آنالیز روی خمینه‌ها (قسمت دوم)

احمدرضا حاج سعیدی صادق

۱ عملگرهای وینر-هوپف

در قسمت قبل مقاله[۱]، به بررسی عملگرهای فردهلم پرداختیم. توانستیم ثابت کنیم یک اختلال در این عملگرها توسط یک عملگر فشرده یا یک عملگر کراندار با نرم به اندازه کافی کوچک، اندیس، آنها را تغییر نمی‌دهد. همچنین دیدیم که هر عدد صحیح یک مولفه همبندی یکتا در فضای عملگرهای فردهلم مشخص می‌کند.
در این قسمت به بررسی رده‌ای از عملگرهای فردهلم به نام عملگرهای وینر-هوپف[۲] می‌پردازیم. به ویژه خواهیم دید که اندیس این عملگرها که کاملاً تحلیلی تعریف شده است، برابر یک کمیت تماماً توپولوژیک است. به همین دلیل جدی‌ترین حرکت در نظریه اندیس با این قضیه که به "فرمول گسسته اندیس گوبرگ-کرین"[۳] (۱۹۵۶) مشهور است، آغاز شد و به "فرمول اندیس عطیه-سینگر"[۴] (۱۹۶۳) که حالت کلی آن روی خمینه‌هاست بدل شد. در ابتدا تعاریف و قضایای ابتدایی را تا حد نیاز بیان می‌کنیم، سپس به اثبات قضیه اصلی و برخی حالت کلی آن می‌پردازیم.
در این مقاله با فضاهای خطی زیر به طور نزدیکی سر و کار داریم (X یک فضای توپولوژیک به همراه یک اندازه روی آن است):
(۱) $C^0(X)$ فضای توابع پیوسته با مقادیر مختلط روی X با نرم سوپریمم، $\| f \|_\infty = \sup\{| f(x) | \mid x \in X\}$
(۲) $L^1(X)$ فضای توابع با مقادیر مختلط مطلقاً انتگرالپذیر روی X با نرم $\| f \|_1 = \int_X | f |$
(۳) $L^2(X)$ فضای توابع با مقادیر مختلط مربع انتگرالپذیر روی X با ضرب داخلی $\langle f, g\rangle_2 = \int_X f\bar{g}$
ممکن است خواننده با نظریه اندازه آشنا نباشد، اما جایی برای نگرانی نیست، چون ما با فضاهای متریک آشنایی مثل $X = S^1$ (دایره واحد در $\mathbb{R}^2$ یا $\mathbb{C}$) و $X = \mathbb{R}^n$ کار خواهیم کرد.

مثال ۱. *فضاهای $C^0(S^1)$، $L^1(S^1)$ و $L^1(\mathbb{R}^n)$ فضاهایی باناخ‌اند. همچنین $L^2(S^1)$ و $L^2(\mathbb{R}^n)$ فضاهایی هیلبرت‌اند.*

مثال ۲. *$L^2(S^1)$ یک پایه شادر طبیعی دارد: $\{z^n | n \in \mathbb{Z}\}$. زیرفضای هیلبرتی که توسط $\{z^n | n \geq k\}$ تولید می‌شود ($\overline{Span\{z^n | n \in \mathbb{Z}\}}$) را با H_k نمایش می‌دهیم. عملگر تصویر متعامد $L^2(S^1)$ روی H_0 را نیز با P نشان می‌دهیم.*

[۱] مجله ریاضی شریف، شماره ۴، بهار ۹۲
[۲] Wiener-Hopf Operators
[۳] Discrete Gohberg-Krein Index Formula
[۴] Atiyah-Singer Index Formula

تعریف ۳. *فرض کنیم $f \in C^0(S^1)$ و $M_f : L^2(S^1) \to L^2(S^1)$ عملگر ضرب در f باشد وهمچنین $i : H_0 \to L^2(S^1)$ عملگر شمول. عملگر کراندار T_f روی H_0 را توسط ترکیب $P \circ M_f \circ i$ تعریف می‌کنیم و به آن عملگر (گسسته) وینر-هوپف یا عملگر توپلیتز[۵] وابسته به f می‌گوییم.*

از تعریف واضح است که عملگر $T : C^0(S^1) \to B(H_0)$، $f \mapsto T_f$، یک عملگر کراندار است و $\| T_f \| \leq \| f \|_\infty$.
از این پس برای هر $u \in L^2(S^1)$ می‌توان نمایش $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{u}(n)z^n$ را در نظر گرفت که در آن $\widehat{u}(n) = \langle u, z^n\rangle_2$ را ضریب فوریه n-ام می نامیم. بنابراین برای $u \in H_0$، خواهیم داشت:

$$\widehat{T_f(u)}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(n-k)\widehat{u}(k)$$

