(\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta})}, z = \frac{\xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta}}{\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}} \qquad (۲۰)$$

می‌رسیم. حال اگر پرتو نور $OP = (۱,x,y,z)$ روی کره S^+ باشد، با توجه به رابطه هم‌ارزی تعریف شده بالا مقدار λ را می‌توان طوری انتخاب کرد که برابر $\frac{\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta}}{\sqrt{۲}}$ باشد و به جای نقطه P از نقطه هم‌ارز آن $R = \lambda P$ استفاده کرد تا عامل کسری معادله به صورت زیر ساده بشود:

$$T = \frac{\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}}{\sqrt{۲}}, X = \frac{\xi\bar{\eta} + \eta\bar{\xi}}{\sqrt{۲}}, Y = \frac{\xi\bar{\eta} - \eta\bar{\xi}}{\sqrt{۲}}, Z = \frac{\xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta}}{\sqrt{۲}} \qquad (۲۱)$$

بر خلاف OP ، نقطه R وابسته به پارامتر تغییر مقیاس (ξ,η) است و فقط نسبت به تاثیر عمل تغییر فاز

$$(\xi,\eta) \to (e^{i\phi}\xi, e^{i\phi}\eta) \qquad (۲۲)$$

ثابت می‌ماند. با توجه با آن چه که در بالا گفته شد می‌توان نشان داد اگر نقطه (ξ,η) را با یک تبدیل خطی به $(\tilde{\xi},\tilde{\eta})$ منتقل کنیم متناظر با آن یک تبدیل لورنتز در فضای مینکوفسکی صورت می‌گیرد. تبدیل خطی در فضای اسپینوری را بصورت

$$\xi \to \tilde{\xi} = \alpha\xi + \beta\eta, \eta \to \tilde{\eta} = \gamma\xi + \delta\eta \qquad (۲۳)$$

است که نمایش متناظراین تبدیل خطی در رابطه زیر داده شده است.

$$\begin{pmatrix}\tilde{\xi}\\ \tilde{\eta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \quad , \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq ۰ \qquad (۲۴)$$

ماتریس فوق را A می‌نامیم و به تبدیل فوق یک تبدیل اسپینی می‌گوییم. به راحتی می‌توان بررسی کرد که ترکیب دو تبدیل اسپینی، یک تبدیل اسپینی خواهد بود که ماتریس مربوط به آن از حاصلضرب ماتریسی دو تبدیل دیگر بدست می‌آید. همچنین اگر شرط نرمال بودن دترمینان A را (یعنی $\alpha\delta - \beta\gamma = ۱$) به مسئله اضافه کنیم، آنگاه این ماتریس دارای یک عنصر وارون بصورت

$$A^{-۱} = \begin{pmatrix}\delta & -\beta\\ \gamma & \alpha\end{pmatrix} \qquad (۲۵)$$

می‌شود. در نتیجه ماتریس‌های تبدیلات اسپینی با شرط اضافه نرمال بودن تشکیل یک گروه جبری می‌دهند و با محاسبه نسبتا ساده می‌توان نشان داد که‌این گروه با گروه $SL(۲,\mathbb{C})$ یکریخت است. خواننده علاقه مند می‌تواند برای آشنایی بیشتر با نحوه‌این محاسبه به [۶] مراجعه کند. حال می‌توان اثر یک تبدیل اسپینی را بر روی تغییر مختصاتی دکارتی (T,X,Y,Z) متناظر به آن در فضای مینکوفسکی محاسبه کرد. با درنظر گرفتن (۲۱) می‌توان (ξ,η) را برحسب این

مختصات دکارتی حساب کرد و به عبارت

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} T+Z & X+iY \\ X-iY & T-Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi\bar{\xi} & \xi\bar{\eta} \\ \eta\bar{\xi} & \eta\bar{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\xi} & \bar{\eta} \end{pmatrix} \tag{۲۶}$$

