جهان ریاضیات

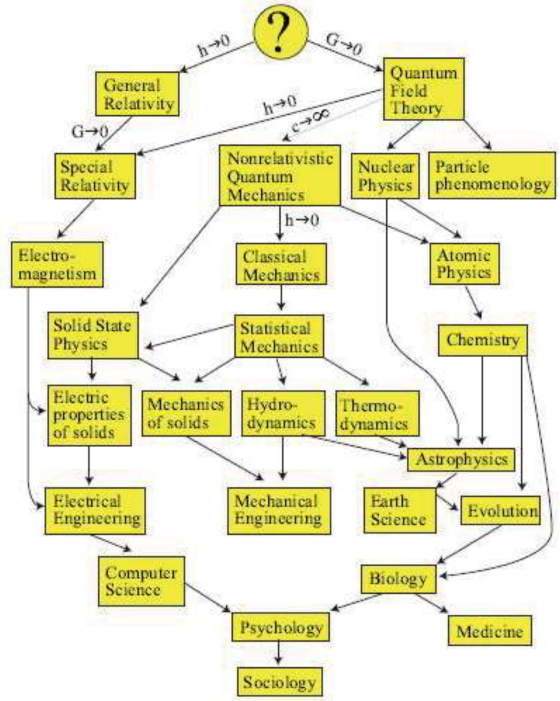
بر اساس نظریه‌ی جهان ریاضیاتی از ماکس تگمارک[1]

سامان حبیبی

تا به امروز موفق‌ترین نظریات فیزیکی آن دسته از نظریات‌اند که به جنبه‌های خاص‌تری از دنیای واقعی پیرامون ما می‌پردازند. هر چه شرایط خاص‌تر و موضوع مورد مطالعه محدودتر می‌شود، دقت نظریات و توفیق عملی آنها در توجیه و پیش بینی پدیده‌های فیزیکی افزایش می‌یابد. اما آرمان فیزیک‌دانان چیز دیگری است. آن ها دوست دارند نظریاتی داشته باشند که با وجود دقت بالا، حوزه‌ها و شرایط فراگیرتری را در برگیرند. جام مقدس فیزیک‌دانان یافتن تئوری‌ای است که بتواند تمام پدیده‌های جهان را توضیح دهد، بدون خطا. نظریه‌ای که به طور کامل همه چیز را در برگیرد و نتیجه‌ی هر آزمایشی را به صحت پیش بینی کند. آنان چنین تئوری را «نظریه‌ی همه چیز[2]» می‌نامند. البته چنین نظریه‌ای (با فرض وجود آن) هنوز یافت نشده است. تئوری جهان ریاضیاتی بیان می‌کند که اگر چنین نظریه‌ای وجود داشته باشد این نظریه یک ساختار ریاضی خواهد بود. منظور از ساختار ریاضی مجموعه‌ای از نمادها و روابط ریاضی بین آنها است. در ادامه سعی در روشن کردن این تئوری خواهیم داشت.

نظریه همه چیز، اگر واقعا وجود داشته باشد، باید واجد ویژگی‌های خاصی باشد. اما قبل از پرداختن به آن باید در مورد مطلبی توافق کنیم. آن هم وجود یک جهان فیزیکی واقعی خارج از ذهن ماست. اغلب دانشمندان این را به عنوان یک اصل می‌پذیرند و تحقیقات خود را صرف شناخت این جهان می‌کنند و دنیای بیرونی را کاملاً مستقل از ذهن انسان در نظر می‌گیرند. اما این فرضیه به صورت پیش‌فرض و برای همگان پذیرفته شده نیست. برای مثال نفس‌گراها[3] معتقدند ذهن تنها چیزی است که هر فرد کاملاً می‌تواند به وجود آن اطمینان داشته باشد یا طرفداران تفسیر کپنهاگی از مکانیک کوانتومی که معتقدند بدون مشاهده‌ی انسان، حقیقتی وجود ندارد. اما به هر حال ما فرضیه وجود حقیقت خارجی را می‌پذیریم و با آنکه شاید به نظر برسد که پذیرش و یا عدم پذیرش آن اهمیت چندانی در مطالعه جهان نخواهد داشت، خواهیم دید که این فرضیه نتایج چشمگیری خواهد داشت.

