احتمال جابه‌جا شدن دو عضو تصادفی در یک گروه[۱]

عرفان صلواتی

۱ مقدمه

هر دانشجویی که مقدماتی از احتمال و جبر را بداند می‌تواند روی این سؤال فکر کند. در این بخش راه حل این مسأله را در حالت گروه‌های متناهی که نسبتاً سرراست است ارائه می‌دهیم:

فرض کنید G یک گروه متناهی مرتبه n باشد. $Pr(G)$ را احتمال این می‌گیریم که دو عضو که به تصادف (و با جایگذاری) از بین اعضای G انتخاب شده‌اند با یکدیگر جابه‌جا شوند. روشن است که $Pr(G) = |C|/n^۲$ که $C = \{(x,y) \in G \times G | xy = yx\}$. فرض کنید C_x مجموعه‌ی عناصری از گروه باشد که با x جابه‌جا می‌شوند. روشن است که

$$|C| = \sum |C_x|,$$

که مجموع روی همه‌ی $x \in G$ است. اکنون دقت کنید که اگر x و y مزدوج یکدیگر باشند، C_x و C_y زیرگروه‌هایی مزدوج هستند. به سادگی می‌توان دید که تعداد اعضای کلاس تزویجی x برابر است با $[G : C_x]$. بنابراین، اگر $x_۱, x_۲, \dots, x_k$ نماینده‌هایی از کلاس‌های تزویجی در G باشند، داریم

$$|C| = \sum_{i=۱}^{k} [G : C_{x_i}].|C_{x_i}| = k.n$$

بنابراین $Pr(G) = \frac{k}{n}$، یعنی نسبت تعداد کلاس‌های تزویجی G به مرتبه‌ی G. این روش توسط اردوش و توران [۳] به کار گرفته شده است.

اکنون نشان می‌دهیم وقتی که G غیر آبلی باشد، $Pr(G) \leq \frac{۵}{۸}$. می‌دانیم که G به کلاس‌های تزویجی افراز می‌شود. بعضی کلاس‌های تزویجی، تک عضوی هستند که عبارتند از اعضای مرکز G[۲]. بنابراین

$$|G| = |Z| + |K_۱| + \cdots + |K_t|,$$

که Z مرکزِ G و $K_۱, \dots, K_t$ کلاس‌های تزویجی با بیش از یک عضو هستند. داریم $|K_i| \geq ۲$، بنابراین $t \leq (|G| - |Z|)/۲$. بنابراین $k = t + |Z| \leq (|G| + |Z|)/۲$. چون G غیرآبلی است، بنابر گزاره‌ای کلاسیک G/Z دوری نیست ([۵] صفحه ۵۰) و بنابراین $|Z| \leq \frac{|G|}{۴}$. بنابراین $k \leq \frac{۵}{۸}.|G|$ و در نتیجه $Pr(G) \leq \frac{۵}{۸}$. خواننده میتواند با بررسی گروه‌های مرتبه ۸ مشاهده کند که $\frac{۵}{۸}$ بهترین کران ممکن است.

۲ گروه‌های نامتناهی

آیا استدلال‌های بخش قبل به هیچ نحوی در مورد گروه‌های نامتناهی هم برقرار هستند؟ اگر چه نسبت k/n در گروه‌های نامتناهی بی‌معنی است ولی خواهیم دید که کران ۵/۸ برای دسته‌ای از گروه‌های توپولوژیک نیز برقرار است.

فرض کنید G یک گروه توپولوژیک هاوسدورف و فشرده باشد. بنابر قضیه‌ای معروف، G دارای یک *اندازه‌ی هار چپ*[۳] است، یعنی یک اندازه‌ی برل μ به طوری که برای هر باز U از G، $\mu(U) > ۰$ و برای هر زیرمجموعه‌ی برل E از G و هر $x \in G$، $\mu(x.E) = \mu(E)$. به علاوه، μ در حد یک ضریب یکتاست، یعنی اگر فرض کنیم $\mu(G) = ۱$، آن‌گاه μ به طور یکتا مشخص می‌شود. خواننده‌ی برای آشنایی بیشتر با اندازه‌ی هار میتواند به مرجع [۴] فصل XI مراجعه کند.

روی فضای حاصل‌ضربی $G \times G$، اندازه‌ی حاصل‌ضربی $\mu \times \mu$ را قرار می‌دهیم. دوباره تعریف می‌کنیم

$$C = \{(x,y) \in G \times G | xy = yx\}$$

. داریم $C = f^{-۱}(۱)$ که $f : G \times G \to G$ تابع پیوسته‌ای است که به صورت $f(x,y) = xyx^{-۱}y^{-۱}$ تعریف می‌شود. پس C بسته و در نتیجه اندازه‌پذیر است. اگر $\mu \times \mu$ را به عنوان یک اندازه‌ی احتمال در نظر بگیریم، آن‌گاه $Pr(G) = \mu \times \mu(C)$. اکنون نتیجه‌ی بخش قبل را به گروه G تعمیم می‌دهیم:

قضیه ۱. *فرض کنید G یک گروه فشرده‌ی غیرآبلی باشد. آن‌گاه* $Pr(G) \leq ۵/۸$.

