پاسخ مسأله‌ها

پاسخ ۱. قرار می‌دهیم:
$$A=\{a\in G \mid f(a)=a^{-1}\}$$
پس $|A|>\frac{3}{4}|G|$. یک $x\in A$ دلخواه را تثبیت کنید. زیرمجموعه‌ی $\{xa \mid a\in A\}$ را xA می‌نامیم. به دلیل دوسویی بودنِ $\begin{cases}G\to G\\ g\mapsto xg\end{cases}$، $|xA|=|A|$. اعضای $xA\cap A$ با x جابجا می‌شوند. چرا که هر $z\in A\cap xA$، به ازای $y\in A$ای به صورت $z=xy$ قابل بیان است. حال چون x، y و z همگی به A تعلق دارند، f هریک از آنها را به وارونشان تصویر می‌کند و داریم:
$$y^{-1}x^{-1}=(xy)^{-1}=z^{-1}=f(z)=f(xy)=f(x)f(y)$$
$$=x^{-1}y^{-1}\Rightarrow xy=yx\Rightarrow xz=zx$$
پس $xA\cap A\subseteq C_G(x)$[1]. ولی:
$$|C_G(x)|\ge|xA\cap A|\ge|xA|+|A|-|G|=2|A|-|G|$$
$$>2(\frac{3}{4}|G|)-|G|=\frac{1}{2}|G|\Rightarrow[G:C_G(x)]<2$$
پس اندیس زیرگروهِ مرکزسازِ x یا $C_G(x)$ در G باید یک باشد که تنها وقتی می‌تواند رخ دهد که $G=C_G(x)$ که این هم به معنای تعلقِ x به مرکزِ G است. بنابراین باید: $A\subseteq Z(G)$. لذا مرکزِ G یا همان $Z(G)$ زیرگروهی از G است که بیش از نیمی از اعضای گروه را دربردارد که دوباره به معنای منطبق بودنِ آن بر کلِ گروه است. پس G آبلی است. برای اتمام کار باید نشان دهیم که f برابر است با $\begin{cases}h:G\to G\\ h(g)=g^{-1}\end{cases}$، نگاشتی که چون G آبلی است، خود یک همریختی خواهد بود. بدین منظور همریختیِ $f^{-1}\circ h:G\to G$ را در نظر می‌گیریم، همریختی‌ای که هسته‌اش چون $f|_A=h|_A$، A و بنابراین حداقل نیمی از اعضای G را در بردارد و به ناچار باید برابر با G باشد، امری که به معنای بدیهی بودن همریختیِ $f^{-1}\circ h:G\to G$ یا معادلاً $f=h$ است.

در انتها برای یافتن مثالی که نشان دهد با جایگزین کردن شرطِ $|A|>\frac{3}{4}|G|$ با $|A|\ge\frac{3}{4}|G|$ ممکن است حکم مسأله درباره‌ی f برقرار نباشد، توجه کنید به فرض آنکه تعداد اعضای زیرمجموعه‌ی A متشکل از نقاطی که تحت f به وارون خود تصویر می‌شوند $\frac{3}{4}|G|$ باشد، نامساوی‌هایی که در بالا داشتیم به صورتِ
$$\forall x\in A:\quad [G:C_G(x)]\le 2$$
در می‌آیند. ولی $[G:C_G(x)]$ تعداد اعضای کلاس تزویجیِ x است. پس زیرمجموعه‌ی A از G حداقل $\frac{3}{4}$ اعضای G را در بردارد و برای هر $x\in A$، $|\bar{x}|$ یک است یا دو. لذا یک ایده برای یافتنِ مثال مطلوب، در نظر گرفتنِ گروه متناهی‌ای است که هر کلاس تزویجیِ آن یک یا دو عضوی باشد. مثالی از چنین گروهی، گروه کواترنیون‌های ۸ عضوی
$$Q_8=\{\pm1,\pm i,\pm j,\pm k\}$$
است. اگر همریختیِ f را خودریختی داخلیِ
$$\begin{cases}f:Q_8\to Q_8\\ f(x)=ixi^{-1}=ix(-i)\end{cases}$$
از Q_8 تعریف کنیم، آنگاه f به تعدادِ $\frac{3}{4}|Q_8|=6$ تا از عناصرِ G را به معکوسِ آنها می‌نگارد: همه‌ی اعضا به جز $\pm i$ را.