برای راحتی $B(H_0)$ را با $\mathcal{B}$ نمایش می‌دهیم و $\mathcal{K}$ زیرفضای عملگرهای فشرده در $\mathcal{B}$ فرض می‌کنیم. نگاشت تصویر $\pi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}/\mathcal{K}$ را در نظر بگیرید. نشان خواهیم داد $\pi T(fg) = \pi T(f)\pi T(g)$.
از مقاله قسمت اول می دانیم π عملگری پیوسته است؛ پس πT نیز پیوسته است. از آنجا که هرعضو از $C^0(S^1)$ را می توان با عناصری از $C^0(S^1)$ که تعداد متناهی ضرایب فوریه ناصفر دارد، تقریب زد، کافی است حکم فوق را برای f و g هایی ثابت کنیم که هر دو تعداد متناهی ضریب فوریه ناصفر دارند. پس فرض کنیم $f = \sum_{t=-m}^{m} \widehat{f}(t)z^t$ و $g = \sum_{t-n}^{n} \widehat{g}(t)z^t$. از آنجا که $\widehat{fg}(p) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(p-k)\widehat{g}(k)$ برای $k \geq m+n$ داریم

$$T_fT_g(z^k) = T_f(\sum_{t=-n}^{n} \widehat{g}(t)z^{t+k}) = \sum_{t=-n}^{n}\sum_{s=-m}^{m} \widehat{f}(s)\widehat{g}(t)z^{s+t+k} = T_{fg}(z^k)$$

بنابراین $T_fT_g |_{H_{m+n}} = T_{fg} |_{H_{m+n}}$. با توجه به شمول $H_{m+n} \subset H_0$، $codim(H_{m+n})$ متناهی است ، و در نتیجه $T_fT_g - T_{fg}$ عملگری از رتبه متناهی است. پس از مقاله قبلی می‌توان نتیجه گرفت $\pi T(fg) = \pi T(f)\pi T(g)$.
اکنون قدم بعدی را برمی‌داریم. به وضوح $\pi T(1) = \pi(Id) = \{Id + K \mid K \in \mathcal{K}\}$. بنابراین اگر $f \in C^0(S^1)$ همه جا ناصفر باشد، داریم:

$$\pi T(f)\pi T(f^{-1}) = \pi T(1) = \pi(Id)$$

و نتیجه می‌گیریم $\pi(T_f)$ وارون پذیر است و بنابر قسمت قبل مقاله T_f یک عملگر فردهلم است. اکنون به محاسبه اندیس این عملگر می‌پردازیم. به‌ازای $n \in \mathbb{Z}$ داریم $T_{z^n}(z^k) = z^{n+k}$؛ پس $T_{z^n} = (shift^+)^n$ یا $T_{z^n} = (shift^-)^{|n|}$(عملگر $shift$ در مقاله قبل معرفی شده‌بود) و بنابراین $index(T_{z^n}) = -n$. اکنون فرض کنیم $f \in C^0(S^1)$ همه‌جا ناصفر باشد. اما از توپولوژی یا توپولوژی دیفرانسیلی می‌دانیم که می‌توان f را به طور پیوسته با گذر از توابع همه‌جا ناصفر به z^m تبدیل کرد که در آن $m = W(f, 0)$ [۶]. منظور از $W(f, 0)$ عددچرخش f حول 0 است. چون T پیوسته است و از آنجا که تغییرات پیوسته یک تابع فردهلم اندیس آن را تغییر نمی‌دهد پس

[۵] Toeplitz Operator
[۶] عدد چرخش حول صفر برای یک تابع مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته مانند $f : S^1 \to \mathbb{C} - \{0\}$ با تساوی $W(f, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S^1} \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$ داده می‌شود.

$$index(T_f) = -W(f,۰)$$

پس ما توانستیم قضیه معروف زیر را ثابت کنیم:

قضیه ۴. *(فرمول گسسته اندیس گوبرگ-کرین)اگر $f \in C^۰(S^۱)$ همه‌جا ناصفر باشد آنگاه T_f عملگری فردهلم با اندیس $-W(f,۰)$ است.*

همان طور که در این قضیه مشاهده می‌کنیم اندیس عملگر T_f که یک کمیت تحلیلی است برابر عدد چرخش نگاشت f گردید که یک کمیت توپولوژیک است و تنها به کلاس هموتوپی این نگاشت بستگی دارد. در بحث‌های پیشرفته‌تر در نظریه اندیس کمابیش همین دیدگاه حاکم است؛ برای مثال اندیس عملگر دیراک[۷] را بر حسب انتگرال کلاس‌های مشخصه[۸] خمینه و مشخصه نسبی چرن[۹] کلاف کلیفورد[۱۰] بدست می‌آوریم که به قضیه اندیس عطیه-سینگر مشهورست. در اینجا پیوندی از آنالیز(اندیس عملگر) و توپولوژی(کلاس‌های مشخصه) دیده می‌شود.

