# قضیه‌ی بئر و کاربردهایی از آن

خشایار فیلُم

## ۱ مقدمه

«قضیه‌ی بئر» [۱] یا آنگونه که در برخی از مراجع نامیده می‌شود «قضیه‌ی رسته‌ی بئر»[۲]، بخشی ضروری از هر درسِ استاندارد در آنالیز ۱ یا توپولوژی عمومی است. در این مقاله‌ی کوتاه می‌خواهیم با پرداختن به برخی از کاربردهای این قضیه در شاخه‌های گوناگون ریاضی، قدرت این قضیه را نشان دهیم. به طور شهودی قضیه‌ی بئر تضمین می‌کند که زیرمجموعه‌ی خاصی از یک فضای توپولوژیک به اندازه‌ی کافی «بزرگ» است و از آنجا می‌توان وجود اشیاء خاصی را نتیجه گرفت یا حتی نشان داد که «به طور نوعی»[۳] هر نقطه از فضا به زیرمجموعه‌ی مذکور تعلق دارد. ابتدا به صورت متداولی از این قضیه می‌پردازیم که در هر درس استانداردِ آنالیز ۱ بیان می‌شود :

**قضیه ۱.** *اگر $(X,d)$ یک فضای متریک کامل[۴] باشد و $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های باز و چگال، آنگاه زیرمجموعه‌ی $\cap_{n=1}^{\infty} U_n$ از فضای متریکِ $X$ نیز چگال است. علی‌الخصوص $\cap_{n=1}^{\infty} U_n \neq \emptyset$.*

(یادآوری می‌کنیم که کامل بودن یک فضای متریک به معنای همگراییِ هر دنباله‌ی کوشی در آن است.) اثبات این قضیه چندان سخت نیست، ولی در اینجا به آن نمی‌پردازیم و خواننده را به [۴] یا [۵] ارجاع می‌دهیم. طبعاً با تبدیل مجموعه‌های باز به بسته، با مکمل کردن می‌توان صورت معادل زیر را هم بیان کرد [۵]:

**قضیه ۲.** *اگر $(X,d)$ یک فضای متریک کامل باشد و $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های بسته‌ای که نقطه‌ی درونی ندارند، آنگاه زیرمجموعه‌ی $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ از فضای متریکِ $X$ هم فاقد نقطه‌ی درونی است. علی‌الخصوص $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \neq X$.*

در واقع به وضوح اشتراکِ تعدادی متناهی از زیرمجموعه‌های باز و چگال یا اجتماعِ تعدادی متناهی از زیرمجموعه‌های بسته و بدون نقطه‌ی درونی، خود زیرمجموعه‌ای از این دست خواهد بود. نکته‌ی اساسی در هردو صورت‌بندیِ قضیه آن است که اشتراک یا اجتماعِ خانواده‌ای نامتناهی از این زیرمجموعه‌ها در نظر گرفته شده است.

از نظر تاریخی، جالب است بدانید که ریاضیدانِ فرانسوی بئر[۶]، قضیه‌ی مذکور را (برای $\mathbb{R}^n$) در سالِ ۱۸۹۹ و در پایان‌نامه‌ی دکترای خود اثبات نمود، در حالی که دو سال زودتر در ۱۸۹۷ این قضیه برای فضای اعداد حقیقی توسط ریاضیدانِ آمریکایی اوسگود[۷] ثابت شده بود![۸]

قبل از ادامه‌ی کار به یادآوریِ چند مفهوم می‌پردازیم: در یک فضای توپولوژیکِ $X$ زیرمجموعه‌ی $A \subseteq X$ را $G_\delta$ می‌نامیم هرگاه اشتراکِ خانواده‌ای شمارا از زیرمجموعه‌های باز باشد و $F_\sigma$ می‌نامیم هرگاه اجتماعِ خانواده‌ای شمارا از زیرمجموعه‌های بسته باشد. $A$ «هیچ‌جا چگال»[۹] نامیده می‌شود اگر بستارش در $X$ فاقدِ نقطه‌ی درونی باشد. یک زیرمجموعه‌ی «از رسته‌ی اول » از $X$[۱۰] (که در برخی مراجع اصطلاحِ «نحیف» [۱۱] هم برای آن به کار می‌رود.) عبارت است از زیرمجموعه‌ای که اجتماعِ تعدادی شمارا زیرمجموعه‌ی هیچ‌جا چگالِ $X$ باشد. این دسته از زیرمجموعه‌ها را می‌توان مشابه توپولوژیکِ زیرمجموعه‌های از اندازه‌ی صفر در نظر گرفت[۱۲]. یک زیرمجموعه‌ی «از رسته‌ی دوم» [۱۳] زیرمجموعه‌ای است که از رسته‌ی اول نباشد! حال می‌توان توضیح داد که چرا گاهی از اصطلاحِ «قضیه‌ی رسته‌ی بئر» استفاده می‌گردد. حکم قضیه‌ی ۱ را می‌توانِ اینگونه بیان کرد که فضای متریکِ کامل (که البته تهی نباشد!) از رسته‌ی اول نیست. در نهایت، زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیکِ $X$ «پسمانده»[۱۴] تعریف می‌شود [۱۵] اگر مکملش از رسته‌ی اول باشد. اینها به طور شهودی زیرمجموعه‌های «بزرگ» $X$ هستند و اگر ویژگی‌ای برای نقاطِ چنین زیرمجموعه‌ای از $X$ برقرار باشد، می‌گوییم آن ویژگی «نوعی»[۱۶] است. حکم قضایای ۱و۲ در فضاهای توپولوژیک هم معنی دارد. پس می‌توان تعریف کلی زیر را ارائه کرد:

---

[۱] Baire Theorem

[۲] Baire Category Theorem

[۳] generically

[۴] complete

[۵] واضح است که در هردو قضیه $X \neq \emptyset$ فرض شده!

[۶] Rene-Louis Baire (1874-1932)

[۷] William Fogg Osgood (1864-1943)

[۸] رجوع کنید به [۳].

[۹] nowhere dense

[۱۰] of first category

[۱۱] meager

[۱۲] البته باید توجه کرد که ممکن است مفاهیم کوچک بودنی که از دو تعریفِ «اندازه‌ی صفر» و «نحیف» استنباط می‌شوند، در مواردی متضاد باشند. مثلاً محور حقیقی را می‌توان به اجتماعِ زیرمجموعه‌ای از اندازه‌ی صفر و زیرمجموعه‌ای نحیف افراز نمود (معادلاً $\mathbb{R}$ زیرمجموعه‌ای پسمانده و از اندازه‌ی صفر دارد. رجوع کنید به تمرینِ ۷.) و حال هریک از این مجموعه‌ها در یکی از این تعابیر بزرگ و در تعبیرِ دیگر کوچک خواهد بود.

[۱۳] of second category

[۱۴] residual

[۱۵] ترجمه‌های «نحیف» برای meager و «پسمانده» برای residual از ترجمه‌ی فارسی کتابِ رویدن اقتباس شده است.

[۱۶] generic

**تعریف ۳.** *فضای توپولوژیک $X$ یک «فضای بئر» [۱۷] نامیده می‌شود، هرگاه اگر $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های بسته و با درونِ تهی از $X$ باشد، آنگاه درونِ $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ هم تهی شود.*

پس یک فضای توپولوژیک، فضایی بئر است اگر و تنها اگر هر باز ناتهی از آن از رسته‌ی دوم باشد و همچنین قضیه‌ی ۱ را می‌توان اینگونه تعبیر کرد که هر فضای متریکِ کامل، یک فضای بئر است. خانواده‌های دیگری از فضاهای توپولوژیک نیز موجودند که بئر هستند. به عنوان مثال در [۵] ثابت شده که هر فضای توپولوژیکِ هاسدورف و فشرده حائز این ویژگی است.

**تمرین ۴.** *الف) ثابت کنید هر باز از یک فضای بئر، خود در توپولوژی القایی فضایی بئر است.*

ب) *نشان دهید اگر هر نقطه‌ی $x$ از فضای توپولوژیکِ $X$ همسایگی بازی داشته باشد که (در توپولوژی القایی از $X$) بئر باشد، آنگاه فضای $X$ هم بئر خواهد بود.*

پ) *از قسمت قبل نتیجه بگیرید که هر فضای توپولوژیکِ موضعاً فشرده یک فضای بئر است.*

ت) *ثابت کنید مکملِ زیرمجموعه‌ای شمارا در فضای بئری که در آن تک‌نقطه‌ای‌ها بسته‌اند، خود با توپولوژی القایی یک فضای بئر است.*

ث) *با در نظر گرفتنِ خانواده‌ی $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ از فضاهای توپولوژیکِ بئر، نشان دهید $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ نیز در توپولوژیِ حاصلضربی بئر است.*

ج) *با ذکر یک مثال نقض، تحقیق کنید که حکمِ قضیه‌ی ۱ برای یک خانواده‌ی ناشمارا از زیرمجموعه‌های باز و چگال لزوماً برقرار نیست.*

از هریک از قسمت‌های (الف) و (پ) در تمرین فوق می‌توان نتیجه گرفت که هر بازی از $\mathbb{R}^n$ یک فضای بئر است.

## ۲ حلِ چند مثال

حال که صورتِ قضیه‌ی بئر را می‌دانیم، با حل چند مسأله‌ی جالب (که البته برخی از آنها در تمرینات به شما محول شده!) قدرتِ این قضیه را خواهیم دید:

[۱۷] Baire space

**مثال ۵.** *زیرمجموعه‌ی $\mathbb{Q}$ از $\mathbb{R}$، $G_\delta$ نیست. چرا که در غیر این صورت، خانواده‌ی $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ از بازهای $\mathbb{R}$ موجود خواهد بود که برای آن $\cap_{n=1}^{\infty} U_n = \mathbb{Q}$. حال مجموعه‌ی شمارای $\mathbb{Q}$ را به شیوه‌ای دلخواه مانند $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$ شماره‌گذاری کنید. یک زیرمجموعه‌ی باز از $\mathbb{R}$ با حذف یک نقطه هم باز می‌ماند. پس برای هر $n$، $U_i - \{r_i\}$ هم در $\mathbb{R}$ باز است و به علاوه چون تمامی اعداد گویا به جز یکی را دربردارد، چگال نیز هست. لذا بنابر قضیه‌ی بئر $\cap_{n=1}^{\infty}(U_n - \{r_n\})$ باید زیرمجموعه‌ای چگال از $\mathbb{R}$ باشد، در حالی که برابر است با $\cap_{n=1}^{\infty} U_n - \{r_1, r_2, \dots\} = \mathbb{Q} - \{r_1, r_2, \dots\} = \emptyset$.*

*با دانستنِ این حکم، می‌توان به این گزاره‌ی معروف پرداخت: «هیچ تابع پیوسته‌ی $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ای که نقاط پیوستگی‌اش دقیقاً مجموعه‌ی اعداد گویا باشد موجود نیست. چرا که به سادگی می‌توان دید که مجموعه‌ی نقاط پیوستگیِ یک تابع زیرمجموعه‌ای $G_\delta$ است (اگر $X$ فضایی توپولوژیک و $g : X \to \mathbb{R}$ تابعی دلخواه باشد، با تعریفِ $U_n$ به عنوان اجتماعِ تمامی بازهای $V$ از $X$ که $diam(g(V)) < \frac{1}{n}$ [۱۸]، به وضوح زیرمجموعه‌ی نقاطی از $X$ که $g$ در آنها پیوسته است با $\cap_{n=1}^{\infty} U_n$ داده می‌شود که $G_\delta$ است.) و در نتیجه از آنجا که دیدیم $\mathbb{Q}$، $G_\delta$ نیست، امکان ندارد تابعِ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تنها در نقاط گویا پیوسته باشد.*

جالب است بدانید که نقاط پیوستگیِ یک تابعِ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (که ثابت کردیم نمی‌تواند برابرِ $\mathbb{Q}$ باشد.) ممکن است برابر زیرمجموعه‌ی اعداد گنگ شود:

**تمرین ۶.** تحقیق کنید

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{اگر } x = \frac{p}{q} \text{ که در آن } p \in \mathbb{Z} \text{ و } q \in \mathbb{N} \text{ و } (p,q) = 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

*در نقاط گنگ پیوسته است و در نقاط گویا ناپیوسته.*

یک نتیجه‌ی معروف دیگر مربوط به نقاط ناپیوستگی توابع که به کمک قضیه‌ی بئر ثابت می‌شود:

**تمرین ۷.** *در این تمرین نشان می‌دهیم که حد نقطه به نقطه‌ی دنباله‌ای از توابع پیوسته، باید بر زیرمجموعه‌ای چگال از دامنه‌ی تعریف پیوسته باشد. $\{f_n : [a,b] \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ را دنباله‌ای از توابع پیوسته بگیرید که به طور نقطه به نقطه به $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ همگرایند.*

الف) *برای هر $\theta > 0$ و $n \in \mathbb{N}$ قرار دهید:*

$$F_n = \{t \in [a,b] \mid \forall k, m \geq n : |f_k(t) - f_m(t)| \leq \theta\}$$

*نشان دهید هر $F_n$ بسته است و $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n = [a,b]$.*

[۱۸] منظور قطرِ زیرمجموعه‌ی $g(V)$ از $\mathbb{R}$ است، یعنی سوپریممِ فاصله‌ی دو نقطه از این مجموعه.

