آیا گوی‌های بازِ توپولوژیک در $\mathbb{R}^n$ دیفئومورف‌اند؟

ک.

مقدمه

فرض کنید D یک n-گوی بازِ توپولوژیک باشد، که یعنی، D زیرمجموعه‌ی بازی در $\mathbb{R}^n$ باشد که با n- گوی باز B^n، همسانریخت است. در این صورت، آیا D با B^n دیفئومورف است؟ پاسخ این سئوالِ طبیعی، بسیار غافل‌گیر کننده است: زمانی که $n \neq ۴$، هر مجموعه‌ی بازی در $\mathbb{R}^n$ که با B^n همسانریخت باشد، C^∞ دیفئومورف با B^n نیز است، اما این گزاره به ازای $n = ۴$ برقرار نیست!

روش‌های اثبات نتایج فوق، غیرمقدماتی هستند. اما اگر n- گوی توپولوژیک مورد نظر، ستاره‌گون باشد، قادریم تا پاسخی مقدماتی برای سئوال فوق بیابیم. در حقیقت با این شرط اضافه، هر n- گوی باز توپولوژیک، C^∞ دیفئومورف با B^n است. هم‌چنین قادریم تا دیفئومورفیسم مورد نظر را به گونه‌ای بسازیم که راستاها را نیز حفظ کند. توجه کنید که در این حالت، هیچ‌گونه محدودیتی روی بعد وجود ندارد.

در ادامه و پس از اندکی نمادگذاری، مراحل ساختن دیفئومورفیسم مورد نظر را تعقیب خواهیم کرد. این مراحل، در قالب مسأله‌هایی تنظیم شده‌اند و پیشنهاد می‌کنیم که پیش از مرور پاسخ‌ها، نخست پاسخ خود را برای آن‌ها بیابید.

نمادگذاری

فرض کنید $||.||$ نرم اقلیدسی در $\mathbb{R}^n$ باشد و برای هر $r > ۰$ تعریف کنید:

$$S_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| = r\}$$

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| < r\}$$

هم‌چنین فرض کنید $\mu : S_۱ \to \mathbb{R}^۱$ تابعی پیوسته باشد که برای هر $\theta \in S_۱$، $\mu(\theta) > ۰$ و مجموعه باز $U_\mu \subset \mathbb{R}^n$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$U_\mu = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = ۰ \text{ یا } ۰ < ||x|| < \mu(x/||x||)\}$$

اگر U_μ به صورت فوق تعریف شده باشد، تابع μ را تابعِ تعریف کننده‌ی U_μ می‌نامیم.

۱

فرض کنید $\mu : S_۱ \to \mathbb{R}^۱$ تابع تعریف کننده U باشد و فرض کنید $r = \inf\{\mu(\theta) \mid \theta \in S_۱\}$ و $R = \sup\{\mu(\theta) \mid \theta \in S_۱\}$. هم‌چنین ثابت $r_۰$ را با $۰ < r_۰ < r$ در نظر بگیرید. در این صورت نشان دهید که دنباله توابع $\{\mu_i : S_۱ \to \mathbb{R}^۱\}_{i=۱}^{\infty}$ وجود دارد به طوری که:

الف) $r_۰ < \mu_۱(\theta) < \mu_۲(\theta) < \cdots$

ب) $\mu_{i+۱}(\theta) - \mu_i(\theta) > ۰$

ج) روی $S_۱$ به صورت یکنواخت $\mu_i \to \mu$.

پاسخ. دنباله‌ی $\{\epsilon_i\}_{i=۱}^{\infty}$ را در نظر بگیرید به طوری که:

(i) $\epsilon_i > ۰$

(ii) $\epsilon_i > \epsilon_{i+۱}$

(iii) $\epsilon_۱ < r - r_۰$

(iv) $\lim_{i\to\infty} \epsilon_i = ۰$

فرض کنید $\delta_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+۱}$. بنابراین $۰ < \delta_i < \epsilon_i$ و به علاوه $\lim_{i\to\infty} \delta_i = ۰$. توابع پیوسته $\tilde{\mu}_i : S_۱ \to \mathbb{R}^۱$ را با $\tilde{\mu}_i = \mu - \epsilon_i + \frac{\delta_i}{۲}$ تعریف کنید. در نتیجه $\tilde{\mu}_i(\theta)$ نقطه میانی بین $\mu(\theta) - \epsilon_i$ و $\mu(\theta) - \epsilon_{i+۱}$ است. برای هر i، فرض کنید $\mu_i : S_۱ \to \mathbb{R}^۱$ تابعی C^∞ باشد چنان که برای هر $\theta \in S_۱$ داشته باشیم $|\mu_i(\theta) - \tilde{\mu}_i(\theta)| < \frac{\delta_i}{۴}$ (وجود چنین تابعی، نتیجه‌ای از قضیه استون-وایرشتراس است). در این صورت $\{\mu_i\}_{i=۱}^{\infty}$ به وضوح در شرایط (الف) تا (ج) صدق می‌کند. □