رسید. اگر دترمینان ماتریس فوق را بدست آوریم طول لورنتز یک بردار با ضریب $\frac{1}{2}$ و با مختصات (T,X,Y,Z) به دست می‌آید. حال اگر تبدیل خطی اسپینی A را در فضای $\mathbb{CP}^1$ بر روی زوج (ξ,η) اثر داده تا به زوج $(\bar{\xi},\bar{\eta})$ برسیم، دستگاه مختصات دکارتی (T,X,Y,Z) نیز تغییر یافته و به $(\tilde{T},\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z})$ تبدیل می‌شود. برای بدست آوردن رابطه صریح‌این تبدیل کافیست معادلات زیر را

$$(\tilde{\bar{\xi}}\ \tilde{\bar{\eta}}) = (\bar{\xi}\ \bar{\eta})A^*, \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \tag{۲۷}$$

در رابطه (۲۶) جایگذاری کنیم (که دراینجا A^* کهاد مزدوج[۲۴] مختلط ماتریس A است) خواهیم داشت

$$\begin{pmatrix} T+Z & X+iY \\ X-iY & T-Z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{T}+\tilde{Z} & \tilde{X}+i\tilde{Y} \\ \tilde{X}-i\tilde{Y} & \tilde{T}-\tilde{Z} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} T+Z & X+iY \\ X-iY & T-Z \end{pmatrix}A^* \tag{۲۸}$$

ویژگی منحصر بفرد تبدیلات اسپینی‌این است که طول بردارها را ناوردا نگه می‌دارند. چرا که اگر $U = Tt - Xx - Yy - Zz$، یک بردار دلخواه در پایه متعامد یکه (t,x,y,z) باشد آنگاه طول آن برابر است با

$$U = T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2$$

حال اگر تبدیل اسپینی (۲۸ را اعمال کنیم، اندازه بردار جدید در دستگاه مختصاتی جدید برابر می‌شود با

$$\begin{aligned} ||\tilde{U}|| &= \det(A\begin{vmatrix} T+Z & X+iY \\ X-iY & T-Z \end{vmatrix}A^*) \\ &= \det(A)\det(A^*)(T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2) \\ &= ||U|| \end{aligned} \tag{۲۹}$$

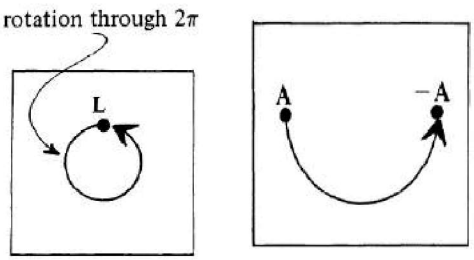
اما از آن‌جا که $\det A^* = \frac{1}{\det A}$ همیشه برای ماتریس‌های وارون‌پذیر درست است پس طول بردارها تحت این تبدیلات اسپینی ثابت می‌ماند.

اثبات نتایج زیر از حوصله‌این بحث خارج است اما خواننده علاقه‌مند می‌تواند برای درک بهتر مسئله به منبع اصلی مراجعه کند.

نتیجه ۱. *متناظر با هر تبدیل اسپینی یک و فقط یک تبدیل لورنتز محدود شده وجود دارد و برای هر تبدیل لورنتز محدود شده دقیقا دو تبدیل اسپینی وجود دارد که یکی منفی دیگری است.*

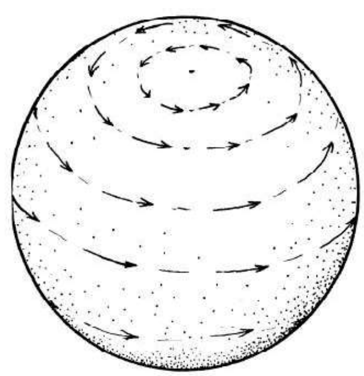
[۲۴] conjugate transpose

نتیجه ۲. *هر تبدیل اسپینی یکه ($\det A = 1$) مربوط به یک دوران ویژه[۲۵] یکتا در S^+ است. برعکس هر دوران ویژه از S^+ متناظر با دقیقا دو تبدیل اسپینی یکه است که یکی از آن ها منفی دیگری است.*



می‌توان نشان داد که فضای $\mathbb{CP}^1$ با کره S^2یکریخت است. پس می‌توان آن را به عنوان یک منیفلد در نظر گرفت که در قسمت پایانی این بخش به ویژگی‌های خاصی از آن می‌پردازیم.