ب) فرض کنید $\epsilon > 0$ و $I$ زیربازه‌ای بسته و به طول مثبت از $[a,b]$ باشد. به کمک قضیه‌ی بئر و (الف) نشان دهید که یک بازه‌ی به طول مثبت و بسته‌ی $J$ مشمول در $Int(I)$ موجود است به قسمی که $|f(t)-f(s)| \leq \epsilon$ برای هر $s,t \in J$.

پ) $I$ را یک زیربازه‌ی بسته و به طول مثبت دلخواه از $[a,b]$ بگیرید. با استفاده‌ی مکرر از (ب) یک دنباله‌ی $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ از زیربازه‌های بسته و به طول مثبت از $I$ بسازید با این خواص که:

۱) $I_1 \supset int(I_1) \supset I_2 \supset int(I_2) \supset I_3 \dots$

۲) برای هر $s,t \in I_n$: $|f(t)-f(s)| \leq \frac{1}{n}$.

تحقیق کنید تحت شرایط فوق $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ ناتهی است و $f$ در نقاط واقع در آن پیوسته است.

ت) از قسمت قبلی نتیجه بگیرید $f$ بر زیرمجموعه‌ای چگال از $[a,b]$ پیوسته است.

در مثال ۵ دیدیم که زیرمجموعه‌ی چگال و از اندازه‌ی صفر $\mathbb{Q}$ از اعداد حقیقی، $G_\delta$ نیست. معهذا زیرمجموعه‌های چگال و اندازه‌ی صفری از $\mathbb{R}$ موجودند که $G_\delta$ نیز هستند[۱۹]:

**تمرین ۸.** *فرض کنید اعداد گویا به صورت $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ شماره‌گذاری شده باشند و قرار دهید:*

$$E = \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{n=1}^{\infty} (r_n - \frac{1}{2^{n+m}}, r_n + \frac{1}{2^{n+m}})$$

الف) تحقیق کنید $E$ در $\mathbb{R}$، $G_\delta$، چگال و از اندازه‌ی صفر است.

ب) با به کار بردن قضیه‌ی بئر، ثابت کنید برای هر همیومورفیسم $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ داریم: $h(E) \cap E \neq \emptyset$.

**مثال ۹.** *هر فضای بئر مانند $X$ که زیرمجموعه‌های تک‌نقطه‌ای در آن بسته باشند [۲۰] و به علاوه نقطه‌ی تنها (یعنی نقطه‌ای همچون $x \in X$ که برای آن $\{x\}$ باز باشد) نداشته باشد ناشماراست. چرا که در غیراین صورت با درنظرگرفتن $X$ به صورت $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ و قرار دادن $U_n = X - \{x_n\}$، هر $U_n$ به دلیل بسته بودن $\{x_n\}$ باز و به دلیل باز نبودن $\{x_n\}$ چگال است. پس بنابر قضیه‌ی بئر، $\cap_{n=1}^{\infty} U_n$ باید چگال باشد در حالی که این اشتراک هیچ‌یک از $x_n$ ها را دربرندارد و لذا تهی است! تناقض حاصله حکم مطلوب را بدست می‌دهد. به ویژه توجه کنید که این نشان می‌دهد فضاهای متریک کامل یا فضاهای توپولوژیک فشرده و هاسدورف به شرط عدم وجود نقاط تنها ناشمارا خواهند بود.*

**مثال ۱۰.** *ثابت می‌کنیم برای $n \geq 2$ هیچ نگاشت پیوسته، یک‌به‌یک و پوشای $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ موجود نیست. فرض کنید اینگونه نباشد و چنین $f$ای را در نظر بگیرید. تنها ویژگی‌ای از یک همیومورفیسم که ممکن است نگاشتی با خواص ذکر شده برای $f$ حائز آن نباشد، عبارت است از پیوستگی وارون. اگر بدانیم چنین نگاشتی بسته نیز هست، پیوستگی وارون و از آنجا همیومورفیسم بودن تضمین می‌شود. نگاشت $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ لزومی ندارد بسته باشد، ولی به دلیل پیوستگی، زیرمجموعه‌ای فشرده از دامنه را به زیرمجموعه‌ای فشرده و به تبع آن بسته از $\mathbb{R}^n$ می‌برد. بنابراین با تحدید $f$ زیرمجموعه‌ای فشرده از دامنه همچون بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$، یک همیومورفیسم $[a,b] \to f([a,b])$ حاصل می‌شود. زیرمجموعه‌ی همبند $f([a,b])$ از $\mathbb{R}^n$ فاقد نقطه‌ی درونی است. چرا که اگر یک گوی باز $B \neq \emptyset$ از $\mathbb{R}^n$ را شامل شود، با حذف هریک از نامتناهی نقطه‌ی متعلق به $B$ هم همبند می‌ماند. زیرا به دلیل $n \geq 2$، با حذف نقطه‌ای دلخواه از هر گوی باز در $\mathbb{R}^n$ همچون $B$، زیرمجموعه‌ی باقی‌مانده نیز همبند خواهد بود. امری که به سادگی نشان می‌دهد برای هر $x \in B$، $f([a,b]) - \{x\}$ هم همبند است. ولی به دلیل همیومورف بودن $f([a,b])$ با بازه‌ی $[a,b]$، این بازه هم باید حائز ویژگی‌ای مشابه باشد: نامتناهی نقطه از آن موجودند که با حذفشان فضای حاصل هم همبند خواهد بود، گزاره‌ای که به وضوح غلط است. حال روشن است که چگونه باید با به کار بردن قضیه‌ی بئر فرض خلف را به تناقض بکشانیم: بنابر مطالب فوق تصویر هر بازه‌ی فشرده تحت $f$ زیرمجموعه‌ای بسته و بدون نقطه‌ی درونی از $\mathbb{R}^n$ است و بنابراین $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$ (توجه کنید که $f$ پوشا بود.) نمی‌تواند اجتماع تعدادی شمارا از چنین زیرمجموعه‌هایی باشد، در حالی که $f(\mathbb{R}) = \cup_{n\in\mathbb{N}} f([-n,n])$.*

**مثال ۱۱.** *آیا اگر تابع پیوسته‌ی $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ چنان باشد که برای هر $x \in \mathbb{R}^+$ دنباله‌ی $\{f(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ به صفر همگرا شود، می‌توان نتیجه گرفت که $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$؟ به کمک قضیه‌ی بئر خواهیم دید که پاسخ مثبت است. یک $\epsilon > 0$ تثبیت کنید. $\mathbb{R}^+$ را-که چون بازی از فضای متریک کامل $\mathbb{R}$ است، بنابر ۴الف خود یک فضای بئر است- به دلیل ویژگی مفروض برای $f$، می‌توان اینگونه نوشت:*

$$\mathbb{R}^+ = \cup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^+ \mid |f(mx)| \leq \epsilon \ \ \forall m \geq n\}$$

چون $f$ پیوسته است، زیرمجموعه‌های ظاهر شده در سمت راست بسته‌اند و حال با اعمال قضیه‌ی بئر، درون حداقل یکی از آنها ناتهی است: $0 < a < b$ و $n \in \mathbb{N}$ موجودند به قسمی که هرگاه $x$ واقع در

[۱۹] توجه کنید با توجه به تعاریفی که ارائه شد، یک زیرمجموعه‌ی $G_\delta$ و چگال از فضایی توپولوژیک، زیرمجموعه‌ای پسمانده به عبارت دیگر مکمل زیرمجموعه‌ای نحیف ( از رسته‌ی اول) است.

[۲۰] به اصطلاح فضا $T_1$ باشد.

$(a,b)$ و عدد طبیعیِ $m$ بزرگتر یا مساوی با $n$ انتخاب گردد، داشته باشیم: $\epsilon \le |f(mx)|$. حال اگر $k\in\mathbb{N}$ از هردوی $\frac{a}{b-a}$ و $n$ بزرگتر انتخاب شود، به سادگی می‌توان تحقیق کرد که:

$$(ka,\infty)\subseteq \cup_{m=n}^{\infty}(ma,mb)$$

آنچه که در بالا گفتیم به معنای آن است که در نقاط متعلق به سمت راستِ تساوی فوق $|f|$ از $\epsilon$ تجاوز نمی‌کند و بنابراین به ازای $x>ka$ خواهیم داشت: $\epsilon \le |f(x)|$، امری که به دلیل دلخواه بودنِ $\epsilon>0$، $\lim_{t\to\infty} f(t)=0$ را بدست می‌دهد.

**مثال ۱۲.** $f$ و $g$ دو تابعِ هولومورف بر صفحه‌ی مختلط هستند. منظور از یک کلمه برحسب $f$ و $g$ چندبار ترکیبِ این توابع است در یک ترتیب دلخواه (مثلاً $f\circ g\circ g\circ f\circ f\circ f\circ g$)، که خود تابعی هولومورف بر صفحه‌ی مختلط خواهد شد. فرض کنید برای هر $z\in\mathbb{C}$ کلمه‌ای برحسب $f$ و $g$ موجود باشد که در $z$ صفر شود. نشان می‌دهیم کلمه‌ای موجود است که در سرتاسر صفحه صفر است[۲۱]. اثبات ساده است: تعداد کلمات شماراست و برای هر کلمه زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از $\mathbb{C}$ را در نظر می‌گیریم که متشکل است از نقاطی که در آنها تابع هولومورفِ متناظرِ این کلمه صفر می‌شود. شرط بیان شده به معنای آن است که اجتماعِ این خانواده‌ی شمارا از زیرمجموعه‌های بسته منطبق است بر کلِ $\mathbb{C}$. پس بنابر قضیه‌ی بئر یکی از این زیرمجموعه‌های بسته نقطه‌ی درونی دارد که به معنای آن است که کلمه‌ی متناظر به عنوان تابعی هولومورف به دامنه‌ی $\mathbb{C}$، بر بازی ناتهی صفر می‌گردد که این هم بنابر اصل یگانگی، متحد با صفر بودنِ تابع مذکور را نتیجه می‌دهد.

مثال بعدی را می‌توان ابتکاری‌ترین کاربردی از قضیه‌ی بئر در نظر گرفت که تا اینجا مطرح شده:

**مثال ۱۳.** به این مسأله می‌پردازیم: «فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی هموار باشد با این ویژگی که برای هر $x\in\mathbb{R}$، $n\in\mathbb{N}$ای وابسته به $x$ موجود است که $f^{(n)}(x)=0$. ثابت کنید $f$ یک تابع چندجمله‌ای است.»[۲۲] به منظور حلِ این مسأله[۲۳]، برای هر عدد طبیعیِ $n\in\mathbb{N}$ قرار می‌دهیم: $S_n=\{x\mid f^{(n)}(x)=0\}$ و