۲

μ_iها را همان‌هایی بگیرید که در مسأله (۱) به دست آمده‌اند و فرض کنید $\mu_۰ : S_۱ \to \mathbb{R}^۱$ تابع ثابت $\mu_۰ \equiv r_۰$ باشد. هم‌چنین تعریف کنید $r_i = \inf\{\mu_i(\theta) | \theta \in S_۱\}$ و $R_i = \sup\{\mu_i(\theta) | \theta \in S_۱\}$. به علاوه ثابت‌های A_i را به صورت استقرایی با رابطه $A_۱ = R_۱$ و $A_{i+۱} = R_{i+۱}(A_i/r_i)$ تعریف کنید. حال نشان دهید که دنباله‌ی توابع $\{\eta_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^۱\}_{i=۰}^{\infty}$ وجود دارد به طوری که برای هر i، $\eta_i : U \to \mathbb{R}^۱$، C^∞ است و در مختصات قطبی (θ, r) روی $\mathbb{R}^n \backslash \{۰\}$ ($\theta \in S_۱$ و $r > ۰$)، $\eta_i(\theta, r) = \frac{A_i}{\mu_i(\theta)}$ و از آن نتیجه بگیرید که η_i روی شعاع‌ها غیرنزولی است و هم‌چنین روی U، $\eta_i \geq ۱$.

پاسخ. برای هر i فرض کنید $U_i = U_{\mu_i}$ مجموعه‌ای باشد که توسط μ_i تعریف شده است. در این صورت برای هر i، $\bar{U}_i \subset U_{i+1}$ و $U = \cup_{i=1}^{\infty} U_i$. در ضمن توجه کنید که $U_0 = B_{r_0}$ و با توجه به تعریف r_iها و R_iها داریم $r_0 < r_1 < \cdots$ و $R_0 < R_1 < \cdots$. هم‌چنین:

$$\begin{aligned} A_{i+1}/R_{i+1} = A_i/r_i \geq A_i/R_i = A_{i-1}/r_{i-1} \geq \cdots \geq \\ \geq A_1/R_1 = 1 \end{aligned}$$

حال فرض کنید $\alpha : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ یک تابع C^∞ باشد به طوری که:

(i) $\alpha(t) = 0$ اگر $t \leq 0$ و $\alpha(t) = 1$ اگر $t \geq 1$.

(ii) $\alpha'(t) > 0$ اگر $t \in (0,1)$.

هم‌چنین مختصات قطبی (θ, r) در $\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید و توجه کنید که اگر $r > 0$ و θ به یک نقشه مختصاتی روی S_1 محدود شده باشد، آن‌گاه (θ,r) یک نقشه‌ی مختصاتی روی $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ است. دنباله $\{\eta_i\}_{i=0}^\infty$ از نگاشت‌های $\eta_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ را به صورت استقرایی با $\eta_0 = 1$ و

$$\eta_i(\theta,r) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } r = 0 \\ \left(1 - \alpha\left(\frac{r - \mu_{i-1}(\theta)}{\mu_i(\theta) - \mu_{i-1}(\theta)}\right)\right)\eta_{i-1}(\theta,r) & \text{اگر } r \neq 0 \\ \quad + \alpha\left(\frac{r - \mu_{i-1}(\theta)}{\mu_i(\theta) - \mu_{i-1}(\theta)}\right)\frac{A_i}{\mu_i(\theta)} & \end{cases}$$

تعریف کنید.

توجه کنید که به ازای $0 < r \leq \mu_{i-1}(\theta)$ (یعنی $(\theta,r) \in \bar{U}_{i-1}$) داریم $\eta_i(\theta,r) = \eta_{i-1}(\theta,r)$ و هم‌چنین به ازای $r \geq \mu_i(\theta)$ داریم $\eta_i(\theta,r) = \frac{A_i}{\mu_i(\theta)}$. به خصوص زمانی که $0 \leq r < r_0 = R_0$ باشد η_iها متحد ۱ هستند. بنابراین هر $\eta_i : U \to \mathbb{R}^1$ یک تابع C^∞ است. به علاوه اگر $(\theta,r) \in U_i \backslash U_{i-1}$ آن‌گاه $\eta_{i-1}(\theta,r) = A_{i-1}/\mu_{i-1}(\theta)$ و هم‌چنین

$$A_i/\mu_i(\theta) \geq A_i/R_i = A_{i-1}/r_{i-1} \geq A_{i-1}/\mu_{i-1}(\theta)$$