همان گونه که قبلا گفته شد تبدیلات خطی-کسری [۲۶] که بر روی فضای $\mathbb{CP}^1$ اثر می‌کنند را می‌توان در حالت کلی بصورت $\frac{\alpha z+\beta}{\theta z+\delta}$ در نظر گرفت که $z \in \mathbb{C}$. اگر شرط $\alpha\delta - \beta\theta = 1$ را اضافه کنیم‌ایزومتری‌های‌این فضا بدست می‌آید. اگر نقطه ثابت‌این تبدلات اسپینی را بدست آوریم به یک معادله با دو ریشه می‌رسیم که از لحاظ هندسی همان نقاط پادقطبی هستند واین تبدیلات از لحاظ هندسی دوران کروی نسبت به محور بین این دو نقطه است.



به هر چهار نقطه مانند $\{\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4\}$ می‌توان کمیت χ نسبت داد که تحت به تبدیلات اسپینی ناوردا است و از رابطه

$$\chi = \{\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4\} = \frac{(\zeta_1-\zeta_2)(\zeta_3-\zeta_4)}{(\zeta_1-\zeta_4)(\zeta_3-\zeta_2)} \tag{۳۰}$$

به دست می‌آید. اگر مقدار χ عددی حقیقی باشد آن‌گاه هر چهار نقطه بر روی یک دایره قرار گرفته اند. پس با دانستن مقدار سه نقطه

[۲۵] proper rotation
[۲۶] linear fractional

و χ که می‌توان آن را با توجیهات فیزیکی بدست آورد همیشه مقدار چهارم را بطور دقیق مشخص کرد. همچنین به‌این فضا می‌توان یک متریک به صورت

$$\mathrm{d}s^۲ = \frac{۴\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\bar{\xi}}{(\xi\bar{\xi}+۱)^۲} \qquad (۳۱)$$

حال اگراین متریک را برحسب مختصات دکارتی بنویسیم، با یک محاسبه نسبتا طولانی می‌توان نشان داد که انحنای اسکالراین فضا ثابت و برابر منفی یک است. با استفاده از قضیه گاوس بونت[۲۷] می‌توان نشان داد که مجموع زوایای مثلث در چنین فضایی کمتر از π است. خواننده علاقه‌مند برای آشنایی بیشتر با ویژگی‌های این فضا می‌تواند به منبع (۷) مراجعه کند.

۴.۱ دیدگاه هندسی بردارهای فضایی و رابطه آن ها با فضای اسپین

فرض کنیم مختصات اسپینی $\zeta = (\xi, \eta)$ داده شده باشد. با توجه به رابطه (۲۲) می‌توان دستگاه مختصاتی دکارتی متناظرش را بدست آورد. آما از انجا که مختصات اسپینی تحت تبدیل فاز (۲۲) ناوردا هستند با اثر دادن آن ها کره نورگونه S^+ بدون تغییر باقی می‌ماند. هدف ما این است که ساختار جدیدی را به مفهوم اسپینی اضافه کنیم که برای هر جفت (ξ, η) یک دستگاه مختصات منحصر بفرد در فضای مینکوفسکی وجود داشته باشد. این ساختار جدید باید به گونه‌ای باشد که ماهیتش با تغییر مختصات اسپینی در فضای $\mathbb{CP}^۱$ که متناظرش یک تبدیل passive Lorentz transformation است (که منجر به تغییر دستگاه مختصاتی در فضای مینکوفسکی می‌شود) تغییری نکند. درست مانند همان تعریفی که از یک شی برداری یا تانسوری در هندسه معمولی داریم .