[1] Max Tegmark
[2] Theory of everything
[3] solipsists



شکل فوق (با مسامحه و اندکی شلختگی) نشان می‌دهد که چطور می‌توان نظریات علمی مختلف را روی یک درخت مرتب کرد به طوری که هر نظریه علمی از نظریات بالاییش (که با یال هایی جهت‌دار به هم متصل شده‌اند) به اضافه حداقل یک اصل جدید بدست آورد. برای نمونه مکانیک کلاسیک را می‌توان از نسبیت خاص با فرض کردن اینکه سرعت نور بی‌نهایت است بدست آورد یا اینکه زیست شناسی را از شیمی گرفت و علم طب را از زیست شناسی و....

در سلسله‌ی تئوری‌ها، در هر نظریه یک مفهوم جدید معرفی می‌شود مثل پروتون، اتم، سلول، ارگانیسم‌ها، فرهنگ و.... تعریف مفاهیم جدید برای ساده‌تر کردن کار است به جای اینکه از همان مفاهیم اولیه و بنیادین استفاده کنیم. مثلاً تصور کنید یک تئوری در مورد گیاهان و درخت‌ها داشته باشیم. اغلب این تئوری با تعریفی از درخت و گیاه و... بدون توسل به مفاهیم بنیادی‌تر ارائه می‌شود. یا اینکه تصور کنید تعریفی که از یک درخت می‌دهیم «مجموعه‌ای از اتم هایی خاص که با چینشی معین کنار هم قرار گرفته اند» باشد که البته بسیار پیچیده و عملاً ناممکن خواهد بود.

همه‌ی تئوری‌های فوق (و سایر نظریات علمی) را می‌توان به دو بخش تقسیم کرد. بخش اول دسته‌ای از تعاریف و واژگان که سعی می‌کند ارتباط میان مشاهدات و چیزهایی که نهایتاً می‌فهمیم را

توضیح دهد و بخش دوم که شامل معادلات و فرمول‌های ریاضی است.

اما نکته‌ی اساسی این است که به خاطر داشته باشیم که این ما انسان‌ها هستیم که این تعاریف را ارائه می‌دهیم و این مفاهیم ساخته‌ی ذهن ماست. همه این مفاهیم از جمله درخت، اتم و....

این تعاریف وابسته به ذهن ما هستند و اصالتی از خود در جهان خارجی ندارند.

با اندکی تسامح می‌توانیم ادعا کنیم در این درخت نظریات علمی، هنگامی که از بالا شروع می‌کنیم هرچه به پایین می‌آییم از حجم معادلات ریاضی کاسته شده و بر تعاریف و مفاهیم معرفی شده افزوده شده است. در قسمت‌های فوقانی درخت با نظریاتی مثل میدان کوانتومی و نسبیت عام مواجه‌ایم که مملو از روابط ریاضی است در بخش‌های پایینی مثلاً در زیست شناسی و زمین شناسی، فرمول‌های ریاضی بسیار اندک بوده و در بخش‌های پایین‌تر مثل جامعه‌شناسی و... به صفر میل می‌کند اما در عوض این تئوری‌ها پر از تعاریفی ساخته ذهن انسان است.

فرض وجود جهان خارجی مستقل از ذهن ما، این نکته را متذکر می‌شود که اگر نظریه‌ای تحت عنوان نظریه‌ی همه چیز وجود داشته باشد، این نظریه نباید به برداشت‌های ذهنی ما مرتبط باشد و در نتیجه بایستی مستقل از تعاریف و مفاهیمی که انسان‌ها ارائه کرده اند باشد. یعنی این نظریه تنها یک ساختار ریاضی خواهد بود. یک ساختار ریاضی شامل نمادها (که معنی خاصی ندارند) و روابط بین آنها خواهد بود.

نکته‌ای جالب توجه این است که در صورت صحت نظریه‌ی جهان ریاضیاتی، تقارن‌های ساختار منطبق بر جهان فیزیکی باید بر تقارن‌های فیزیکی موجود در دنیای اطرافمان منطبق باشد.

به عنوان یک مثال از ساختار ریاضی‌ای که سعی در توصیف فضای ۳بعدی اطرافمان دارد، به نمونه‌ی زیر دقت کنید :

- S_1 مجموعه‌ای شامل اعضای به فرم x_α است که با عدد حقیقی α اندیس‌گذاری شده‌اند.
- S_2 مجموعه‌ای شامل اعضای به فرم y_r است که با یک بردار ۳بعدی r اندیس‌گذاری شده‌اند.