پاسخ ۲. در واقع باید نشان دهیم که در هر گروهِ متناهی و غیر آبلی دو عنصر متمایز در یک کلاس تزویجی موجودند که با هم جابجا می‌شوند. فرض کنید اینگونه نباشد و گروهِ متناهی و غیر آبلی‌ای که حکم را نقض می‌کند چنان بگیرید که تعداد اعضایش حداقل مقدار ممکن باشد و این گروه را G بنامید. پس اگر دو عنصر مزدوج در G با هم جابجا شوند، باید مساوی باشند. از روش انتخابِ G، اگر زیرگروهِ سره‌ای از G غیر آبلی باشد باید در حکم مسأله صدق کند، یعنی دو عنصر مزدوج و متمایز در زیرگروهِ مذکور با هم جابجا شوند. ولی چنین عناصرِ متمایزی در G نیز با هم مزدوج خواهند بود و جابجا خواهند شد و این ویژگی در نظر گرفته شده برای G را نقض می‌کند. پس ثابت کردیم که هر زیرگروهِ سره از G آبلی است. در مرحله‌ی بعد نشان می‌دهیم که:

$(*)$ مرکزِ G بدیهی است: $Z(G)=\{e\}$.

برای اثبات توجه کنید که اگر چنین نباشد، تعداد اعضای گروهِ خارج‌قسمتیِ $\frac{G}{Z(G)}$ از G کمتر خواهد بود. پس دوباره با توجه به روشِ انتخابِ G، گروهِ خارج‌قسمتیِ مذکور یا آبلی است یا اینکه دو عنصر مزدوج و متمایز از آن با هم جابجا می‌شوند. خواهیم دید که هر دو حالت به تناقض منتهی می‌گردد: اگر $\frac{G}{Z(G)}$ آبلی باشد، با انتخابِ $a,b\in G$ به قسمی که $ab\neq ba$ (توجه کنید که G آبلی نبود.)، اعضای $aZ(G)$ و $bZ(G)$ از $\frac{G}{Z(G)}$ هم جابجا می‌شوند و این به معنای وجود یک عنصرِ $c\in Z(G)$ است که تساویِ $ab=bac$ را در G برآورده می‌کند. ولی آنگاه $b^{-1}ab$ که به کلاس تزویجیِ a در G تعلق دارد، برابرِ ac خواهد بود و لذا چون $c\in Z(G)$، با a جابجا خواهد شد. پس باید از خواصِ G: $b^{-1}ab=a$ که با توجه به چگونگی انتخابِ a و b نمی‌تواند رخ دهد. در ادامه، حالت دوم را در نظر می‌گیریم: $\frac{G}{Z(G)}$ دو عنصر مزدوج و متفاوت همچون همدسته‌های $xyx^{-1}Z(G)$ و $yZ(G)$ دارد که در گروهِ مذکور با هم جابجا می‌شوند یا معادلاً به ازای یک $z\in Z(G)$، تساویِ $(xyx^{-1})y=y(xyx^{-1})z$ را در G داریم. ولی

[1] در حل سؤال‌های ۱ و ۲ مرکزسازِ عنصرِ a از G را به $C_G(a)$ و کلاس تزویجیِ دربردارنده‌ی آن را به $\bar{a}$ نشان داده‌ایم.