اثبات. فرض کنید χ_C تابع مشخصه‌ی C باشد. پس

$$\mu \times \mu(C) = \int_{G \times G} \chi_C d(\mu \times \mu),$$

بنابر قضیه‌ی فوبینی،

$$= \int_G \int_G \chi_C(x,y) d\mu(x) d\mu(y).$$

[۱] این مقاله ترجمه‌ای است از مقاله‌ی What is the Probability that Two group Elements Commute که در شماره‌ی نوامبر ۱۹۷۳ مجله American Mathematical Monthly چاپ شده است.

[۲] مرکز G عبارت است از $\{x \in G | \forall y \in G, xy = yx\}$.

[۳] Left Haar measure

از طرفی برای هر x،

$$\int_G \chi(x,y)d\mu(y) = \mu(C_x)$$

که $C_x = \{y|xy = yx\}$. به دلیل مشابه قسمت قبل، $[G:Z] \geq ۴$ و چون G اجتماع مجزای هم‌دسته‌های Z است نتیجه می‌شود که $\mu(Z) \leq \frac{۱}{۴}$ (دقت کنید که Z بسته و در نتیجه اندازه‌پذیر است).اکنون توجه کنید که اگر $x \in Z$، آن‌گاه $C_x = G$ و بنابراین $\mu(C_x) = ۱$. از طرف دیگر، اگر $x \in G - Z$، آن‌گاه C_x دارای اندیس حداقل ۲ است و در نتیجه $\mu(C_x) \leq \frac{۱}{۲}$.بنابراین داریم

$$\begin{aligned} Pr(G) = \mu \times \mu(C) &= \int_G \mu(C_x)d\mu(x) \\ &= \int_Z \mu(C_x)d\mu(x) + \int_{G-Z} \mu(C_x)d\mu(x) \\ &\leq \mu(Z).۱ + \mu(G-Z).\frac{۱}{۲} = \mu(Z) + \frac{۱}{۲} - \frac{\mu(Z)}{۲} \leq \frac{۵}{۸}. \end{aligned}$$

□

۳ مسائل

چند مسأله در رابطه با تخمین $Pr(G)$ برای گروه‌های متناهی مطرح می‌کنیم.

۱. ثابت کنید $Pr(G \times H) = Pr(G).Pr(H)$.

۲. اگر $Pr(G) = \frac{۵}{۸}$ آن‌گاه G پوچ‌توان است.

۳. اگر G متناهی باشد و $Pr(G) = \frac{۵}{۸}$، آن‌گاه G ضرب مستقیم یک گروه آبلی و یک ۲-گروه H است به طوری که $|H| \geq ۸$ و H جمع مستقیم هیچ دو گروهی نیست و $Pr(H) = \frac{۵}{۸}$.

۴. همه‌ی گروه‌های H با ویژگی‌های گفته شده در مسأله قبل را شناسایی کنید.

۵. از رابطه‌ی $Pr(G) = \frac{k}{n}$ می‌توان برای محاسبه‌ی کران‌های بهتری برای $Pr(G)$ در حالت گروه‌های خاص استفاده کرد. نشان دهید برای p-گروه‌های[۴] غیر آبلی، $Pr(G) \leq \frac{p^۲+p-۱}{p^۳}$.

۶. اگر G ساده و غیر آبلی باشد، آن‌گاه $Pr(G) \leq \frac{۱}{۱۲}$ و تساوی تنها برای گروه $A_۵$ رخ می‌دهد.

۷. به طور کلی در مورد ویژگی‌های احتمالاتی گروه‌های متناهی تحقیق کنید. به طور خاص، در مورد حدسی از دیکسون [۲] می‌توانید فکر کنید: احتمال این که دو عضو که به تصادف از یک گروه متناهی ساده‌ی G انتخاب می‌شوند، G را تولید کنند، به طور یکنواخت به یک میل می‌کند وقتی که مرتبه‌ی G به بی‌نهایت میل می‌کند.

در انتها یک مسأله‌ی دشوار هم مطرح می‌کنیم: کران‌های پایینی برای $Pr(G)$ بیابید. به راحتی می‌توان دید که کران ثابتی در حالت کلی وجود ندارد، اما اردوش و توران [۳] نشان داده‌اند که $Pr(G) \geq \frac{\log_۲ \log_۲ |G|}{G}$. در مرجع [۱] نیز کران‌های پایینی برای p-گروه‌های از مرتبه‌ی پایین ارائه شده است.

[۴] یعنی گروه‌هایی که مرتبه‌ی آن‌ها توانی از p است

مراجع

[۱] C. Ayoub, On the number of conjugate classes in a group, Proc. Internat. Conf. Theory of Groups, Gordon and Breach, New York, 1967, pp. 7-10.

[۲] J. Dixon, The probability of generating the symmetric group, Math. Z., 110(1969) 199-205.

[۳] P. Erdos and P. Turan, On some problems of a statistical group-theory, IV, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 19 (1968) 413-435.

[۴] P. Halmos, Measure Theory, Van Nostrand, Princeton, N. J. 1950.

[۵] W. Scott, Group Theory, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1964.