فرض کنیم H یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر و N یک عدد طبیعی باشد. به راحتی می‌توان دید که $H\otimes\mathbb{C}^N$ نیز ساختار یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر را داراست. اکنون با فرض $H = L^۲(S^۱)$، نگاشت تصویر $\overline{P} : L^۲(S^۱)\otimes\mathbb{C}^N \to H_۰\otimes\mathbb{C}^N$ به طور طبیعی تعریف می‌شود. برای نگاشت پیوسته $f : S^۱ \to GL(N,\mathbb{C})$ نگاشت ضرب‌درf، $M_f : L^۲(S^۱)\otimes\mathbb{C}^N \to L^۲(S^۱)\otimes\mathbb{C}^N$، را مشابه قبل تعریف می‌کنیم. نگاشت شمول $H_۰\otimes\mathbb{C}^N$ در $L^۲(S^۱)\otimes\mathbb{C}^N$ را با i نمایش می‌دهیم. عملگر وینر-هوپف متناظر با f را با $T_f : H_۰\otimes\mathbb{C}^N \to H_۰\otimes\mathbb{C}^N$ نشان می‌دهیم و برابر $\overline{P}\circ M_f\circ i$ تعریف می‌کنیم.اکنون حالت تعمیم یافته قضیه قبل را بیان می‌کنیم:

قضیه ۵. *برای هر نگاشت پیوسته $f : S^۱ \to GL(N,\mathbb{C})$، T_f عملگری فردهلم است و اندیس آن تنها به کلاس هموتوپی آن در $[S^۱, GL(N,\mathbb{C})]$ وابسته است و برابر است با $-W(\det(f),۰)$.*

اثبات فردهلم بودن حدوداً مشابه قضیه قبل است : نمایش $(u_۱,\cdots,u_N)$ را برای اعضای $H_۰\otimes\mathbb{C}^N$ در نظر می‌گیریم. f را هم با $[f_{ij}]$ نشان می‌دهیم. مانند قبل f و g هایی را در نظر می‌گیریم که f_{ij} و g_{ij}ها متناهی ضرایب فوریه ناصفر دارد و $f_{ij} = \sum_{t=-m}^{m}\widehat{f_{ij}}(t)z^t$ و $g_{ij} = \sum_{t=-n}^{n}\widehat{g_{ij}}(t)z^t$. با استدلال مشابه قبل داریم :

$$T_fT_g(z^{k_۱}\cdots,z^{k_N}) = T_{fg}(z^{k_۱}\cdots,z^{k_N})$$

برای $k_۱\cdots,k_N \geq m+n$

بقیه اثبات فردهلم بودن مشابه قبل است. اکنون به سراغ قسمت دوم قضیه می‌رویم. از پیوستگی T نتیجه می‌شود اگر f و g هوموتوپ باشند، آنگاه دو عملگر فردهلم T_f و T_g در یک مولفه همبندی هستند و در نتیجه اندیس برابر دارند. اکنون f_nای را در نظر بگیریم که نمایش زیر را دارد:

$$\begin{pmatrix} z^n & & & \\ & ۱ & & ۰ \\ & & \ddots & \\ ۰ & & & ۱ \end{pmatrix}$$