به اضافه روابط زیر :

- $R_1(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) = x_{\alpha_1 - \alpha_2} \in S_1$
- $R_2(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) = x_{\alpha_1 / \alpha_2} \in S_1$
- $R_3(y_{r_1}, y_{r_2}) = y_{r_1 + r_2} \in S_2$
- $R_4(x_\alpha, y_r) = y_{\alpha r} \in S_2$
- $R_5(y_{r_1}, y_{r_2}) = x_{r_1 . r_2} \in S_1$

بنابراین می‌توانیم S_1 را به عنوان میدان اعداد حقیقی rigid در نظر بگیریم و S_2 را به عنوان فضای اقلیدسی ۳بعدی به همراه ضرب داخلی متعارف. با ترکیب روابط فوق همه‌ی روابط آشنا را می‌توانیم به دست آوریم. برای نمونه مبدا را $R_1(x_\alpha, x_\alpha) = x_0$ می‌گیریم و هم‌چنین عنصر همانی ضربی در S_1 برابر با $R_2(x_\alpha, x_\alpha) = x_1$ خواهد بود به همراه وارون جمعی $R_1(R_1(x_\alpha, x_\alpha), x_\alpha) = x_{-\alpha}$ و مبدا در فضای ۳بعدیمان $R_4(R_1(x_\alpha, x_\alpha), y_r) = y_0$ می‌شود.

این ساختار مطرح شده، دارای تقارن نسبت به دوران می‌باشد. گروه اتومورفیسم $Aut(S) = O(3)$، با ماتریس ۳ × ۳ دوران R پارامتریزه می‌شود که به صورت زیر عمل می‌کند:

$$x'_\alpha = x_\alpha, y'_r = y_{Rr}$$

برای نشان دادن این که این ساختار سه بعدی تقارن دورانی دارد، کافی است که نشان دهیم هر کدام از روابط اولیه تعریف شده روی این فضا به این تقارن احترام می‌گذارند :

$$R_3(y'_{r_1}, y'_{r_2}) = y_{Rr_1 + Rr_2} = y_{R(r_1 + r_2)} = R_3(y_{r_1}, y_{r_2})'$$

$$R_4(x'_\alpha, y'_r) = y_{\alpha R r} = y_{R \alpha r} = R_4(x_\alpha, y_r)'$$

$$R_5(y'_{r_1}, y'_{r_2}) = x_{(Rr_1).(Rr_2)} = x_{r_1 . r_2} = R_5(y_{r_1}, y_{r_2})'$$

همانطور که گفته شد، از نتایج فرضیه‌ی جهان ریاضیاتی این است که تقارن‌های ساختارهای ریاضی بر تقارن‌های جهان فیزیکی منطبق خواهند بود. برای نمونه مثال فوق نشان می‌دهد که یک ناظر درون فضای S_2 نمی تواند میان این فضا و نسخه‌ای از این فضا که دوران داده شده است تمایزی قائل شود..

نکته دیگر اینکه روابط، پتانسیل مشاهده شدن را دارند چراکه آنها خاصیت‌هایی از ساختار هستند. بنابراین بسیار مهم است که یک ساختار ریاضی را چگونه تعریف می‌کنیم از آنجا که تفاوت‌های به ظاهر کوچک در تعریف ریاضی ساختار، باعث تفاوت‌های بزرگ در فیزیک می‌شود.

برای مثال خمینه‌ی $\mathbb{R}$، فضای متریک $\mathbb{R}$، فضای برداری $\mathbb{R}$، میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ همگی به اعداد حقیقی اشاره دارند اما این‌ها چهار ساختار ریاضی مختلف هستند با چهار گروه تقارن کاملاً مختلف.

اجازه دهید برای روشن شدن این مطلب دوباره به مثال فضای ۳بعدی‌مان باز گردیم. فضای ۳بعدی که در مثال بالا مطرح شد با مبدا $R_4(R_1(x_\alpha, x_\alpha), y_r) = y_0$ را در نظر بگیرید بدون هیچ معادلی واقعی در دنیای فیزیکی. به نظر می‌رسد فضای فیزیکی اطراف ما

تقارن‌های بیشتری داشته باشد از جمله تقارن انتقالی که این ساختار ریاضی مطرح شده همچین تقارنی ندارد.