دوباره این را می‌توان به صورتِ $y^{-1}(xyx^{-1})y = (xyx^{-1})z$ نوشت که جابجا شدنِ دو عنصر مزدوجِ xyx^{-1} و $y^{-1}(xyx^{-1})y$ در G را بدست می‌دهد. مجدداً این تنها در صورت تساوی این دو عنصر می‌تواند رخ دهد: $y^{-1}(xyx^{-1})y = (xyx^{-1})$. تساوی اخیر به معنای جابجا شدن عناصرِ xyx^{-1} و y از G است که در یک کلاس تزویجی واقعند. بنابراین دوباره تنها وقتی می‌تواند رخ دهد که $y = xyx^{-1}$ و این با $xyx^{-1}Z(G) \neq yZ(G)$ در $\frac{G}{Z(G)}$ تناقض دارد و اثباتِ $(*)$ تکمیل می‌شود.

حال از $(*)$ داریم:

$(**)$ رابطه‌ی جابجا شدن بر $G-\{e\}$ ترایایی است: اگر x، y و z عناصری متعلق به G و متفاوت با همانی باشند به قسمی که $xy = yx$ و $yz = zy$، آنگاه $xz = zx$.

برای دیدن دلیل، توجه کنید که $xy = yx$ و $zy = yz$ با به ترتیب $x \in C_G(y)$ و $z \in C_G(y)$ معادلند. زیرگروهِ $C_G(y)$ از G سره است، چرا که در غیر این صورت y در مرکزِ G واقع می‌شود و این با $(*)$ تناقض دارد. ولی گفتیم زیرگروه‌های سره‌ی G آبلی‌اند و بنابراین x و z که به $C_G(y)$ تعلق داشتند، باید با هم جابجا شوند.

به کمک گزاره‌های ثابت شده، حل را تکمیل خواهیم کرد: $a \in G-\{e\}$ را دلخواه بگیرید. اگر به ازای عناصرِ متمایزِ x و y متعلق به کلاس تزویجِ $\bar{a}$، $C_G(x)$ و $C_G(y)$ یکدیگر را در عضوی متفاوت با همانی مانندِ z قطع کنند، باید بنابر $(**)$ x با y جابجا شود (توجه کنید که شرایط استفاده از $(**)$ مهیا است: $z \neq e$ و به علاوه x و y که هردو به یک کلاس تزویج تعلق داشتند و لذا مزدوج بودند، متمایزند. پس هیچ یک از x و y نیز همانی نیست.) که این هم چون عناصرِ $y \neq x$ از G مزدوج بودند (در واقع هر دو با a مزدوجند.) با توجه به فرض خلف امکان ندارد رخ دهد. پس برای هر $x, y \in \bar{a}$ با $x \neq y$: $C_G(x) \cap C_G(y) = \{e\}$. این نشان می‌دهد که برای هر $a \in G - \{e\}$، زیرمجموعه‌های $C_G(x) - \{e\}$ که در آن x میان عناصرِ $\bar{a}$ تغییر می‌کند دوبدو مجزا هستند. از طرف دیگر، تعداد اعضای چنین زیرمجموعه‌ای برابرِ $|C_G(a)| - 1$ است، زیرا اگر x با a مزدوج باشد، زیرگروه‌های $C_G(x)$ و $C_G(a)$ از G هم مزدوج و به تبع آن تعداد اعضایشان برابر خواهد بود. پس برای هر $a \in G - \{e\}$:

$$|\cup_{x\in\bar{a}} C_G(x) - \{e\}| = |\cup_{x\in\bar{a}} (C_G(x) - \{e\})|$$
$$= \sum_{x\in\bar{a}} |C_G(x) - \{e\}| = |\bar{a}|(|C_G(a)| - 1) = |G| - |\bar{a}|$$