بنابراین مانند استدلال قضیه قبل اندیس T_{f_n} برابر خواهد بود با $-n$. می توان نشان داد $\pi_۱(GL(N,\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$ و چون اعضای$[S^۱,GL(N,\mathbb{C})]$ را می‌توان به عنوان کلاس‌های تزویجی $\pi_۱(GL(N,\mathbb{C}))$ درنظر گرفت، پس$[S^۱,GL(N,\mathbb{C})] = \mathbb{Z}$(ساختار گروهی القایی از$\pi_۱(GL(N,\mathbb{C}))$ روی $[S^۱,GL(N,\mathbb{C})]$ را در نظر می‌گیریم). پس توابع با نمایش ماتریسی فوق نماینده‌های کلاس‌های هوموتوپی $[S^۱,GL(N,\mathbb{C})]$ هستند. نگاشت پیوسته $H : C^۰(S^۱,GL(N,\mathbb{C})) \to C^۰(S^۱)$ را با ضابطه $f\mapsto \det f$ تعریف می‌کنیم. نگاشت القایی$H_* : [S^۱,GL(N,\mathbb{C})] \to [S^۱,\mathbb{C}\backslash\{۰\}]$ را در نظر می‌گیریم. از آنجا که $H(f_n) = z^n$ پس H_*یک ایزومورفیسم است. بنابر آنچه که تاکنون گفته‌ایم، نتیجه می‌گیریم

$$index(T_f) = -W(\det(f),۰)$$

۲ عملگرهای انتگرالی

در این بخش به بررسی عملگرهای انتگرالی خواهیم پرداخت که اندیس آن‌ها به تبدیل فوریه پیوسته مربوطاند همانطور که عملگرهای فوق به تبدیل فوریه گسسته ارتباط داشتند. به همین دلیل به عملگر وینر-هوپف متناظر به آن را عملگر وینر-هوپف پیوسته می‌گوییم.

برای عملگر $f \in L^۱(\mathbb{R}^n)$ تبدیل فوریه آن، $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x}f(x)dx$$

می‌توان ثابت کرد $\widehat{f} \in C^۰(\mathbb{R}^n)$. همچنین $L^۱(\mathbb{R}^n)$ دارای ضرب جابه‌جایی و شرکت‌پذیر بنام کانولوشن[۱۱] است:

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

تبدیل فوریه و کانولوشن خواص زیر را دارا هستند:

(۱) $\widehat{fg} = \widehat{f*g}$ ، $\widehat{fg} = (\widehat{f} * \widehat{g})$ و $\mathcal{F}^{-۱}(f)(x) = \frac{۱}{(۲\pi)^n}\mathcal{F}(f)(-x)$ اگر f ، g ، $\widehat{f}$ و $\widehat{g}$ همگی متعلق به $L^۲(\mathbb{R}^n)$ باشند.

(۲) $M^pD^q\mathcal{F} = (-۱)^{|q|}\mathcal{F}D^pM^q$ که در آن

(i) $p = (p_۱,\cdots,p_n)$، $q = (q_۱,\cdots,q_n)$ و $|q| = \sum q_i$.

(ii) $M^p(x_۱,\cdots,x_n) := \Pi x_i^{p_i}$.

(iii) $D^q := (-۱)^{|q|}\dfrac{\partial^q}{\partial {x_۱}^{q_۱}\cdots\partial {x_n}^{q_n}}$.

(۳) برای $f,g \in L^۱(\mathbb{R}^n)\cap L^۲(\mathbb{R}^n)$ تساوی پارسوال[۱۲] برقرار است: $\widehat{f},\widehat{g} \in L^۲(\mathbb{R}^n)$ و $\langle f,g\rangle_۲ = (۲\pi)^{-n}\langle\widehat{f},\widehat{g}\rangle_۲$.

(۴) تبدیل فوریه متناظر روی $f \in L^۲(\mathbb{R})$ را با $\widetilde{f}$ نشان می‌دهیم و توسط $\widetilde{F}(f) = \widetilde{f}(\xi) = \frac{d}{d\xi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix\xi}-۱}{-iy}f(x)dx$ تعریف می‌کنیم.

[۷] Dirac Operator
[۸] Charactristic Classes
[۹] Relative Chern Character
[۱۰] Clifford Bundle
[۱۱] Convolution
[۱۲] Parseval's Equality

برای هر $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ می‌توان عملگر $K_\phi = \phi *$ را تعریف کرد اما پیش از همه باید دامنه و برد آن را مشخص کرد:

لم ۶. *نگاشت $K_\phi : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ یک عملگر کراندار است.*

فرض کنیم $f \in L^2(\mathbb{R})$ باید نشان دهیم $K_\phi(f) \in L^2(R)$ و K_ϕ کراندار است:

$$\mid K_\phi(f)(x) \mid^2 \leq \\ (\int_{-\infty}^{\infty} \mid f(y) \mid^2 \mid \phi(x-y) \mid dy)(\int_{-\infty}^{\infty} \mid \phi(x-y) \mid dy) = \\ (\int_{-\infty}^{\infty} \mid f(y) \mid^2 \mid \phi(x-y) \mid dy)(\int_{-\infty}^{\infty} \mid \phi(t) \mid dt)$$