$X=\{x|$ برای هر بازه بازِ $(a,b)\ni x$، $f|_{(a,b)}$ چندجمله‌ای نیست.$\}$

هردوی این زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ بسته‌اند و به سادگی می‌توان دید که $X$ نقطه‌ی تنها ندارد. زیرا اگر $x\in X$ یک نقطه‌ی تنها باشد، آنگاه باید بازه‌ی بازِ $(u,v)$ حول این نقطه موجود باشد به قسمی که $f$ حول هر نقطه از $(u,v)-\{x\}$ با یک چندجمله‌ای داده شود، امری که به دلیل هموار بودنِ $f$ تنها وقتی می‌تواند رخ دهد که $f|_{(u,v)}$ چندجمله‌ای باشد. در واقع $f$ باید بر هریک از بازه‌های بازِ $(u,x)$ و $(x,v)$ به یک چندجمله‌ای تحدید گردد و به دلیل وجود مشتقات $f$ از همه‌ی مراتب در $x$، تمامی مشتقات این دو چندجمله‌ای در $x$ یکسان هستند و بنابراین چندجمله‌ای‌ها با هم برابرند و $f$ بر کلِ $(u,v)$ با یک چندجمله‌ای داده خواهد شد. با اثباتِ تهی بودنِ $X$ حکم مطلوب حاصل می‌گردد: در این صورت $f$ حول هر نقطه با تابعی چندجمله‌ای داده خواهد شد. ولی هر دو چندجمله‌ای‌ای که بر یک باز ناتهی برابر باشند بر هم منطبقند و در نتیجه با استدلالی مبتنی بر همبندی، $f$ باید به طور سرتاسری یک چندجمله‌ای باشد. پس فرض می‌کنیم $X\neq\emptyset$ و به تناقض می‌رسیم. ویژگی مفروض برای این تابع در صورت مسأله نتیجه می‌دهد که زیرمجموعه‌های بسته‌ی $S_n\cap X$ از $X$ آن را می‌پوشانند. ولی $X$ یک فضای متریکِ کامل است (زیرمجموعه‌ای بسته از فضای کاملِ $\mathbb{R}$) و لذا با به کار بردن قضیه‌ی بئر، یکی از این زیرمجموعه‌های بسته دارای درونِ ناتهی است: $n\in\mathbb{N}$ و بازه‌ی $(a,b)$ موجودند که

$$\emptyset\neq(a,b)\cap X\subseteq S_n$$

ادعا می‌کنیم که سمت چپِ بالا برای هر $m\ge n$ مشمول در $S_m$ نیز هست. در واقع تنها ثابت می‌کنیم که مشمول است در $S_{n+1}$ و آنگاه با همان استدلال چون $(a,b)\cap X\subseteq S_{n+1}$، $(a,b)\cap X$ زیرمجموعه‌ی $S_{n+2}$ هم خواهد بود و الی آخر. یک $x\in(a,b)\cap X$ دلخواه را در نظر بگیرید. از آنجا که $X$ نقطه‌ی تنها نداشت، هر نقطه از زیرمجموعه‌ی $(a,b)\cap X$ از $\mathbb{R}$ حد دنباله‌ای از عناصر دوبدو متمایزِ این زیرمجموعه است. پس می‌توان دنباله‌ی $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ از عناصرِ $(a,b)\cap X$ را چنان برگزید که $x_k\neq x$ برای هر $k$ و به علاوه این دنباله به $x$ همگرا گردد. چون $\emptyset\neq(a,b)\cap X\subseteq S_n$، برای هر $k$، $x_k\neq x$ در $S_n$ واقع است و لذا $\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(x_k)}{x-x_k}=0 \Leftarrow f^{(n)}(x_k)=f^{(n)}(x)=0$. ولی از قضیه‌ی مقدار میانگین این کسر مقدارِ مشتقِ $n+1$ام در نقطه‌ای بینِ $x$ و $x_k$ است. اگر $k\to\infty$، این نقاط هم مانند دنباله‌ی $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ به $x$ همگرا می‌شوند و در نتیجه از پیوستگیِ $f^{(n+1)}$ (توجه کنید که $f$ هموار بود): $x\in S_{n+1} \Leftarrow f^{(n+1)}(x)=0$. تا اینجا نشان دادیم که:

$$\forall m\ge n:\emptyset\neq(a,b)\cap X\subseteq S_m$$

حال ادعا می‌کنیم که $f^{(n)}$ در همه‌ی نقاطِ $(a,b)$ صفر است. تنها باید به نقاطِ $(a,b)-X$ بپردازیم چرا که از بالا $(a,b)\cap X$ مشمول است $S_n$ یعنی مجموعه‌ی ریشه‌های $f^{(n)}$. چون $(a,b)\cap X$ زیرمجموعه‌ای

[۲۱] مطرح شده در شماره‌ی ۹ مجله‌ی ریاضی شریف، زمستان ۷۹

[۲۲] مطرح شده در مسابقاتِ Vojtěch Jarník، سال ۲۰۰۴

[۲۳] راه‌حل برگرفته از
http://mathoverflow.net/questions/34059/if-f-is-infinitely-differentiable-then-f-coincides-with-a-polynomial

بسته و ناتهی از $X$ بود، زیرمجموعه‌ی باز $(a,b)-X$ از $\mathbb{R}$ اجتماع تعدادی شمارا بازه‌ی باز دوبدو مجزاست که دو انتهای هریک از آنها (به جز احتمالاً $a$ و $b$) در $X$ واقعند. به منظور اثبات ادعای فوق کافی است یکی از این بازه‌ها همچون $(c,d)$ را در نظر گرفت و نشان داد که $f^{(n)}$ بر آن متحد است با صفر. $(c,d)\cap X=\emptyset$ و لذا از تعریف $X$، $f|_{(c,d)}$ تابعی چندجمله‌ای به عنوان مثال از درجه‌ی $t$ است. اگر $t<n$ که صفر بودن $f^{(n)}$ بر $(c,d)$ بدیهی است و در غیر این صورت $t\geq n$ و $f^{(t)}$ بر $(c,d)$ (و به تبع آن بر $[c,d]$) یک تابع ثابت ناصفر است و به ویژه $f^{(t)}(c), f^{(t)}(d)\neq 0$، در حالی که حداقل یکی از نقاط $c$ و $d$ به $(a,b)\cap X$ و از آنجا چون $t\geq n$ بنابر حکم ثابت شده به $S_t$ تعلق دارند و لذا $f^{(t)}$ باید در حداقل یکی از $c,d$ صفر باشد که چنین نیست. پس حالت $t\geq n$ رخ نمی‌دهد و نشان دادیم که $f^{(n)}$ بر بازه‌ی باز $(a,b)$ صفر است و بنابراین $f|_{(a,b)}$ چندجمله‌ای‌ای است از درجه‌ی حداکثر $n$ و این با توجه به چگونگی تعریف $X$ به معنای $(a,b)\cap X=\emptyset$ است که با روش انتخاب $(a,b)$ تناقض دارد.

**تمرین ۱۴.** *توابع پیوسته‌ی $f_n$ $(n=1,2,\dots)$ به دامنه‌ی بازه‌ی $[a,b]$ دارای این ویژگی‌اند که هر نقطه از این بازه به ازای اعدادی طبیعی مانند $m\neq n$، ریشه‌ی معادله‌ی $f_m=f_n$ است. ثابت کنید بر زیربازه‌ای به طول مثبت از $[a,b]$ دو تا از این توابع با هم برابرند.*

**تمرین ۱۵.** *فرض کنید $E$ یک فضای باناخ[24] باشد که متناهی‌البعد نیست. نشان دهید $E$ به عنوان فضایی برداری نمی‌تواند پایه‌ای شمارا داشته باشد. (راهنمایی: اگر $\{v_1,v_2,\dots\}$ چنین پایه‌ای باشد، زیرفضاهای بسته‌ی $A_k=Span\{v_1,\dots,v_k\}$ را در نظر بگیرید و قضیه‌ی بئر را اعمال کنید.)*

**تمرین ۱۶.** *آیا $\mathbb{R}^2-\mathbb{Q}^2$ تصویر پیوسته‌ی $\mathbb{R}$ است؟* [25] *(راهنمایی: مشابه مثال ۱۰ عمل کنید. برای اثبات اینکه فضای $\mathbb{R}^2-\mathbb{Q}^2$ بئر است می‌توانید از تمرین ۴ ت استفاده کنید.)*

مثال بعدی بسیار زیباست:

**مثال ۱۷.** *می‌خواهیم این مسأله را حل کنیم: «$T$ اندومورفیسمی کراندار از فضای باناخ مختلط $E$ است به قسمی که برای هر $x\in E$ به ازای یک چندجمله‌ای مناسب $f\neq 0$ با ضرایب مختلط داریم: $f(T)(x)=0$. نشان دهید چندجمله‌ای ناصفر $g$ موجود است با این ویژگی که $g(T)=0$.» اولین ایده‌ای که به ذهن می‌رسد آن است که مشابه مثال ۱۲ عمل کنیم: ویژگی مفروض برای $T$ بدین معنا است که هر عضو از $E$ به ازای یک چندجمله‌ای مناسب $0\neq f(t)\in\mathbb{C}[t]$ در هسته‌ی $f(T):E\to E$ واقع است. پس می‌توان نوشت:*

$$E=\cup_{f(t)\in\mathbb{C}[t]-\{0\}}Ker\big(f(T)\big)$$

*و هر زیرفضای خطی $Ker\big(f(T)\big)$ از $E$ به دلیل کراندار بودن اندومورفیسم‌های $f(T)$ (که از کراندار بودن $T:E\to E$ ناشی می‌شود.) بسته است. پس فضای کامل $E$ در تساوی فوق به عنوان اجتماع خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های بسته توصیف شده و اگر یکی از آنها نقطه‌ی درونی داشته باشد، این بدان معنی خواهد بود که به ازای یک چندجمله‌ای $g(t)\neq 0$، عملگر خطی $g(T):E\to E$ بر بازی ناتهی صفر است که تنها زمانی می‌تواند رخ دهد که متحد با صفر باشد و وجود چنین چندجمله‌ای‌ای همان حکم مطلوب است. ولی متأسفانه قضیه‌ی بئر برای خانواده‌ای ناشمارا از زیرمجموعه‌های بسته صحیح نیست (رجوع کنید به تمرین ۴ ج.) و بنابراین نمی‌توان در تساوی مذکور حکم کرد که در اجتماع ناشمارای $\cup_{f(t)\in\mathbb{C}[t]-\{0\}}Ker\big(f(T)\big)$ درون حداقل یکی از زیرمجموعه‌های ظاهر شده باید ناتهی باشد. به منظور فائق آمدن بر این مشکل، $E$ را به صورت یک اجتماع شمارا می‌نویسیم به این روش که برای هر عدد صحیح طبیعی $n$ قرار می‌دهیم:*

$$A_n=\cup_{f(t)\in\mathbb{C}[t]-\{0\},\deg(f)\leq n}Ker\big(f(T)\big)$$

*به عبارت دیگر $A_n$ مجموعه‌ی بردارهایی در $E$ است که به ازای یک چندجمله‌ای ناصفر با درجه‌ی حداکثر $n$ با ضرایب مختلط مانند $f(t)$، توسط اندومورفیسم $f(T)$ از $E$ به صفر می‌روند. دوباره بنابر ویژگی مفروض برای $T$ در صورت مسأله: $E=\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n$. حال می‌توان از قضیه‌ی بئر استفاده کرد و نشان داد که حداقل یکی از زیرمجموعه‌های ظاهر شده در اجتماع سمت راست نقطه‌ی درونی دارد مشروط به اینکه ابتدا بسته بودن $A_n$ها را نشان دهیم. برای این کار فرض کنید که دنباله‌ی $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ از عناصر $E$ به $v$ همگرا باشد و هریک از اعضایش در $A_n$ واقع باشند: برای هر $k$ یک چندجمله‌ای $0\neq f_k(t)\in\mathbb{C}[t]$ از درجه‌ی حداکثر $n$ موجود است به قسمی که $f_k(T)(v_k)=0$ و بایستی وجود چندجمله‌ای‌ای با خواص مشابه برای $v$ را نشان داد. با تقسیم هر $f_k(t)$ بر ضریب جمله‌ی پیشروی آن و سپس ضربش در $t^{n-\deg(f_k)}$، بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که هر $f_k$ تکین و از درجه‌ی $n$ است و سپس با توجه به بسته‌ی جبری بودن $\mathbb{C}$، هر $f_k$ تجزیه‌ای به شکل*

$$f_k(t)=(t-\alpha_1^{(k)})\dots(t-\alpha_n^{(k)})$$

*خواهد داشت که در آن هر $\alpha_i^{(k)}$ یک عدد مختلط است. توجه کنید*

[24] فضای نرم‌دار کامل

[25] مطرح شده در شماره‌ی ۸ مجله‌ی ریاضی شریف، بهار ۷۹

که اگر $\| T \| < |\alpha_i^{(k)}|$ [۲۶]، آنگاه عملگرِ $T-\alpha_i^{(k)}.1_E : E \to E$ وارون‌پذیر خواهد شد ( $1_E$ عملگرِ همانی) و لذا می‌توان در تساویِ

$$f_k(T)(v_k) = \big((T-\alpha_1^{(k)}.1_E)\dots(T-\alpha_n^{(k)}.1_E)\big)(v_k) = 0$$

$T-\alpha_i^{(k)}.1_E$ را از سمت حذف کرد و سپس در تساوی حاصل به جای آن عاملی همچون $T-\tilde{\alpha}_i^{(k)}.1_E$ که در آن $\| T \| \leq |\tilde{\alpha}_i^{(k)}|$ جایگزین کرد به گونه‌ای که باز هم تساوی برقرار بماند. پس بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که نرم ریشه‌های $\alpha_i^{(k)}$ $1 \leq i \leq n$ از هر چندجمله‌ایِ $f_k(t)$، از $\| T \|$ تجاوز نمی‌کنند. بنابراین دنباله‌های $\{\alpha_i^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ $(1 \leq i \leq n)$ از نقاط $\mathbb{C}$ همگی کراندار هستند و در نتیجه می‌توان زیردنباله‌های همگرای $\{\alpha_i^{(k_j)}\}_{k_j=1}^{\infty}$ را از آنها برگزید: $\beta_1,\dots,\beta_n$ در $\mathbb{C}$ موجودند با این ویژگی که

$$\forall 1 \leq i \leq n \quad \lim_{j\to\infty}\alpha_i^{(k_j)} = \beta_i$$

حال در فضای عملگرهای کراندارِ $E \to E$:

$$\lim_{j\to\infty}(T-\alpha_1^{(k_j)}.1_E)\dots(T-\alpha_n^{(k_j)}.1_E) = (T-\beta_1.1_E)\dots(T-\beta_n.1_E)$$