برای این کار ابتدا فضای τ^+ را در نظر می‌گیریم که همان فضای مسیرهای نورگونه در جهت افزایش بردار زمانی فضا است. از طرف دیگر با توجه به آنچه که در بخش‌های قبلی گفته شد $\zeta = \frac{xi}{\eta}$ و با توجه به رابطه هم‌ارزی که در فضای تصویر بین نقاط وجود دارد کلاس $[\xi, \eta]$ یک نقطه منحصر بفرد را در فضای مینکوفسکی مشخص نمی‌کند بلکه شامل تمام نقاطی است که از خط واصل بین مبدأ و ζ عبور می‌کند.

برای آن‌که (ξ, η) یک نقطه منحصر بفرد را مشخص کند، یک فضای برداری حقیقی مقدار L در نقطه داده شده P در امتداد بردارهای نورگونه به ساختار (ξ, η) اضافه می‌کنیم. حال سعی می‌کنیم ساختار مختلط القا شده فضای مماسی L را به فضای مماس حقیقی تبدیل کنیم.این فضا توسط دو بردار مستقل

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y, \mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - i\mathrm{d}y \qquad (۳۲)$$

تولید می‌شود. می‌توان با استفاده از مفهوم متریک فضای اقلیدسی، بر روی‌این فضای مماسی مختلط متریکی تعریف کرد که فضای بردارها و هم بردار در روابط کانونی

$$\langle \mathrm{d}z, \frac{\partial}{\partial z}\rangle = ۱, \langle \mathrm{d}\bar{z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\rangle = ۱ \qquad (۳۳)$$

صدق کند. اگر بگیریم $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{۱}{۲}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$ داریم:

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{d}z, \frac{\partial}{\partial z}\rangle &= \langle \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y, \frac{۱}{۲}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})\rangle \\ &= \frac{۱}{۲}(\langle \mathrm{d}x, \frac{\partial}{\partial x}\rangle + \langle \mathrm{d}y, \frac{\partial}{\partial y}\rangle \\ &= ۱ \end{aligned} \qquad (۳۴)$$

به همین صورت برای $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{۱}{۲}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}) \qquad (۳۵)$$

پس فضای L را می‌توان در حالت کلی به صورت ترکیب خطی ازاین دو هم بردار

$$L = \lambda\frac{\partial}{\partial \zeta} + \bar{\lambda}\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \qquad (۳۶)$$

در نظر گرفت. مقدار λ باید بگونه‌ای تغییر کند که اولا ساختار بالا حقیقی مقدار باشد همچنین هنگامی‌که با یک تبدیل اسپینی خطی از (ξ, η) به $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ برویم ساختار برداری بالا تغییری نکند یعنی

$$\tilde{\lambda}\frac{\partial}{\partial \tilde{\zeta}} + \bar{\tilde{\lambda}}\frac{\partial}{\partial \bar{\tilde{\zeta}}} = \lambda\frac{\partial}{\partial \zeta} + \bar{\lambda}\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \qquad (۳۷)$$

همچنین با توجه به معادلات اسپینی

$$\tilde{\xi} = \alpha\xi + \beta\eta, \tilde{\eta} = \gamma\xi + \delta\eta, \tilde{\zeta} = \frac{\alpha\zeta + \beta\eta}{\gamma\zeta + \delta\eta} \qquad (۳۸)$$

و جایگذاری ان در (۳۷) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} &= (\frac{\alpha(\gamma\zeta+\delta) - \gamma(\alpha\zeta+\beta)}{(\gamma\zeta+\delta)^۲})\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \\ &= (\gamma\zeta+\delta)^{-۲}\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \\ &= \eta^۲\tilde{\eta}^{-۲}\frac{\partial}{\partial \tilde{\zeta}} \end{aligned} \qquad (۳۹)$$

و چون تبدیل اسپینی فوق یکه[۲۸] است پس در رابطه $\alpha\delta - \beta\gamma = ۱$ صدق می‌کند. با جایگذاری‌این معادله در (۳۹) نتیجه مهم زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{\lambda}\tilde{\eta}^۲ = \lambda\eta^۲ \qquad (۴۰)$$