لذا در طول هر شعاع $(\theta,r) \mapsto r$ (θ را ثابت بگیرید)، η_i در هر بازه $[\mu_{i-1}(\theta), \mu_i(\theta)]$ غیرنزولی است و در نتیجه در روی هر شعاعی که از مبدا آغاز می‌شود، غیرنزولی است. هم‌چنین $\eta_i(\theta,0) = 1$ بنابراین روی U، $\eta_i \geq 1$. □

۳

توابع $f_i : U \to \mathbb{R}^n$ را با ضابطه $f_i(\theta,r) = (\theta, \eta_i(\theta,r)r)$ در نظر بگیرید (η_iها همان‌هایی هستند که در مسأله (۲) ظاهر شدند). نشان دهید که $f(x) = \lim_{i\to\infty} f_i(x)$ نگاشتی C^∞ روی U است.

پاسخ. توجه کنید که $f_i(x) = \eta_i(x).x$. لذا f_iها نگاشت‌هایی C^∞ هستند و $f_i|_{\bar{U}_{i-1}} = f_{i-1}|_{\bar{U}_{i-1}}$. فرض کنید $\eta(x) = \lim_{i\to\infty}\eta_i(x)$. با توجه به اینکه $\bar{U}_{i-1} \subset U_i$، $\eta|_{U_i} = \eta_i|_{U_i}$ و $f|_{U_i} = f_i|_{U_i}$ لذا η و f نگاشت‌هایی C^∞ روی U هستند. توجه کنید که تعاریف استقرایی فوق و مسأله‌ی (۲) برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ معتبرند، اما می‌توان انتظار داشت که η و یا f روی $\partial U = \bar{U}\backslash U$ مشتق‌پذیر نباشند، حتی اگر η_iها و f_iها روی آن مشتق‌پذیر باشند. □

۴

به کمک f به دست آمده در مسأله (۳) نشان دهید که اگر $U \subset \mathbb{R}^n$ به وسیله‌ی نگاشت پیوسته‌ی $\mu : S_1 \to \mathbb{R}^1$ تعریف شده باشد، آن‌گاه دیفیومورفیسم C^∞، $h : U \to B_1$ وجود دارد که راستاها را نیز حفظ می‌کند.

پاسخ. فرض کنید $\theta = (\theta_1,\dots,\theta_{n-1})$ مختصات روی S_1 باشد. حال $\mathrm{D}f$ را در مختصات $(\theta_1,\dots,\theta_{n-1},r)$ در $U\backslash\{0\}$ محاسبه می‌کنیم.

به سادگی می‌توان مشاهده کرد که در $U\backslash\{0\}$ داریم:

$$\mathrm{D}f = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline * & r\frac{\partial \eta_i}{\partial r} + \eta_i \end{array}\right)$$

که در آن I_{n-1} ماتریس همانی $(n-1)\times(n-1)$ است. لذا $\det(\mathrm{D}f) = r\frac{\partial\eta_i}{\partial r} + \eta_i$. از طرفی η_i در r−راستا (θ ثابت) غیرنزولی است و بنابراین $\frac{\partial \eta_i}{\partial r} \geq 0$. هم‌چنین با توجه به اینکه $r \geq 0$ و $\eta_i \geq 1$ نتیجه می‌شود که $\det(\mathrm{D}f) > 0$ در $U\backslash\{0\}$. از طرفی در همسایگی مبدأ، $f = id$، بنابراین f روی U ناتبهگون است. با توجه به اینکه f شعاع $(\theta,r)\mapsto r$ را حفظ می‌کند و $\eta_i \geq 1$ می‌توان نتیجه گرفت که f یک به یک است. از آن‌جا که $A_{i+1} = R_{i+1}A_i/r_i$ و $R_{i+1}/r_i \geq 1$ نتیجه می‌شود که $A_1 \leq A_2 \leq \cdots$. لذا یا $\lim_{i\to\infty} A_i = +\infty$ و یا $\lim_{i\to\infty} A_i = A < \infty$. برای هر $\theta \in S_1$:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\mu_i(\theta)} f(\theta,t) &= \lim f_i(\theta,t) \\ &= \lim(\theta, \eta_i(\theta,t)t) \\ &= (\theta, A_i\mu_i(\theta)/\mu_i(\theta)) \\ &= (\theta, A_i) \end{aligned}$$

(حد روی تمام مقادیر $t < \mu_i(\theta)$ محاسبه شده است). در نتیجه برای هر $i = 1,2,\dots$، $f(U_i) = B_{A_i}$ و لذا یا $f(U) = \mathbb{R}^n$ و یا $A < \infty$، $f(U) = B_A$. در نهایت ساختن دیفیومورفیسم C^∞ حافظ راستایی که $\mathbb{R}^n \to B_1$ و یا $B_A \to B_1$ آسان است. به این ترتیب مطلوب حاصل می‌شود. □