از طرف دیگر اثر عملگرِ ظاهر شده در سمت چپ حد فوق بر $v_{k_j}$ صفر بود. پس چون زیردنباله‌ی $\{v_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ از $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$، مانند خود این دنباله در $E$ به $v$ همگرا بود، باید به ازای چندجمله‌ای درجه‌ی $n$ تکینِ $f(t) := (t-\beta_1)\dots(t-\beta_n)$ داشته باشیم $f(T)(v)=0$، امری که تعلقِ $v$ به $A_n$ و از آنجا بسته بودن این زیرمجموعه را ثابت می‌کند. پس همان‌گونه که پیشتر گفتیم باید به ازای یک عدد طبیعیِ $n$، $A_n$ نقطه‌ی درونی داشته باشد. یعنی به ازای بازی ناتهیِ همچون $U$ از فضای باناخِ $E$: برای هر $x \in U$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر $n$ مانند $0 \neq f(t) \in \mathbb{C}[t]$ موجود است که $f(T)(x) = 0$ را برآورده می‌کند. با تثبیت یک $z \in U$ و بزرگتر کردنِ $n$ در صورت لزوم، ویژگی مشابهی برای هر نقطه از $E$ برقرار خواهد بود و به عبارت دیگر می‌توان در بالا به جای $U$ کل فضای $E$ را قرار داد. چرا که یک چندجمله‌ایِ $q(t) \neq 0$ موجود است که برای آن $q(T)(z) = 0$ و حال اگر $x \in E$ دلخواه باشد، به دلیل باز بودنِ $U$ می‌توان $r > 0$ را آنقدر بزرگ گرفت که $\frac{1}{r}.x + z \in U$ و لذا به ازای یک $f(t) \neq 0$ با $\deg f \leq n$: $f(T)(\frac{1}{r}.x+z) = 0$ و از آنجا:

$$\big(q(T)f(T)\big)(x) = r.\big(q(T)\big(\overbrace{f(T)(\frac{1}{r}.x+z)}^{=0}\big) - f(T)\big(\overbrace{q(T)(z)}^{=0}\big)\big) = 0$$

درجه‌ی $q(t)f(t) \neq 0$ حداکثر $n+\deg q$ است و لذا با در نظر گرفتنِ عدد فوق به عنوان $n$، گزاره‌ی زیر صادق خواهد بود:

[۲۶] نرم عملگریِ $T : E \to E$ است: $\| T \| := \sup_{x\in E-\{0\}}\frac{|T(x)|}{|x|}$.

$(*)$ برای هر $x \in E$ یک چندجمله‌ایِ $f(t) \in \mathbb{C}[t]-\{0\}$ از درجه‌ی حداکثر $n$ موجود است به قسمی که: $f(T)(x) = 0$.

با به کار بردنِ $(*)$ می‌توان به سادگی حل را تکمیل کرد. به هر $x \in E$ یک «چندجمله‌ایِ مینیمال» که با نمادِ $p_x(t)$ نشان داده می‌شود نسبت می‌دهیم که عبارت است از چندجمله‌ایِ تکین و ناصفری با کمترین درجه‌ی ممکن که در $p_x(T)(x) = 0$ صدق می‌کند. به وضوح شرط لازم و کافی برای آنکه برای چندجمله‌ایِ $q(t) \in \mathbb{C}[t]$ تساویِ $q(T)(x) = 0$ را برآورده کند آن است که در حلقه‌ی چندجمله‌ایِ $\mathbb{C}[t]$ داشته باشیم $p_x(t)|q(t)$ به علاوه $(*)$ نشان می‌دهد که $\deg p_x \leq n$ برای هر $x$. به منظور اثبات حکم مسأله کافی است نشان داد که چندجمله‌ای مختلط ناصفری موجود است که همه‌ی $p_x$ها آن را می‌شمارند. توجه کنید که اگر تعداد اعداد مختلطی که ریشه‌ی حداقل یکی از $p_x$ها هستند متناهی باشد، این امر با توجه به اینکه درجه‌ی هریک از این چندجمله‌ای‌ها حداکثر $n$ است بدیهی خواهد بود: اگر فرض کنیم

$$\cup_{x\in E}\{c \in \mathbb{C} \mid p_x(c) = 0\} = \{b_1,\dots,b_m\}$$

آنگاه هر $p_x$ مقسوم‌علیه‌ای از $(x-b_1)^n\dots(x-b_m)^n$ خواهد بود چرا که $\deg p_x \leq n$ . بنابراین فرض کنید دنباله‌ی $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ از اعداد مختلط دوبدو متمایز موجود باشد به گونه‌ای که هر $c_k$ به ازای یک $x_k \in E$ ریشه‌ای از چندجمله‌ای مینیمالِ $p_{x_k}(t)$ متناظر $x_k$ است. هر $c_k$ باید مقدارویژه‌ای از عملگرِ $T : E \to E$ باشد: در $\mathbb{C}[t]$ چندجمله‌ایِ $p_{x_k}(t) \neq 0$ را می‌توان به صورتِ $p_{x_k}(t) = (t-c_k)q(t)$ تجزیه کرد. داریم:

$$p_x(T)(x_k) = 0 \Rightarrow (T-c_k.1_E)\big(q(T)(x_k)\big) = 0$$

$$\Rightarrow T\big(q(T)(x_k)\big) = c_k.\big(q(T)(x_k)\big)$$

که در آن چون درجه‌ی $q(t) \neq 0$ از درجه‌ی چندجمله‌ای مینیمالِ $x_k$ یا همان $p_{x_k}(t)$ کمتر است، $\big(q(T)\big)(x_k)$ ناصفر و لذا بردار ویژه‌ای متناظر مقدار ویژه‌ی $c_k$ است. پس می‌توان دنباله‌ی $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ از بردارهای به طول واحد در $E$ را چنان برگزید که هر $y_k$ بردار ویژه‌ای متناظر مقدارویژه‌ی $c_k$ باشد: $Ty_k = c_k.y_k$. می‌دانیم بردار ویژه‌های متناظر مقدارویژه‌های متمایز مستقل خطی هستند و لذا زیرمجموعه‌ی $\{y_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ از فضای باناخِ $E$ مستقل خطی است. حال به تناقض می‌رسیم: بنابر $(*)$ باید درجه‌ی چندجمله‌ای مینیمال نسبت داده شده به بردارِ $\sum_{k=1}^{n+1}y_k$ از $E$ حداکثر $n$ باشد. یعنی به ازای یک $q(t) \in \mathbb{C}[t]-\{0\}$ با $\deg q \leq n$ داریم $q(T)(\sum_{k=1}^{n+1}y_k) = 0$. در نتیجه عناصرِ $y'_i := T^i(\sum_{k=1}^{n+1}y_k)$ $0 \leq i \leq n$ ( $T^i$ به معنای ترکیبِ $i$باره‌ی $T$ با خودش است.) از $E$ وابسته‌ی خطی هستند. ولی توجه کنید که از بالا، برای هر $0 \leq i \leq n$ می‌توان نوشت: $y'_i =$

$T^i(\sum_{k=1}^{n+1} y_k) = \sum_{k=1}^{n+1} c_k^i . y_k$ و در نتیجه عناصر وابسته‌ی خطیِ $y'_0,\dots,y'_n$ از $E$ در زیرفضای متناهی‌البعدِ $Span\{y_1,\dots,y_{n+1}\}$ واقعند و در پایه‌ی مرتبِ $\{y_1,\dots,y_{n+1}\}$ برای این زیرفضا، بردارهای واقع در $\{y'_0,\dots,y'_n\}$ با ماتریسِ $(n+1)\times(n+1)$ زیر توصیف می‌شوند (در ستونِ $1\le j\le n+1$ام مختصات $y'_{j-1}$ در این پایه‌ی مرتب نوشته شده.):

$$\begin{bmatrix} 1 & c_1 & \cdots & c_1^n \\ 1 & c_2 & \cdots & c_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c_{n+1} & \cdots & c_{n+1}^n \end{bmatrix}$$

لذا دترمینان ماتریس فوق باید صفر باشد در حالی که این دترمینان، «دترمینانِ واندرموند» است و حکمی استاندارد از جبر خطی بیان می‌کند که به دلیل دوبدو متمایز بودنِ $c_1,\dots,c_{n+1}$، این دترمینان ناصفر است. تناقض حاصله حل را تکمیل می‌کند.

**تمرین ۱۸.** حکم ثابت شده در مثال ۱۷ را به فضاهای باناخ حقیقی تعمیم دهید: *اگر اندومورفیسم کراندارِ $T: E\to E$ از فضای باناخ حقیقیِ $E$ دارای این ویژگی باشد که برای هر $x\in E$، $f(T)(x)=0$ به ازای یک چندجمله‌ایِ $f(t)\in\mathbb{R}[t]-\{0\}$، آنگاه چندجمله‌ای ناصفرِ $g(t)$ با ضرایب حقیقی موجود خواهد بود که $g(T)=0$.* (راهنمایی: مختلط سازیِ[27] $E$ که عبارت است از $\mathbb{C}$- فضای برداریِ $E\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$، به روش واضح ساختارِ یک فضای باناخ مختلط را دارد و $T$ به یک عملگر پیوسته بر آن گسترش می‌یابد. حال تحقیق کنید که حکم ثابت شده در مثال مذکور را می‌توان به این عملگر اعمال کرد.)

و آخرین مثال این بخش:

**مثال ۱۹.** [28] با فرضِ $m>n$، آیا ممکن است یک نگاشتِ $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ فواصل را کاهش ندهد یا به عبارت دیگر برای هر $x,y\in\mathbb{R}^m$ فاصله‌ی نقاطِ $f(x),f(y)$ در $\mathbb{R}^n$ از فاصله‌ی $x,y$ در $\mathbb{R}^m$ کمتر نباشد؟ در این مثال با به تناقض کشاندن فرض وجود چنین $f$ ای، خواهیم دید که پاسخ منفی است. ایده‌ی کار آن است که ابتدا نشان دهیم نگاشتی به دامنه‌ی زیرمجموعه‌ی بازی از $\mathbb{R}^m$ به مقصد زیرمجموعه‌ای کراندار از $\mathbb{R}^n$ حتماً در جایی فاصله را کاهش می‌دهد. در واقع نشان خواهیم داد که بستارِ تصویر وارون هر زیرمجموعه‌ی کراندار همچون $A$ از $\mathbb{R}^n$ تحت نگاشت $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ مفروض در بالا، فاقد نقطه‌ی درونی است. برای دیدن دلیل فرض کنید چنین نباشد و به ازای بازِ ناتهیِ $U$ از $\mathbb{R}^m$ و زیرمجموعه‌ی کرانداریِ $A$ از $\mathbb{R}^n$: $U\subseteq\overline{f^{-1}(A)}$. چون $U$ ناتهی است، می‌توان نقطه‌ی $(a_1,\dots,a_m)$ در $U$ و $c>0$ را چنان انتخاب کرد که مکعبِ $\prod_{i=1}^m[a_i-c,a_i+c]$ به مرکزِ $(a_1,\dots,a_m)$ مشمول باشد در $U$. حال برای هر عدد طبیعی دلخواه $k$ زیرمجموعه‌ی

$$\{(a_1+\frac{j_1c}{k},\dots,a_n+\frac{j_mc}{k}) \mid j_1,\dots,j_m\in\{-k,\dots,0,\dots,k\}\}$$

از این مکعب $(2k+1)^m$ عضو دارد و فاصله‌ی هر دو عضو متمایز از آن حداقل $\frac{c}{k}$ است. ولی $U\subseteq\overline{f^{-1}(A)}$ لذا می‌توان یک زیرمجموعه‌ی $B$ با همین تعداد عضو از $f^{-1}(A)$ انتخاب کرد با این ویژگی که فاصله‌ی هر نقطه‌ی آن از حداقل یکی از نقاط مجموعه‌ی مذکور کمتر از $\frac{c}{4k}$ باشد. حال با استفاده از نامساوی مثلث فاصله‌ی هر دو نقطه از $B$ حداقل $\frac{c}{2k}=\frac{c}{k}-2\frac{c}{4k}$ است. پس چون بنابر ویژگی مفروض برای $f$ همواره $|f(x)-f(y)|\ge|x-y|$، با اثر دادنِ $f$ بر اعضای $B\subseteq f^{-1}(A)$، اعضای $f(B)$ به تعداد $(2k+1)^m$ نقطه در $A$ بدست می‌دهند که فاصله‌ی هر دو تا از آنها حداقل $\frac{c}{2k}$ است و لذا گوی‌های بازی در $\mathbb{R}^n$ که به مرکز این نقاط و شعاع $\frac{c}{4k}$ رسم می‌شوند، دوبدو مجزا خواهند بود. ولی همه‌ی این گوی‌های باز مشمول هستند در زیرمجموعه‌ی

$$C:=\cup_{a\in A}(\text{گوی باز به مرکز } a \text{ به شعاع } c \text{ در } \mathbb{R}^n)$$

زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ که به دلیل کراندار بودنِ $A$ کراندار خواهد بود. پس برای هر عدد طبیعیِ $k$، زیرمجموعه‌ی کراندارِ $C$ از $\mathbb{R}^n$، $(2k+1)^m$ تا گوی بازِ دوبدو مجزا هریک به شعاع $\frac{c}{4k}$ را در بردارد. حجم اجتماع این گوی‌ها اگر $\alpha>0$ حجم گوی باز واحد در $\mathbb{R}^n$ گرفته شود، برابر خواهد بود با $\alpha(2k+1)^m(\frac{c}{4k})^n$ عددی که وقتی $k\to\infty$ به دلیلِ $m>n$ به بی‌نهایت می‌رود و لذا زیرمجموعه‌ی کراندارِ $C$ از $\mathbb{R}^n$ زیرمجموعه‌هایی با حجم به دلخواه بزرگ را در بردارد که به وضوح تناقض است. حال می‌توان اثبات را با به کار بردنِ قضیه‌ی بئر تکمیل کرد: در بالا دیدیم که تصویر وارونِ هر زیرمجموعه‌ی کراندار از $\mathbb{R}^n$ تحتِ $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ هیچ‌جا چگال است. ولی این بدان معنی است که در تساویِ

$$\mathbb{R}^m=\cup_{j=1}^\infty\overline{f^{-1}(\{a\in\mathbb{R}^n \mid |a|\le j\})}$$

هیچ‌یک از زیرمجموعه‌های بسته‌ی ظاهر شده در سمت راست نقطه‌ی درونی ندارند، امری که بنابر قضیه‌ی بئر امکان‌پذیر نیست.

**تمرین ۲۰.** با فرضِ $0<\alpha<1$. نشان دهید هیچ تابعِ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با این ویژگی که

$$\forall x,y\in\mathbb{R}: |f(x)-f(y)|\ge|x-y|^\alpha$$

موجود نیست. (راهنمایی: دقیقاً مشابه مثال بالا عمل کنید و ابتدا نشان دهید که برای چنین تابعی، به ازای هر بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$، $\overline{f^{-1}([a,b])}$ نمی‌تواند نقطه‌ی درونی داشته باشد.)

[27] complexification

[28] این مثال را دکتر جعفری به من پیشنهاد داد.

# ۳ کاربردهایی از قضیه‌ی بئر در فضاهای توابع و آنالیز تابعی

در بسیاری از کاربردهای کلاسیک قضیه‌ی بئر، وجود تابعی با ویژگی‌های معین ثابت می‌گردد. فضای بئری که اینجا در نظر می‌گیریم، فضای برداریِ توابع پیوسته بر بازه‌ی $[a,b]$ یا $C([a,b])$ است که هرگاه به نرمِ
$$\| f \| = \sup\{|f(x)| \mid x\in[a,b]\}$$
موسوم به نرم سوپریمم مجهز گردد یک فضای باناخ و همگرایی در این فضا به معنای همگرایی یکنواخت توابع خواهد بود.
در اولین کاربرد خواهیم دید که به طور نوعی یک تابع پیوسته در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست.

**قضیه ۲۱.** *زیرمجموعه‌ای از $C([a,b])$ متشکل از توابع پیوسته‌ای که در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیستند شامل یک زیرمجموعه‌ی پسمانده (بنابر تعریفی که کردیم یعنی یک زیرمجموعه‌ی چگال و $G_\delta$) است.*

*اثبات.* در اینجا روند کلی اثبات را شرح می‌دهیم و جزئیات به خواننده محول می‌شود. بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان مسأله را برای بازه‌ی واحد در نظر گرفت: $[a,b]=[0,1]$. تابع پیوسته‌ای می‌سازیم که مشتق راستش در هر نقطه از $(0,1)$ نامتناهی باشد. برای هر عدد طبیعی $n$، $A_n$ را به عنوان مجموعه‌ی توابع پیوسته‌ای بر $[0,1]$ تعریف کنید که برای هریک از آنها مانند $f$ یک $x\in[0,1-\frac{1}{n}]$ موجود است به قسمی که برای هر $h\in(0,\frac{1}{n})$: $|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}|\le n$. به وضوح هر تابع پیوسته‌ی $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ای در یک نقطه پیوسته باشد در یکی از $A_n$ها واقع خواهد بود. پس به منظور اثبات وجود تابع پیوسته‌ای بر $[0,1]$ که در هیچ نقطه‌ای از $(0,1)$ مشتق‌پذیر نباشد کافی است نشان داد که $\cup_{n=1}^{\infty}A_n$ بر $C([0,1])$ منطبق نیست. قضیه‌ی بئر ابزار لازم برای انجام این کار را در اختیار ما می‌گذارد: کافی است نشان دهیم که هر $A_n$ بسته و فاقد نقطه‌ی درونی است. بسته بودن به سادگی قابل اثبات است: اگر $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعضای $A_n$ باشد که $f_j\to f$ در $C([0,1])$، برای هر $f_j$ نقطه‌ی $x_j\in[0,1-\frac{1}{n}]$ موجود خواهد بود که ویژگی گفته شده را برآورده می‌کند و با توجه به فشردگی می‌توان با جایگزین کردنِ $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ با زیردنباله‌ای از آن در صورت لزوم می‌توان فرض کرد که $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ به نقطه‌ی $x$ از $[0,1-\frac{1}{n}]$ همگراست و حال این نقطه از دامنه‌ی $f$ ویژگی مطلوب در تعریفِ $A_n$ را برآورده می‌کند: با تثبیتِ یک $h\in(0,\frac{1}{n})$ به ازای هر $j$: $|\frac{f_j(x_j+h)-f_j(x_j)}{h}|\le n$ و وقتی $j\to\infty$ به دلیلِ $f_j\rightrightarrows f$ و $x_j\to x$ سمت چپِ نامساوی همگرا می‌شود به $|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}|$ و بنابراین به $|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}|\le n$ برای هر $h\in(0,\frac{1}{n})$ می‌رسیم، امری که نشان می‌دهد $f\in A_n$. ایده‌ی اثباتِ اینکه $A_n$ نقطه‌ی درونی ندارد را به اجمال شرح می‌دهیم: هر عضوِ $A_n$ را می‌توان به طور یکنواخت با توابعی «قطعه به قطعه خطی» [29] بر $[0,1]$ که شیبِ هریک از پاره‌خط‌هایی در صفحه که نمودار آنها را تشکیل می‌دهند $\pm 2n$ است تقریب زد و چنین توابعی به وضوح عضوِ $A_n$ نیستند. □

در استدلالی دیگر از این نوع به کمک قضیه‌ی بئر می‌توان نشان داد کهتابع هموار نوعی تحلیلی نیست. رجوع کنید به [1]. یک مورد دیگر از اثبات وجود تابعی با خواص معین به کمک قضیه‌ی بئر:

**قضیه ۲۲.** *یک تابع پیوسته‌ی $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ موجود است که بر هیچ زیربازه‌ای یکنوا (صعودی یا نزولی) نیست.*

*اثبات.* برای هر جفت از اعداد طبیعیِ $k\le n$ قرار می‌دهیم:
$$A_{k,n}=\{f\in C([0,1]) \mid f \text{ بر بازه‌ی } [\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}] \text{ یکنوا است.}\}$$
به وضوح تابع پیوسته‌ای بر $[0,1]$ که بر زیربازه‌ای به طول مثبت یکنوا باشد باید به یکی از $A_{k,n}$ها تعلق داشته باشد و لذا باید نشان دهیم که فضای توابع پیوسته بر $[0,1]$ یا $C([0,1])$ بر زیرمجموعه‌ی $\cup_{k\le n}A_{k,n}$ منطبق نیست و مجدداً با توجه به قضیه‌ی بئر روند کار مشخص است: کافی است اثبات کرد که هر $A_{k,n}$ در فضای $C([0,1])$ که به نرمِ سوپریمم مجهز شده – بسته و با درونِ تهی است. مورد اول ساده است، چرا که حد یکنواخت و در واقع حد نقطه به نقطه‌ی دنباله‌ای از توابع صعودی یا نزولی بر بازه‌ای دلخواه خود به ترتیب صعودی یا نزولی خواهد بود. در مورد دیگر باید نشان دهیم که هرگاه $\epsilon>0$ دلخواه و تابع پیوسته‌ی $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ بر زیربازه‌ی $[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$ از دامنه‌ی تعریفش یکنوا باشد، آنگاه تابع پیوسته‌ی $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ موجود است با این ویژگی که $\| f-g \|\le 2\epsilon$ و $g$ بر زیربازه‌ی $[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$ صعودی یا نزولی نیست. به دلیل پیوستگی یکنواختِ $f$ می‌توان $\frac{k-1}{n}<a<\frac{k}{n}$ را چنان برگزید که قدرمطلق تفاضل مقادیرِ $f$ در هر دو نقطه از بازه‌ی $[a,\frac{k}{n}]$ از $\frac{\epsilon}{2}$ کمتر باشد. حال $g$ با ضابطه‌ی
$$g(x)=\begin{cases} 2\frac{-\epsilon}{\frac{k}{n}-a}(x-a)+f(a) & \text{اگر } x\in[a,\frac{a+\frac{k}{n}}{2}]\\ 2\frac{f(\frac{k}{n})-f(a)+\epsilon}{\frac{k}{n}-a}(x-\frac{k}{n})+f(\frac{k}{n}) & \text{اگر } x\in[\frac{a+\frac{k}{n}}{2},\frac{k}{n}]\\ f(x) & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$
که با تغییر $f$ بر زیربازه‌ی $[a,\frac{k}{n}]$ به یک تابع قطعه به قطعه خطی که در دو سر بازه با $f$ مطابقت دارد حاصل شده، همانند $f$ پیوسته است، چون
$$g(\frac{a+\frac{k}{n}}{2})=f(a)-\epsilon<\min\{f(a),g(\frac{k}{n})=f(\frac{k}{n})\}$$

[29] piecewise linear

بر $[a, \frac{k}{n}]$ و به تبع آن $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ یکنوا نیست و در نهایت از آنجا که $g$ تنها بر زیربازه‌ی $[a, \frac{k}{n}]$ با $f$ یکی نیست و به دلیل قطعه به قطعه خطی بودن بر این زیربازه، مقادیرش بر آن محصورند میان اعداد

$$g(a)=f(a), g(\frac{a+\frac{k}{n}}{2}) = f(a)-\epsilon, g(\frac{k}{n}) = f(\frac{k}{n})$$

شرطِ $\| f-g \| \le 2\epsilon$ را هم برآورده می‌کند، چرا که

$$\forall x\in[a,\frac{k}{n}]: |f(x)-f(a)|, |f(x)-f(\frac{k}{n})| \le \epsilon$$

پس این تابع پیوسته‌ی $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ همه‌ی خواص مطلوب را دارد و اثبات تمام است. □

هر درس استانداردی در آنالیز تابعی مقدماتی، سه قضیه‌ی «اصل کرانداری یکنواخت» [۳۰] –که به «قضیه‌ی باناخ-اشتاینهاوس» [۳۱] نیز معروف است– «قضیه‌ی نگاشت باز» [۳۲] و «قضیه‌ی نمودار بسته» [۳۳] را دربرمی‌گیرد. احکامی که در اثبات آنها از قضیه‌ی بئر استفاده می‌شود. ما در اینجا تنها درباره‌ی اصل کرانداری یکنواخت بحث می‌کنیم و دو مورد دیگر را می‌توان در هر کتاب آنالیز تابعی یافت.