بنابراین

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mid K_\phi(f)(x) \mid^2 dx \leq (\int_{-\infty}^{\infty} \mid \phi(t) \mid dt)(\int_{-\infty}^{\infty} \mid f(y) \mid^2 dy)(\int_{-\infty}^{\infty} \mid \phi(x-y) \mid dx) = \\ (\int_{-\infty}^{\infty} \mid \phi(t) \mid dt)^2 (\int_{-\infty}^{\infty} \mid f(y) \mid^2 dy)$$

پس هر دو حکم ثابت شد.
از این پس K_ϕ را به عنوان عملگری روی فضای هیلبرت $L^2(\mathbb{R}^+)$ و به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$K_\phi(u)(x) = \int_0^\infty \phi(x-y)u(y)dy، \ x \in R^+$$

شاید این تعریف کمی عجیب به نظر برسد؛ اما این تعریف را می‌توان توجیه کرد:
از ضابطه تبدیل کیلی $C : \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\} \to \{z \in \mathbb{C} \mid \mid z \mid < 1\}$ –که z را به $\frac{z-i}{z+i}$ می‌برد– استفاده می‌کنیم و نگاشت $\kappa : \mathbb{R} \to S^1$ را می‌سازیم. اکنون یک ایزومتری $U : L^2(S^1) \to L^2(\mathbb{R})$ با ضابطه $f \mapsto \sqrt{2}\dfrac{f \circ \kappa(x)}{x+i}$ به دست می‌آید و این خاصیت خوب را دارد که زیرفضای هیلبرت $H_0 = \{f \in L^2(S^1) \mid \widehat{f}(n) = 0, n < 0\}$ را به زیرفضای هیلبرت $\widetilde{H_0} : \{g \in L^2(\mathbb{R}) \mid \widehat{g} \mid_{(-\infty,0)} = 0\}$ می‌برد که فضای هیلبرت اخیر با $L^2(\mathbb{R}^+)$ ایزومتر است.
در بخش قبل نگاشت تصویر $P : L^2(S^1) \to H_0$ را تعریف کردیم. نگاشت تصویر متناظر $\widetilde{P} = UPU^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \to \widetilde{H_0}$ را نیز تعریف می‌کنیم. برای $f \in C^0(\mathbb{R})$ ضرب در f را با M_f و نگاشت شمول $\widetilde{H_0} \subset L^2(\mathbb{R})$ را با i نشان می‌دهیم. عملگر (پیوسته) وینر–هوپف متناظر با f، $\widetilde{T_f} : \widetilde{H_0} \to \widetilde{H_0}$ را با رابطه $\widetilde{T_f} = \widetilde{P} \circ M_f \circ i$ تعریف می‌کنیم. اکنون با فرض $g := f \circ \kappa^{-1}$ از تعریف داریم $W_f = U \circ T_g \circ U^{-1}$ ولذا W_f عملگری فردهلم است. اگر $f = z + \widehat{\phi}$ که $z \in \mathbb{C}$ ثابت است. می‌توان نشان داد $\widetilde{W_f(h)} = \widehat{f} * \widetilde{h} = z\widetilde{h} + \int_0^\infty \phi(x-y)\widetilde{h}(y)dy$. بنابراین $zId + K_\phi = \widetilde{F} W_f \widetilde{F}^{-1}$.
پس نتیجه می‌گیریم:

قضیه ۷. *فرض‌کنیم $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ با این فرض که $1 + \widehat{\phi}$ همه جا ناصفر است در این صورت عملگر*

$$Id + K_\phi : L^2(\mathbb{R}^+) \to L^2(\mathbb{R}^+)$$

عملگری فردهلم با اندیس $W(1 + \widehat{\phi}, 0)$ است.

این قضیه که آغاز حرکت به سمت عملگرهای شبه–دیفرانسیلی[13] و عملگرهای بیضوی[14] است، صورتی پیوسته از فرمول گوبرگ–کرین است. عملگرهای بیضوی هسته مرکزی نظریه اندیس هستند و در آینده به تشریح آن‌ها می‌پردازیم.

مراجع

[1] David Bleecker, Bernhelm Booth-Bavnbek, Index Theory, 2012.

[2] John Roe, Elliptic Operators, Topology and Asymptotic Methods, 1998.

[3] E.C.Titchmarsh, Introduction To The Theory Of Fourier Integrals, 1948.

[13] Pseudo-Differential Operators
[14] Elliptic Operators