فرض کنید در مثال فوق $R_۳$ و $R_۴$ را حذف کنیم و به جای آن تعریف کنیم:

$$R_۵(y_{r_۱}, y_{r_۲}) = x_{|r_۱ - r_۲|}$$

یعنی از $S_۲$ که یک فضای برداری بود یک فضای متریک بسازیم. اما در واقع این ساختار چیزی بیش از فضای فیزیکی اطراف ما را ارائه می‌دهد چرا که این فضا یک مقیاس طول ارجح دارد. طول واحد یعنی $x_۱$ در حالی که در دنیای فیزیکی اطرافمان به نظر نمی‌آید هیچ طولی با مقیاس "۱" موجود باشد.

ساده‌ترین ساختاری که می‌توان ارائه داد که بر فضای ۳بعدی اطراف ما (با نگاه فیزیک کلاسیک) منطبق باشد، با عدم در نظرگیری نسبیت، به صورت زیر است :

- S_1 is set of elements x_α labeled by real numbers α
- S_2 is set of elements y_α labeled by real numbers α
- S_3 is a set of elements $z_r$labeled by 3-vectors r
- $R_1(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) = x_{\alpha_1 - \alpha_2} \in S_1$
- $R_2(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) = x_{\alpha_1 / \alpha_2} \in S_1$
- $R_3(y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}) = y_{\alpha_1 + \alpha_2} \in S_2$
- $R_4(x_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}) = y_{\alpha_1 \alpha_2} \in S_2$
- $R_5(z_{r_1}, z_{r_2}, z_{r_3}) = y_{(r_2 - r_1).(r_3 - r_1)} \in S_2$

که در آن $S_۱$ میدان اعداد حقیقی است و $S_۲$ فضای برداری ۱ بعدی حقیقی است، بدون تقسیم و بدون هیچ طول واحد ارجح و $S_۳$ نیز یک فضای متریک است که در آن زاویه‌ها نیز تعریف شده اند. به بیان دیگر هر ۳ نقطه یک زاویه را مشخص می‌کند و هر دو نقطه یک طول را با رابطه‌ی

$$R_۵(z_{r_۱}, z_{r_۲}, z_{r_۳}) = y_{|r_۲ - r_۱|^۲} \in S_۲$$

عام‌ترین اتومورفیسم تعریف شده روی این ساختار دوران با ماتریس R، انتقال با بردار a و تجانس با ضریب غیرصفر λ است.

$$x'_\alpha = x_\alpha, y'_\alpha = y_{\lambda^۲ \alpha}, z'_r = z_{\lambda R r + a}$$

به سادگی می‌توان این تقارن‌ها را بررسی کرد. برای مثال :

$$\begin{aligned} R_۵(z'_{r_۱}, z'_{r_۲}, z'_{r_۳}) &= y_{[(\lambda R r_۲ + a) - (\lambda R r_۱ + a)].[(\lambda R r_۳ + a) - (\lambda R r_۱ + a)]} \\ &= y_{\lambda^۲ (r_۲ - r_۱).(r_۳ - r_۱)} = R_۵(z_{r_۱}, z_{r_۲}, z_{r_۳})' \end{aligned}$$

موفقیت نسبیت عام نشان می‌دهد که فضای فیزیکی هنوز دارای تقارن‌های بیشتری است. همین طور روابط بین نقاط کاملاً جدا از هم طرد شده و فاصله تنها برای نقاط بسیار نزدیک به هم تعریف می‌شود. توجه داشته باشید که نه تقارن دیفیمورفیسم[۴] و نه تقارن پیمانه‌ای[۵] بر اتومورفیسم‌های این ساختار منطبق نیستند. به یک معنی این‌ها تقارن‌هایی منطبق بر دنیای فیزیکی نیستند و تقارن‌هایی زائد هستند. اگر به سبب فیزیک کوانتوم نبود ساختار ریاضی نسبیت عام کاندیدای خوبی به عنوان ساختار ریاضی منطبق بر دنیای واقعی‌مان می‌بود. تعریف یک ساختار ریاضی دقیق برای انطباق بر گروه تقارن‌های $SU(۳) \times SU(۲) \times U(۱)$ نظریه میدان کوانتومی از نوع استاندارد هنوز به عنوان یک مساله باز مطرح می‌شود.

[۴] Diffeomorphism
[۵] Gauge