**قضیه ۲۳.** *فرض کنید $X$ فضایی باناخ، $Y$ یک فضای برداری نرم‌دار و $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از عملگرهای پیوسته‌ی $X\to Y$ باشد به قسمی که برای هر $x\in X$ زیرمجموعه‌ی $\{T(x)\}_{T\in\mathcal{F}}$ از $Y$ کراندار است. آنگاه خانواده‌ی $\mathcal{F}$ به طور یکنواخت کراندار خواهد بود: $M\ge 0$ موجود است به قسمی که $\| T \|\le M$ [۳۴] برای هر $T\in\mathcal{F}$.*

*اثبات.* اگر برای هر عدد طبیعیِ $n$ قرار دهیم:

$$A_n = \{x\in X \mid \forall T\in\mathcal{F}: |T(x)|\le n\}$$

$A_n$ها اولاً به دلیل کراندار بودن عملگرهای واقع در $\mathcal{F}$ بسته خواهند بود و ثانیاً به دلیل شرطی که قائل شده‌ایم $X$ را می‌پوشانند. پس بنابر قضیه‌ی بئر به ازای یک عدد طبیعیِ $n$، $A_n$ نقطه‌ی درونی دارد. فرض کنید گوی باز به مرکز $z$ و شعاعِ $r>0$ مشمول در آن باشد. برای هر $x\in X$ نقطه‌ی $z+\frac{r}{2|x|}.x$ از $X$ در این گوی باز و لذا در $A_n$ واقع خواهد بود و از آنجا:

$$\forall T\in\mathcal{F}: |T(z+\frac{r}{2|x|}.x)|\le n \Rightarrow |T(x)|\le\frac{2|x|}{r}(n+|T(z)|)$$

و بنابراین با فرضِ $M:=\frac{2}{r}(n+\sup_{T\in\mathcal{F}}|T(z)|)$ خواهیم داشت

$$\forall T\in\mathcal{F}, x\in X: |T(x)|\le M|x|$$

□

[۳۰] The Uniform Boundedness Principle

[۳۱] The Theorem Banach-Steinhaus

[۳۲] The Open Mapping Theorem

[۳۳] The Closed Graph Theorem

[۳۴] مشابه قبل منظور از $\| T \|$ نرم عملگرِ $T$ است.

این قسمت را با تمرینی که برای حل آن می‌توان از اصل کرانداریِ یکنواخت استفاده کرد به پایان می‌بریم:

**تمرین ۲۴.** *فرض کنید $(H,\langle,\rangle)$ فضایی هیلبرت [۳۵] و $T:H\to H$ نگاشتی خطی باشد با این ویژگی که*

$$\forall x,y\in H: \langle T(x),y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$$

*نشان دهید عملگرِ $T$ کراندار است.(راهنمایی: خانواده‌ی $\{x\mapsto\langle x,T(y)\rangle\}_{y\in H,|y|\le 1}$ از تابعک‌های کراندار بر $H$ را در نظر بگیرید و به آنها اصل کرانداری یکنواخت را اعمال کنید.)*

## ۴ دو نکته‌ی کوتاه درباره‌ی توابع مختلط

در اینجا به بیان دو گزاره درباره‌ی توابع هولومورف (تحلیلی مختلط) می‌پردازیم که در اثباتشان از قضیه‌ی بئر استفاده می‌شود. قضیه‌ی اول که از [۶] اقتباس شده، بیان می‌کند که حد نقطه به نقطه‌ی دنباله‌ای از توابع هولومورف، باید بر زیرمجموعه‌ای باز و ناتهی از دامنه‌ی تعریف هولومورف باشد. امری که به وضوح برای توابع $C^\infty$ برقرار نیست.

**قضیه ۲۵.** *$\Omega$ بازی ناتهی از $\mathbb{C}^n$ است و $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ دنباله‌ای از توابع هولومورف بر آن که به طور نقطه به نقطه به یک تابعِ $f:\Omega\to\mathbb{C}$ همگرا هستند. آنگاه زیرمجموعه‌ی باز و چگالِ $V$ از $\Omega$ موجود است که $f$ بر آن به تابعی هولومورف تحدید می‌شود.*

*اثبات.* حول هر نقطه از $\Omega$ می‌توان یک همسایگی بازِ $U$ در نظر گرفت با این ویژگی که بستارِ $U$ در $\mathbb{C}^n$، فشرده است و مشمول در $\Omega$. کافی است نشان دهیم که $f$ بر بازی ناتهی مشمول در $U$ هولومورف است تا حکم نتیجه شود. ایده‌ی کار استفاده از قضیه‌ی معروفِ «مُنتل» [۳۶] است که بیان می‌کند خانواده‌ای از توابع هولومورف و به طور موضعی کراندار (یعنی بر زیرمجموعه‌های فشرده به طور یکنواخت کراندار باشد.) بر بازی همچون $D$، نرمال است به این معنی که هر دنباله از اعضای آن زیردنباله‌ای دارد که بر هر زیرمجموعه‌ی فشرده از $D$ به طور یکنواخت همگراست. پس در اینجا اگر نشان دهیم که بر یک بازِ $\emptyset\neq W\subseteq U$، دنباله‌ی $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ به طور یکنواخت کراندار است، آنگاه یک زیردنباله‌ی $\{f_{k_j}\}_{j=1}^\infty$ از آن موجود خواهد بود که بر زیرمجموعه‌های فشرده‌ی $W$ به طور یکنواخت همگراست. ولی حدِ چنین دنباله‌ای از توابعِ هولومورف خود هولومورف خواهد بود و از طرف دیگر اینجا این حد همان تحدیدِ $f$ به $W$ است، زیرا $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ و درنتیجه $\{f_{k_j}\}_{j=1}^\infty$ بر باز بزرگترِ $\Omega$ به طور نقطه به نقطه به $f$ همگرا

[۳۵] فضای ضرب داخلیِ کامل

[۳۶] Montel's Theorem

می‌شدند و بنابراین $f$ بر بازِ $W \neq \emptyset$ مشمول در $U$ هولومورف خواهد بود، همان چیزی که در پی آن بودیم. پس به منظور اتمام کار کافی است نشان دهیم $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ بر بازی ناتهی از $U$ به خانواده‌ای به طور یکنواخت کراندار تحدید می‌شود. مجدداً ابزاری که به کار خواهیم برد قضیه‌ی بئر است: هر $f_k$ چون بر زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی $\bar{U}$ به طور پیوسته تعریف شده، بر $U$ کراندار است و لذا می‌توان نوشت $U = \cup_{m=1}^{\infty}\{z \in U \mid \forall k \in \mathbb{N}\ |f_k(z)| \leq m\}$. زیرمجموعه‌هایی از $U$ که در سمت راستِ تساوی آمده‌اند، همگی در آن بسته‌اند و لذا یکی از آنها باید حائز نقطه‌ی درونی باشد [۳۷]: بازی ناتهی مانندِ $W$ از $U$ به همراه عدد طبیعیِ $m$ موجودند به گونه‌ای که برای هر $z \in W$ و $k \in \mathbb{N}$ داریم $|f_k(z)| \leq m$ و این به معنای کرانداری یکنواخت خانواده‌ی $\{f_k|_W\}_{k=1}^{\infty}$ خواهد بود. $\square$

**مثال ۲۶.** *«قضیه‌ی کازوراتی-وایرشتراس» [۳۸] بیان می‌کند که اگر $\Omega$ بازی از $\mathbb{C}$ باشد، $a \in \Omega$ و $f : \Omega - \{a\} \to \mathbb{C}$ تابعی هولومورف که $a$ یک نقطه‌ی تکینگی اساسی [۳۹] از آن است، آنگاه مقادیرِ $f$ در هر همسایگی محذوف از $a$، به هر عضوی از $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ [۴۰] به دلخواه نزدیک می‌شوند. قضیه‌ی بئر به ما اجازه می‌دهد این حکم را اندکی قوی‌تر کرده و وجود یک زیرمجموعه‌ی چگالِ $X$ از $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ را نتیجه بگیریم با این ویژگی که برای هر بازِ $D \subseteq \Omega$ از $\mathbb{C}$ حولِ $a$، $f(D - \{a\})$ زیرمجموعه‌ی $X$ را دربردارد. بدین منظور خانواده‌ی $\left\{f\left(\{z \in \Omega \mid 0 < |z-a| < \frac{1}{n}\}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ از زیرمجموعه‌های $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ را در نظر می‌گیریم که عناصرش به دلیل باز بودنِ هر تابع هولومورف غیر ثابت باز و به دلیل قضیه‌ی کازوراتی-وایرشتراس چگالند. پس بنابر قضیه‌ی بئر*

$$X = \cap_{n=1}^{\infty} f\left(\{z \in \Omega \mid 0 < |z-a| < \frac{1}{n}\}\right)$$

*زیرمجموعه‌ای چگال از $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ خواهد بود و به وضوح ویژگی مطلوب را برآورده می‌کند. لازم به ذکر است که این حکمِ قوی‌تر از قضیه‌ی کازوراتی-وایرشتراس، همچنان از «قضیه‌ی پیکار» [۴۱] که بیان می‌کند «تابع هولومورفِ تک‌متغیره در هر همسایگی محذوفی از تکینگی اساسی خود، هر مقدار مختلطی به جز احتمالاً یکی را بی‌نهایت بار می‌پذیرد.» بسیار ضعیف‌تر است!*

[۳۷] استفاده از قضیه‌ی بئر مجاز است، چرا که $U$ یک فضای بئر است: بازی از فضای کاملِ $\mathbb{C}^n$.

[۳۸] Casorati-Weierstrass Theorem

[۳۹] essential singularity

[۴۰] $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ کره‌ی ریمان یا همان فشرده‌سازیِ تک‌نقطه‌ایِ $\mathbb{C}$ است.

[۴۱] Picard Theorem

## ۵ قضیه‌ی بئر و اصل انتخاب

قضیه‌ی بئر به روشی جالب و غیرمنتظره در اثبات «اصل انتخاب وابسته» [۴۲] به کار می‌رود. اصل انتخاب وابسته که از «اصل انتخاب» [۴۳] ضعیف‌تر و از «اصل انتخاب شمارا» [۴۴] قوی‌تر است، به شکل زیر قابل بیان است:

**اصل انتخاب وابسته.** فرض کنید $R$ رابطه‌ای بر مجموعه‌ی $X \neq \emptyset$ باشد با این ویژگی که برای هر $a \in X$، $b \in X$ با $aRb$ موجود است. آنگاه می‌توان دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعضای $X$ را انتخاب کرد با این ویژگی که $x_nRx_{n+1}$ برای هر عدد طبیعیِ $n$.

توجه کنید $n$ جمله‌ی اول چنین دنباله‌ای بدون به کار بردن اصل انتخاب هم قابل ساختن هستند و نکته آن است که می‌توان تا بی‌نهایت پیش رفت و کل چنین دنباله‌ای را تشکیل داد مشابه آنچه در قسمت نخست درباره‌ی قضیه‌ی بئر گفتیم مبنی بر اینکه برای تعداد متناهی زیرمجموعه‌ی باز و چگال بدیهی است. مشابهت بین این دو گزاره بیش از این است و در واقع می‌توان نشان داد که این دو معادلند! [۴۵] به این که چرا حکم مذکور قضیه‌ی بئر را نتیجه می‌دهد می‌توان با رجوع به اثبات‌های قضیه‌ی بئر به عنوان مثال در [۱] یا [۴] پی برد و مشاهده کرد که در همه‌ی آنها در واقع باید انتخابِ یک دنباله از نقاط صورت پذیرد. در اینجا توجه خود را به عکس گزاره معطوف می‌کنیم:

**قضیه ۲۷.** *قضیه‌ی کتگوری بئر برای فضای متریک کامل $\Leftarrow$ اصل انتخاب وابسته*

*اثبات.* $X$ و رابطه‌ی $R$ بر آن را با ویژگی موصوف در نظر بگیرید: برای هر $a \in X$ وجود دارد $b \in X$ به قسمی که $aRb$. حال باید امکان انتخابِ دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ را نشان داد که در آن همواره داشته باشیم $x_nRx_{n+1}$. رابطه‌ی $R$ بر مجموعه‌ی $X$ را می‌توان به عنوان زیرمجموعه‌ی $\{(a,b) \in X \times X \mid aRb\}$ از $X \times X$ در نظر گرفت. فضای تمام توابع $\mathbb{N} \to X$ را به $X^{\mathbb{N}}$ نشان دهید و به متریکِ

$$d(f,g) = 2^{-\min\{n \in \mathbb{N} | f(n) \neq g(n)\}}$$

مجهز کنید. به سادگی می‌توان دید که این یک متریک است و با آن $X^{\mathbb{N}}$ به یک فضای متریک کامل تبدیل می‌شود: اینکه دنباله‌ی $\{f_n : \mathbb{N} \to X\}_{n=1}^{\infty}$ از نقاطِ این فضا کوشی باشد، به وضوح معادل

[۴۲] Axiom of dependent choice

[۴۳] Axiom of choice

[۴۴] Axiom of countable choice

[۴۵] این حکم اولین بار در مقاله‌ی زیر اثبات گردید:
Blair, Charles E. The Baire category theorem implies the principle of dependent choices. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 25 (1977), no. 10, 933–934