[۲۷] Gauss-Bonnet

[۲۸] unitary

برای راحتی کار $\lambda = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\eta^{-2}$ انتخاب می‌کنیم. درنتیجه ساختار برداری L بفرم نهایی

$$L = \frac{-1}{\sqrt{2}}\left(\eta^{-2}\frac{\partial}{\partial\zeta} + \bar{\eta}^{-2}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\right) \qquad (۴۱)$$

نوشته می‌شود. به‌این ترتیب اگر L در نقطه دلخواه P به عنوان یک عملگر داده شده باشد، با دانستن مختصاتش در فضای مینکوفسکی و با استفاده از (۲۶) می‌توان نقطه متناظرش در فضای $\mathbb{CP}^1$ یعنی ζ را با اختلاف یک علامت بدست آورد چرا که‌این فضا یک پوشش دو لایه برای فضای مینکوفسکی است. اما از آن جا که ضرایب L معلوم هستند می‌توان $(\xi\eta\&\zeta^2)$ را نیز به دست آورد و در نتیجه (ξ,η) با اختلاف یک علامت تعیین می‌گردد.

برای تعریف چنین ساختاری می‌توان یک روش هندسی و معادل بااین تعریف را بدست آورد. دوباره فرض کنیم P نقطه‌ای دلخواه در فضای τ^+ باشد و $\zeta = (\xi,\eta)$ نقطه متناظر آن در فضای اسپینی باشد و فرض کنیم نقطه P' دراین فضا بر روی یک خم هموار به سمت P میل کند. همچنین متناظر با P' عبارت $(\tilde{\xi},\tilde{\eta})$ در فضای $\mathbb{CP}^1$ است. وقتی P' به اندازه کافی به P نزدیک شد می‌توان مختصاتش را بر حسب P' بیان کرد. حال تبدیل زیر را به عنوان تبدیل مختصاتی در فضای اسپینی تعریف می‌کنیم:

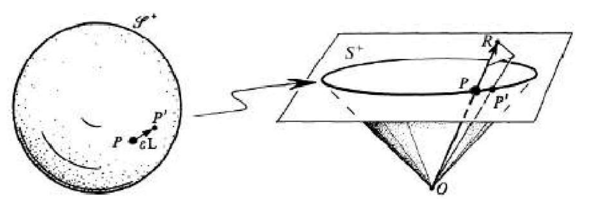
$$\zeta' = \zeta - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}\eta^2} \qquad (۴۲)$$

که دراینجا ϵ مقدار مثبت بسیار کوچکی است که از مربع آن می‌توان چشم پوشی کرد. حال اگر بردار واصل بین این دو نقطه را تعریف کنیم:

$$L = \lim_{\epsilon\to 0} \vec{PP'} \qquad (۴۳)$$

برای هر f دلخواه که $f \in C^\infty(\mathbb{CP}^1, C)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\{f_{p'} - f_p\} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left\{f\left(\zeta - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}\eta^2}, \bar{\zeta} - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}\bar{\eta}^2}\right) - f(\zeta,\bar{\zeta})\right\} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}}\left(\eta^{-2}\frac{\partial}{\partial\zeta} + \bar{\eta}^{-2}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\right)f \\ &:= Lf \end{aligned} \qquad (۴۴)$$



همان گونه که مشاهده می‌شود با انتخاب هر کدام از تعاریف عملگری و ناوردا بودن ساختاری به یک عبارت برای بیان فضای برداری می‌رسیم و می‌توانیم توسط عبارت

$$L = \frac{-1}{\sqrt{2}}\left(\eta^{-2}\frac{\partial}{\partial\zeta} + \bar{\eta}^{-2}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\right) = L^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \qquad (۴۵)$$