است با اینکه برای هر عدد طبیعیِ $m$ دنباله‌ی $\{f_n(m)\}_{n=1}^{\infty}$ از اعضای $X$ از جایی به بعد ثابت باشد. ولی آنگاه می‌توان یک تابعِ $f : \mathbb{N} \to X$ معرفی کرد که در این متریک حدِ دنباله‌ی مذکور باشد. کافی است $f(m)$ را برابر با $f_n(m) \in X$ به ازای $n$های به اندازه‌ی کافی بزرگ بگیریم. حال آماده‌ایم تا زیرمجموعه‌های باز و چگالی از فضا را که باید قضیه‌ی بئر به آنها اعمال گردد معرفی کنیم. قرار دهید:

$$U_n = \cup_{m>n} \cup_{(a,b)\in R} \{f \in X^{\mathbb{N}} \mid f(n) = a, f(m) = b\}$$

$U_n$ باز است چرا که $f \in U_n$ معادل با وجودِ $k > n$ است با این ویژگی که $f(n)Rf(k)$ و حال توابعِ $g : \mathbb{N} \to X$ای که در گوی بازِ به شعاعِ $2^{-k-1}$ از $f$ واقعند باید بر $\{1, \ldots, k\}$ با آن مطابقت داشته باشند و علی‌الخصوص در $n$ و $k$ مقادیرِ به ترتیب $f(n)$ و $f(k)$ را اتخاذ کنند، امری که نشان می‌دهد $g(n)Rg(k)$ و از آنجا چون $k > n$: $g \in U_n$. چگال بودنِ $U_n$ هم از ویژگی‌ای که برای رابطه‌ی $R$ فرض شده حاصل می‌شود: $h : \mathbb{N} \to X$ را دلخواه بگیرید. عنصرِ $t \in X$ موجود است که برای آن $g(n)Rt$. پس برای هر $k > n$، تابعِ $f_k$ که در $k$ برابرِ $t$ و بر $\mathbb{N} - \{k\}$ برابر با $h$ درنظر گرفته می‌شود، به $U_n$ تعلق دارد زیرا $f_k(n)Rf_k(k)$. به علاوه چون $h(m) = f_k(m)$ به جز احتمالاً در $m = k$، خواهیم داشت $d(h, f_k) \leq 2^{-k}$. لذا دنباله‌ی $\{f_k\}_{k>n}$ از اعضای $U_n$ به $h$ همگراست و از آنجا چگال بودنِ $U_n$ هم بدست می‌آید. حال بنابر قضیه‌ی بئر (نسخه‌ای از آن که در قضیه‌ی ۱ بیان شده) یک $f \in \cap_{n=1}^{\infty} U_n$ موجود است. پس می‌توان دنباله‌ی اکیداً صعودیِ $k_1 < k_2 < \ldots$ از اعداد طبیعی را چنان برگزید که $f(k_n)Rf(k_{n+1})$ برای هر $n$. این همان تابع انتخابِ مطلوب است چرا که با قرار دادنِ $x_n := f(k_n)$، دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از عناصرِ $X$ انتخاب می‌شود که در $x_n R x_{n+1}$ برای هر $n$ صدق می‌کند. □

## ۶ کاربردی از قضیه‌ی بئر در جبر جابجایی

بحث را با نتایجِ عمدتاً آنالیزی و توپولوژیکِ قضیه‌ی بئر شروع کردیم، در ادامه به احکامی مرتبط با آن در توابع مختلط و منطق پرداختیم و حال با کاربردی شگفت‌انگیز از این قضیه در جبرجابجایی[۴۶] برگرفته از [۷] به این مقاله خاتمه می‌دهیم! در این قسمت همه‌جا منظور از «حلقه»، «حلقه‌ی جابجایی و یکدار» است.

هدف ما تعمیم گزاره‌ی مقدماتیِ «اجتناب از ایده‌آل‌های اول»[۴۷] است که در دروس جبر دوره‌ی کارشناسی بیان می‌شود:

**قضیه‌ی اجتناب از ایده‌آل‌های اول .** فرض کنید $A$ یک حلقه و $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ ایده‌آل‌هایی اول از آن باشند. اگر برای ایده‌آلِ $\mathfrak{a}$ از $A$ داشته باشیم $\mathfrak{a} \subseteq \cup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$، آنگاه باید $\mathfrak{a}$ مشمول در یکی از $\mathfrak{p}_i$ها باشد: $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$ به ازای یک $1 \leq i \leq n$.

این در واقع بیان می‌کند که اگر $\mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{p}_i$ برای هر $i$، آنگاه یک عنصرِ $x$ در ایده‌آلِ $\mathfrak{a}$ وجود دارد که از تمامیِ $\mathfrak{p}_i$ها «اجتناب» می‌کند. مواردی در رابطه با قضیه‌ی اجتناب از ایده‌آل‌های اول در تمرین زیر گنجانده شده‌اند.

**تمرین ۲۸.** *در برخی مراجع حکمی قوی‌تر از آنچه که در اینجا بیان گردید به عنوان «قضیه‌ی اجتناب از ایده‌آل‌های اول» در نظر گرفته می‌شود که به این شرح است: «فرض کنید $n \geq 2$ و $\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ ایده‌آل‌هایی از حلقه‌ی $A$ باشند با این ویژگی که $\mathfrak{a} \subseteq \cup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$. آنگاه اگر حداکثر دو تا از ایده‌آل‌های $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ اول نباشند، به ازای حداقل یک $1 \leq i \leq n$ خواهیم داشت $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$.»*

الف) *حکم فوق را برای $n = 2$ ثابت کنید.*

ب) *حکم مذکور را با استقرا بر $n \geq 2$ ثابت کنید. (راهنمایی: پایه‌ی استقرا همان قسمت (الف) است. برای رسیدن از فرض استقرا به حکم استقرا، در حالت $n \geq 3$ مسأله را به حالتی تقلیل دهید که $\mathfrak{a}$ در اجتماع $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ مشمول باشد ولی در اجتماع هیچ $n-1$ تایی از آنها خیر. بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد $\mathfrak{p}_n$ اول است. سپس برای هر $1 \leq j \leq n$ یک عنصرِ $x_j \in \mathfrak{a} - \cup_{1\leq i\leq n, i\neq j} \mathfrak{p}_i$ انتخاب کنید و با بررسیِ $x_1 \ldots x_{n-1} + x_n \in \mathfrak{a}$ حل را تکمیل کنید.)*

پ) *یک صورت‌بندیِ دیگر از قضیه‌ی اجتناب از ایده‌آل‌های اول اینگونه بیان می‌شود: «اگر حلقه‌ی $A$ شاملِ یک میدان نامتناهی باشد، آنگاه برای ایده‌آل‌های $\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ از $A$، $\mathfrak{a} \subseteq \cup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$ نتیجه می‌دهد که حداقل یکی از $\mathfrak{p}_i$ها $\mathfrak{a}$ را دربردارند.» این گزاره را ثابت کنید. (راهنمایی: یک فضای برداری بر میدانی نامتناهی به صورت اجتماع تعدادی متناهی از زیرفضاهای سره‌اش قابل بیان نیست.)*

ت) *حلقه‌ی خارج‌قسمتیِ*

$$\frac{\mathbb{Z}[x, y]}{(x^2, y^2)}$$

*را در نظر بگیرید. تحقیق کنید برای ایده‌آل‌های $(\bar{x})$، $(\bar{y})$، $(\bar{x} + \bar{y})$ و $(\bar{x}, \bar{y})$ از این حلقه داریم:*

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}) \cup (\bar{y}) \cup (\bar{x} + \bar{y})$$

*در حالی که سمتِ چپ زیرمجموعه‌ی هیچ‌یک از سه ایده‌آل ظاهر شده در سمت راست نیست. نتیجه بگیرید که هیچ‌یک*

[۴۶] این کاربرد از قضیه‌ی بئر را دکتر پورنکی به من معرفی کرد.
[۴۷] Prime avoidance theorem

*از دو نسخه‌ای از قضیه‌ی اجتناب از ایده‌آل‌های اول که در این تمرین بیان شدند، قابل ارتقا نیستند. به عبارت دیگر نمی‌توان در صورت‌بندیِ نخست که در ابتدای مسأله داشتیم، تعداد ایده‌آل‌هایی را اول نیستند از دو بیشتر گرفت یا در صورت‌بندیِ ارائه شده در (ج)، شرط نامتناهی بودنِ میدان را حذف نمود.*

هدف آن است که قضیه‌ی اجتناب از ایده‌آل‌های را به حالت شمارا تعمیم دهیم و بررسی کنیم که در صورت $\mathfrak{a} \subseteq \cup_{i=1}^{\infty}\mathfrak{p}_i$ در حالتی که هر ایده‌آلِ $\mathfrak{p}_i$ اول باشد، آیا لزوماً $\mathfrak{a}$ مشمول در یکی از $\mathfrak{p}_i$ها خواهد بود یا خیر؟ در حالت کلی پاسخ منفی است:

**مثال ۲۹.** *در حلقه‌ی چندجمله‌ایِ $\mathbb{Q}[x,y]$، به دلیل آنکه هر چندجمله‌ای عاملی تحویل‌ناپذیر دارد برای ایده‌آل ماکسیمالِ $(x,y)$ می‌توان نوشت:*

$$(x,y) = \cup_{f(0,0)=0 \text{ تحویل‌ناپذیر با } f\in\mathbb{Q}[x,y]} (f)$$

*در سمتِ راست، تعدادی شمارا ایده‌آل اول از $\mathbb{Q}[x,y]$ ظاهر شده‌اند در حالی که برای هر چندجمله‌ایِ $f$، $(x,y) \subseteq (f)$ تنها وقتی می‌تواند رخ دهد که $f$ در $\mathbb{Q}[x,y]$ عامل مشترکی باشد از $x$ و $y$. یعنی یک چندجمله‌ایِ ثابت و ناصفر باشد. پس در تساوی بالا هیچ‌یک از ایده‌آل‌های $(f)$ شاملِ $(x,y)$ نیستند.*

همان‌گونه که مثال بالا نشان می‌دهد، به منظور آنکه حکم قضیه‌ی اجتناب از ایده‌آل‌های اول در حالت شمارا درست باقی بماند، باید خود را به کلاسی خاص از حلقه‌ها محدود کنیم.
تا اینجا همه‌ی صحبت‌ها جبری بود! قطعاً اگر بخواهیم در اثبات چیزی از قضیه‌ی بئر استفاده کنیم، باید با یک فضای توپولوژیک سروکار داشته باشیم. این مضمون تعریف زیر است:

**تعریف ۳۰.** *$\mathfrak{a}$ را ایده‌آلی بگیرید از حلقه‌ی $A$. «توپولوژیِ $\mathfrak{a}$-ادیک»*[48] *بر حلقه‌ی $A$ توپولوژی یکتایی است که این حلقه را به یک حلقه‌ی توپولوژیک*[49] *تبدیل می‌کند به گونه‌ای که پایه‌ای برای بازهای حول صفر*[50] *در این توپولوژی عبارتند از:*

$$A \supseteq \mathfrak{a} \supseteq \cdots \mathfrak{a}^n \supseteq \cdots$$

*به عبارت دیگر در این توپولوژی زیرمجموعه‌ی $U$ بازی حولِ $x \in A$ را دربردارد اگر وتنها اگر به ازای یک عدد طبیعیِ $n$ داشته باشیم $x + \mathfrak{a}^n \subseteq U$.*[51]

[48] $\mathfrak{a}$-adic topology

[49] حلقه‌ای که ساختار یک فضای توپولوژیک را نیز دارد با این ویژگی که جمع و تفریق و ضرب در آن پیوسته‌اند.

[50] توجه کنید که در یک گروه توپولوژیک، بازهای حول عنصر همانی به طور یکتا توپولوژی را مشخص می‌کنند.

[51] همه‌جا منظور از نمادگذاریِ $S + x$ که در آن $x$ عضوی از حلقه است و $S$ زیرمجموعه‌ای از حلقه، عبارت است از زیرمجموعه‌ی $\{x+s \mid s\in S\}$.