این مفهوم برداری را با نمایش ساختار طبیعی یک بردار مماس در فضای مینکوفسکی که برحسب مؤلفه‌های مختصاتی $\{x^\alpha\}$ بیان می‌شود مربوط ساخت. با توجه به رابطه (۱۵)

$$t = 1, x = \frac{\zeta+\bar{\zeta}}{1+\bar{\zeta}\zeta}, y = \frac{\zeta-\bar{\zeta}}{i(1+\bar{\zeta}\zeta)}, z = \frac{\bar{\zeta}\zeta-1}{1+\bar{\zeta}\zeta} \qquad (۴۶)$$

مؤلفه‌های L^α را بر حسب ζ و $\bar{\zeta}$ نوشت که دراین صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial\zeta} &= 0 \\ \frac{\partial x}{\partial\zeta} &= \frac{1-\bar{\zeta}^2}{(1+\zeta\bar{\zeta})^2} \\ \frac{\partial y}{\partial\zeta} &= \frac{1+\bar{\zeta}^2}{i(1+\zeta\bar{\zeta})} \\ \frac{\partial z}{\partial\zeta} &= \frac{2\bar{\zeta}}{(1+\zeta\bar{\zeta})^2} \end{aligned} \qquad (۴۷)$$

با جایگذاری $\zeta = \frac{\xi}{\eta}$ در (۴۵) مؤلفه‌های L^α را می‌توان بر حسب مختصات فضایی عبارت زیر نوشت

$$\begin{aligned} L^0 &= 0 \\ L^1 &= \frac{\xi^2+\bar{\xi}^2-\eta^2-\bar{\eta}^2}{\sqrt{2}(\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta})^2} \\ L^2 &= \frac{\xi^2-\bar{\xi}^2+\eta^2-\bar{\eta}^2}{\sqrt{2}i(\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta})} \\ L^3 &= \frac{-\sqrt{2}(\xi\eta+\bar{\xi}\xi)}{(\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta})^2} \end{aligned} \qquad (۴۸)$$

و همچنین می‌توان به‌این بردار فضایی نرم فضای مینکوفسکی بر اساس مؤلفه‌های L^α نسبت داد. با محاسبه‌ای ساده ولی نسبتا طولانی می‌توام نشان داد

$$||L|| = L^aL^b\eta_{ab} = L^aL_a = \frac{-2}{(\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta})^2} \qquad (۴۹)$$

۵.۱ مفهوم بردار اسپینی

در قسمت قبل دیدیم که چگونه با اضافه کردن یک مفهوم انتزاعی به عنوان یک ساختار برداری بر روی فضای مینکوفسکی (که ازاین پس با نام پرچم[۲۹] از آن یاد می‌کنیم) می‌توان یک تناظر یک به یک بین فضای اسپینی و فضای مختصاتی برقرار کنیم. دراین بخش می‌خواهیم ازاین مفهوم استفاده کرده و برای فضای $\mathbb{CP}^1$ یک ساختار برداری تعریف کنیم. همچنین با استفاده از شهود هندسی بدست آمده مفهوم اسرار آمیز اسپین $\frac{1}{2}$ را توضیح می‌دهیم. دراین بخش به

[۲۹] flag

راستای نورگونه‌ای که فضای مماس تعریف شده در قسمت قبل را ستون پرچمی[۳۰] و فضای محدود شده توسط ژئودزیک‌های نورگونه در لحظه t ثابت صفحه ستونی[۳۱] می‌گوییم. ابتدا انتقال

$$(\xi,\eta)\to(\lambda\xi,\lambda\eta) \qquad (۵۰)$$

را در فضای $\mathbb{CP}^{۱}$ در نظر می‌گیریم که λ یک عدد مختلط مخالف صفر است. اثراین انتقال جهت ستون پرچمی‌را تغییر نمی‌دهد اما ممکن است راستای ستون پرچمی‌تغییر داده یا امتداد صفحه ستونی را گسترش دهد و یا ترکیبی ازاین دو باشد که در شکل زیر نمایش داده شده است و کاملا به مقدار λ بستگی دارد.

λ را می‌توان بر حسب مختصات قطبی به صورت

$$\lambda = re^{i\theta}; r,\theta\in\mathbb{R}, r\rangle ۰$$

نمایش داد و تاثیر هرکدام از متغیرهای آن را به صورت مجزا بررسی کرد.

۱) اگر $\theta = ۰$ باشد آن‌گاه λ به عددی حقیقی و مثبت تبدیل می‌شود که عمل آن بر روی زوج (ξ,η) صفحه ستونی را تغییر نمی‌دهد اما طول ستون پرچمی‌را به اندازه $r^{۲}$ افزایش می‌دهد.

۲) اگر $r = ۱$ در نظر بگیریم λ به عددی موهومی‌محض با طول واحد و فاز θ تبدیل می‌شود و اثر آن بر جفت (ξ,η) در ستون پرچمی تغییری‌ایجاد نمی‌کند اما باعث می‌شود صفحه ستونی که‌این بردار قرار گرفته به اندازه ۲θ در جهت حرکت خلاف عقربه‌های ساعت دوران کند. برای بیان‌این مسئله ابتدا نقطه P را ثابت در نظر گرفته و نقطه Q را که به صورت یک تغییر فاز به اندازه $\theta\delta$ (تغییر بسیار کوچک در زاویه) در جهت مثبت مثلثاتی و بسیار نزدیک به P در نظر می‌گیریم. حال اگر توصیف هندسی که برای یک بردار در بخش قبل در فضای اسپینی ارائه شد در نظر بگیریم

$$\zeta' = \zeta - \frac{\epsilon}{\sqrt{۲}\eta^{۲}} \qquad (۵۱)$$

و $\eta\to\lambda\eta$ تبدیل کنیم به رابطه‌ی جالب

$$\eta^{-۲}\to r^{-۲}e^{-۲i\theta}\eta^{-۲} \qquad (۵۲)$$

می‌رسیم. به وضوح راستای ستون پرچمی‌متناظر بااین تغییر اسپینی در فضای مینکوفسکی به اندازه ۲θدوران یافته است. حال اگر تغییر پیوسته حاصل ازاین انتقال را به صورت

$$(\xi,\eta)\to(e^{i\theta}\xi, e^{i\theta}\eta) \qquad (۵۳)$$

انجام دهیم و مقدار θ را در طول بازه‌ی $\pi\rangle\theta\rangle ۰$ تغییر دهیم، ستون پرچمی‌به اندازه ۲π دوران می‌کند و در محل اولیه اش قرار می‌گیرد اما در فضای اسپینی (ξ,η) به $(-\xi,-\eta)$ تبدیل می‌شود و دوران به اندازه π لازم است تا به محل اولیه اش بازگردد. امااین تبدیل باعث می‌شود که ستون پرچمی‌به اندازه ۴π در فضای مینکوفسکی دوران کند.

به چنین اشیائی در ریاضیات دوپوش[۳۲] می‌گویند. برای درک شهودی بهتراین مسئله دو سکه بردارید. یکی را روی محیط دیگری بچرخانید. هنگامی‌که مسیر به اندازه π چرخیده شد سکه چرخنده یک دور کامل حول مرکزش می‌چرخد اما نقطه‌ای که روی آن قرار می‌گیرد با نقطه شروع حرکت یکسان نیست و در واقع نقطه پادقطبی است. و اگر دوبار مسیر حرکت را ادامه دهیم و به نقطه اولیه بازگردیم

مراجع

[1] Relativistic physics in Clifford Algebra $cl(1,3)$, Niels Gresnigt

[2] Clifford Algebra and Spinors, Cambridge press

[3] Spin geometry, Michelson and Morely

[4] Space time and singularity, Cambridge mathematics society

[5] Algebraic curves, Griffiths

[6] Spinors and Twistors, Cambridge mathematics society

[7] Hyperbolic geometry, puplished by Springer

[8] Characteristic classes, Milnor

[۳۰] flag pole
[۳۱] flag plane
[۳۲] two fold