قطعاً با داشتنِ یک فضای توپولوژیک، می‌توان از کامل بودن یا نبودن آن سخن گفت: در تعریف قبلی دنباله‌های کوشی عبارتند از دنباله‌هایی به صورتِ $\{x_\mu\}_{\mu=1}^{\infty}$ با این ویژگی که برای هر $n$ به ازای $\mu$ و $\nu$های به اندازه‌ی کافی بزرگ داشته باشیم: $x_\mu - x_\nu \in \mathfrak{a}^n$. همگرایی این دنباله‌ی کوشی به $x \in A$ به معنای آن است که برای هر ایده‌آلِ $\mathfrak{a}^n$ به ازای $\mu$های به اندازه‌ی کافی بزرگ، $x_\mu - x$ در $\mathfrak{a}^n$ واقع شود. کامل بودن حلقه‌ی $A$ در توپولوژیِ $\mathfrak{a}$-ادیک به این معنی تعریف می‌شود که هر دنباله‌ی کوشی در آن حدی یکتا داشته باشد. در صورت کامل نبودنِ فضا می‌توان آن را کامل کرد به این معنی که به طور چگال آن را در یک فضای کامل نشاند[52]. دو دنباله‌ی کوشیِ $\{x_\mu\}_{\mu=1}^{\infty}$ و $\{y_\mu\}_{\mu=1}^{\infty}$ معادل نامیده می‌شوند اگر برای هر $n$ داشته باشیم $x_\mu - y_\mu \in \mathfrak{a}^n$ هرگاه $n$ به اندازه‌ی کافی بزرگ اختیار شود. حال می‌توان فضایی معرفی کرد که در آن تمامی دنباله‌های کوشی همگرا هستند و هر دنباله‌ی کوشی در $A$ نقطه‌ای از آن را معین می‌کند. به این صورت که مجموعه‌ی $\hat{A}$ متشکل از تمامی کلاس‌های هم‌ارزیِ دنباله‌های کوشی در $A$ را در نظر گرفت و آن را مجهز به توپولوژی یکتایی نمود که در آن نگاشتِ $A \to \hat{A}$ که هر عضو از $A$ را به دنباله‌ی کوشی‌ای که جملاتش ثابتند می‌برد پیوسته است. این همان مفهومِ «تکمیل» [53] است که در جبر جابجایی کاربردهای بسیاری دارد. در اینجا ضرب و جمع دنباله‌های کوشی و به تبع آن ضرب و جمع نقاطِ $\hat{A}$ معنی دارد و در واقع اعمال حلقه‌ی $A$ به طور پیوسته به فضای $\hat{A}$ گسترش می‌یابند و آن را به یک حلقه‌ی توپولوژیک بدل می‌کنند. این همان چیزی است که در جبرجابجایی «تکمیلِ $A$ در توپولوژیِ $\mathfrak{a}$-ادیک» نامیده می‌شود. می‌توان نشان داد که در این صورت حلقه‌ی توپولوژیکِ $\hat{A}$ [54] کامل خواهد بود و $A \to \hat{A}$ یک همریختی حلقه‌ای. برای بررسی دقیق‌تر این مباحث به فصل ۱۰ از کتاب جبر جابجایی «عطیه-مک‌دونالد» مراجعه کنید.

**مثال ۳۱.** *اگر $A = \mathbb{Z}$ و $\mathfrak{a} = p\mathbb{Z}$ که در آن $p$ عددی اول است، آنگاه $\hat{A}$ حلقه‌ی اعداد صحیحِ $p$-ادیک* [55] *خواهد بود. هر عنصر آن یک سری نامتناهیِ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n p^n$ است که در آن داریم $0 \leq a_n \leq p-1$ در واقع این عضو را می‌توان به عنوان حد دنباله‌ی کوشیِ $\{\sum_{n=1}^{k} a_n p^n\}_{k=1}^{\infty}$ از اعضای $\mathbb{Z}$ تلقی کرد. به عنوان یک*

[52] البته باید توجه کرد که چون اینجا با فضاهای متریک سروکار نداریم و ممکن است حلقه‌ی $A$ در توپولوژی معرفی شده هاسدورف نبوده و در نتیجه حد دنباله یکتا نباشد، شاید لفظ «نشاندن» صحیح نباشد یا به عبارت دیگر $A \to \hat{A}$ یک‌به‌یک نشود.

[53] completion

[54] در واقع می‌توان این حلقه را به طور صریح معرفی کرد:

$$\hat{A} = \lim_{\leftarrow} \frac{A}{\mathfrak{a}^n}$$

که در آن $\lim_{\leftarrow}$ نمادِ «حد معکوس» inverse limit است.

[55] $p$-adic integers

*مثال دیگر، حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های $n$-متغیره با ضرایب در میدانِ $k$ را در نظر بگیرید: $A = k[x_1, \dots, x_n]$ که به توپولوژی ناشی از ایده‌آل ماکسیمالِ $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$ مجهز شده است. $\hat{A}$ حلقه‌ی سری‌های توانی صوری $n$-متغیره با ضرایب در $k$ یا $k[[x_1, \dots, x_n]]$ خواهد بود.*

ما به کمک قضیه‌ی بئر، اجتناب از ایده‌آل‌های اول در حالت شمارا را برای آن دسته از حلقه‌های موضعی و نوتری[۵۶] همچون $(A, \mathfrak{m})$[۵۷] ثابت می‌کنیم که در توپولوژیِ $\mathfrak{m}$-ادیک کامل هستند. پس توجه خود را به حلقه‌های موضعی، نوتری و کامل معطوف می‌کنیم که حلقه‌ی اعداد صحیح $p$-ادیک و حلقه‌ی $k[[x_1, \dots, x_n]]$ مثال‌هایی از این نوعند [۵۸]. توجه کنید که برای حلقه‌ی موضعی و نوتریِ $(A, \mathfrak{m})$، در حالت کامل بودن، توپولوژیِ $\mathfrak{m}$-ادیک از یک متر حاصل می‌شود: برای $x, y \in A$، فاصله‌ی $d(x,y)$ صفر گرفته می‌شود اگر $x = y$ و در غیر این صورت برابر با $\frac{1}{2^n}$ تعریف می‌شود که در آن $n \geq 0$ بزرگترین عدد صحیح نامنفی‌ای است با این ویژگی که $x - y \in \mathfrak{m}^n$. تحقیق آنکه این یک متریک است و همان توپولوژی فوق را القا می‌کند به سادگی امکان‌پذیر است و تنها نکته‌ی مبهم، دلیل خوشتعریفیِ $d$ است که به معنای آن است که $\cap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n = \{0\}$. این نتیجه‌ای است از قضیه‌ی معروفِ اشتراک کرول [۵۹] که بیان می‌کند چنین تساوی‌ای در $A$ و در حالت کلی‌تر در هر حلقه‌ی موضعی و نوتری صادق است. هر ایده‌آل از $A$ همچون $\mathfrak{a}$ در توپولوژیِ $\mathfrak{m}$-ادیک بسته خواهد بود، چرا که اگر $x \in A - \mathfrak{a}$، آنگاه بازی حولِ $x$ موجود است که $\mathfrak{a}$ را قطع نمی‌کند یا معادلاً به ازای یک عدد صحیح نامنفیِ $n$ داریم $(x + \mathfrak{m}^n) \cap \mathfrak{a} = \emptyset$. این هم از آنجا ناشی می‌شود که در حلقه‌ی موضعی و نوتریِ $\frac{A}{\mathfrak{a}}$، عنصرِ $\bar{x} \neq 0$ بنابر قضیه‌ی اشتراک کرول در یکی از توان‌های ایده‌آل ماکسیمال یکتای حلقه، یعنی در حداقل یکی از ایده‌آل‌های

$$(\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{a}})^n = \frac{\mathfrak{m}^n + \mathfrak{a}}{\mathfrak{a}} \quad (n \geq 0)$$

از حلقه‌ی $\frac{A}{\mathfrak{a}}$ واقع نیست. حال همه‌چیز برای بیان قضیه‌ی زیر آماده است:

**قضیه ۳۲. تعمیم قضیه‌ی اجتناب از ایده‌آل‌های اول .** *فرض کنید $(A, \mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی، نوتری و کامل (به معنای کامل بودن در توپولوژیِ $\mathfrak{m}$-ادیک) باشد، $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از $A$ و $\{\mathfrak{p}_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از ایده‌آل‌های اولِ این حلقه. آنگاه اگر $\mathfrak{a} \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{p}_i$، باید $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$ به ازای یک $i \geq 1$.*

*اثبات.* در فضای متریک کاملِ $A$، $\mathfrak{a}$ و همچنین $\mathfrak{p}_i$ها زیرمجموعه‌هایی بسته‌اند و بنابراین $\mathfrak{a}$ ساختار یک فضای متریک کامل را از $A$ به ارث می‌برد. فضای متریک کاملی که با توجه به $\mathfrak{a} \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{p}_i$، به صورت $\mathfrak{a} = \cup_{i=1}^{\infty} (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_i)$ به عنوان اجتماع زیرفضاهای بسته‌اش نوشته شده. از قضیه‌ی ۲ باید حداقل یک زیرمجموعه‌ی $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_i$ از فضای $\mathfrak{a}$ دارای نقطه‌ی درونی باشد. اگر چنین نقطه‌ای را $x$ بنامیم، باید اشتراک بازی از $A$ حولِ $x$ با $\mathfrak{a}$ مشمول باشد در $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_i$. ولی با توجه به توصیفی که از توپولوژی $\mathfrak{m}$-ادیک ارائه گردید، این به معنای وجودِ $x \in \mathfrak{a}$ و $n \in \mathbb{N}$ است با این ویژگی که $\mathfrak{a} \cap (x + \mathfrak{m}^n) \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_i$. از این نتیجه خواهیم گرفت که $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$. $1 \notin \mathfrak{a}$ و لذا این ایده‌آل به تمامی داخل ایده‌آل ماکسیمال یکتای حلقه یا $\mathfrak{m}$ قرار دارد. پس برای یک $y \in \mathfrak{a}$ دلخواه، $y^n \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}^n$. پس $x + y^n \in \mathfrak{a} \cap (x + \mathfrak{m}^n)$ که بنابر شمول فوق ثابت می‌کند $x + y^n \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_i$ در حالی که بنابر همان شمول، اینجا $x$ هم به سمتِ راست تعلق دارد. پس $y^n \in \mathfrak{p}_i$ که چون $\mathfrak{p}_i$ اول است، $y \in \mathfrak{p}_i$ و از آنجا $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$ را بدست می‌دهد. □

لازم به ذکر است که اینجا شرط کامل بودنِ حلقه ضروری است. چرا که مثال نقضِ ارائه شده در مثال ۲۹ برای حالت شمارای قضیه‌ی اجتناب از ایده‌آل‌های اول ، اگر حلقه‌ی $\mathbb{Q}[x,y]$ در ایده‌آل ماکسیمالِ $(x,y)$ هم موضعی شود باز هم کار می‌کند و لذا مثالی از یک حلقه‌ی نوتری و موضعی ارائه می‌دهد که حکم قضیه‌ی ۳۲ برای آن صادق نیست. این به آن دلیل است که $\mathbb{Q}[x,y]_{(x,y)}$ در توپولوژی حاصل از ایده‌آل ماکسیمالش کامل نیست[۶۰]. البته می‌توان اینجا هم صورت‌بندی‌های دیگری ارائه داد و شرطِ کامل بودن در قضیه‌ی ۳۲ را با شرط‌های دیگری مثلاً اینکه حلقه‌ی موضعی ونوتریِ $A$، جبری بر یک میدان ناشمارا باشد جایگزین کرد. رجوع کنید به [۷].

## مراجع

[1] Dylan Wilson,THIS AIN'T NO MEAGER THEOREM, http://www.math.washington.edu/~morrow/336_09/papers/Dylan.pdf

[2] Sara Hawtrey Jones, Applications of Baire Category Theorem, http://projecteuclid.org/

[۵۶] Noetherian

[۵۷] منظور آن است که $A$ یک حلقه‌ی موضعی (local) است. یعنی یک ایده‌آل ماکسیمال یکتا دارد که عبارت است از $\mathfrak{m}$.

[۵۸] چرا که به عنوان حلقه‌هایی توپولوژیک فضاهایی کاملند زیرا از تکمیلِ یک فضای دیگر حاصل شده‌اند و همچنین قضیه‌ای از جبر جابجایی بیان می‌کند که با تکمیلِ یک حلقه در توپولوژی حاصل از یک ایده‌آل ماکسیمالش، حلقه‌ی حاصل نیز نوتری و به علاوه موضعی خواهد بود.

[۵۹] Krull's intersection theorem

[۶۰] تکمیل (completion) آن با $\mathbb{Q}[[x,y]]$ داده می‌شود.

DPubS/Repository/1.0/Disseminate?view=body&id=pdf_1&handle=euclid.rae/1337001353

[3] THE BAIRE CATEGORY THEOREM AND ITS CONSEQUENCES, http://www.ucl.ac.uk/~ucahad0/3103_handout_7.pdf

[4] Charles Chapman Pugh ,Real Mathematical Analysis, Springer-Verlag, New York, 2002.

[5] James R. Munkres, Topology 2ed, Prentice Hall, 2000.

[6] Steven G. Krantz, Complex Analysis as Catalyst, http://arxiv.org/pdf/math/0703006v1.pdf

[7] R. Y. Sharp, P. Vámos, Baire's category theorem and prime avoidance in complete local rings, Arch. Math. 44 (1985), 243-248

[8] The Baire Category Theorem, Ben Green, http://people.maths.ox.ac.uk/greenbj/notes.html

[9] http://mathoverflow.net

[10] http://mathlinks.ro