که در تساوی آخر از این استفاده کردیم که تعداد اعضای کلاس تزویجیِ a یا به عبارت دیگر $\bar{a}$، برابر است با اندیسِ مرکزسازِ a، یعنی همان $[G : C_G(a)]$. پس با تثبیتِ $a \neq e$ در G، $\cup_{x\in\bar{a}} C_G(x) - \{e\}$ بر $G - \{e\}$ منطبق نیست. چرا که در غیر این صورت از تساوی فوق باید $\bar{a}$ برابر یک شود. ولی تک‌عضوی بودنِ کلاس تزویجِ متناظرِ a به معنای تعلقِ a به مرکزِ G است، امری که با توجه به $(*)$ نمی‌تواند رخ دهد. پس می‌توان یک $b \in G - \cup_{x\in\bar{a}} C_G(x) - \{e\}$ برگزید که غیرهمانی خواهد بود. با استدلالی مشابه، $|\cup_{x\in\bar{b}} C_G(x)| = |G| - |\bar{b}|$. ولی توجه کنید که زیرمجموعه‌های $\cup_{x\in\bar{a}} C_G(x) - \{e\}$ و $\cup_{x\in\bar{b}} C_G(x) - \{e\}$ از $G - \{e\}$ مجزا هستند. چرا که اگر اینگونه نباشد، مزدوج‌های uau^{-1} و vbv^{-1} از به ترتیب a و b موجود خواهند بود به قسمی که $C_G(uau^{-1}) \cap C_G(vbv^{-1})$ شامل عضوی غیرهمانی همچون c است. پس از $(**)$، uau^{-1} و vbv^{-1} جابجا می‌شوند (توجه کنید که این دو همانی نیستند زیرا $a, b \neq e$). ولی این نشان می‌دهد که b با مزدوجِ $(v^{-1}u)a(v^{-1}u)^{-1}$ از a جابجا می‌شود. در حالی که این به دلیلِ $b \notin \cup_{x\in\bar{a}} C_G(x)$ نمی‌تواند رخ دهد. تا اینجا نشان دادیم که زیرمجموعه‌های $\cup_{x\in\bar{a}} C_G(x) - \{e\}$ و $\cup_{x\in\bar{b}} C_G(x) - \{e\}$ از $G - \{e\}$ مجزا و با تعداد اعضای به ترتیب $|G| - |\bar{a}|$ و $|G| - |\bar{b}|$ هستند. لذا:

$$(|G| - |\bar{a}|) + (|G| - |\bar{b}|) \leq |G| - 1$$

که نامساویِ $|\bar{a}| + |\bar{b}| \geq |G| + 1$ را بدست می‌دهد. این نامساوی نمی‌تواند برقرار باشد، زیرا $\bar{a}$ و $\bar{b}$ کلاس‌های تزویج متمایزی از G هستند (چرا که به دلیلِ $b \notin \cup_{x\in\bar{a}} C_G(x)$، b با a مزدوج نیست.) و لذا زیرمجموعه‌ی $\bar{a} \cup \bar{b}$ از G، $|\bar{a}| + |\bar{b}|$ تا عضو دارد. پس به تناقض رسیدیم و فرض خلف باطل است.

پاسخ ۳. زیرمجموعه‌ی X از R را برابر با $\{x^2 \mid x \in R\}$ تعریف می‌کنیم. شرطی که در صورت مسأله بر حلقه‌ی R قرار داده شده به آن معنی است که X تحت جمع بسته است. در ادامه ثابت می‌کنیم که X تحت تفریق نیز بسته است. برای یک $a \in R$ دلخواه، نگاشتِ $\begin{cases} X \to X \\ y \mapsto a^2 + y \end{cases}$ به دلیل بسته بودنِ X تحت جمع خوش‌تعریف است. این نگاشت به وضوح یک به یک است و لذا چون R و به تبع آن X متناهی‌اند، این نگاشت پوشا نیز هست. پس برای هر $b \in R$ دلخواه باید $b^2 \in X$ در بردِ این نگاشت باشد، امری که نشان می‌دهد $b^2 - a^2 \in X$. تا اینجا دیدیم که X تحت جمع و تفریق بسته است. در مرحله‌ی بعد نشان می‌دهیم که برای هر $a, b \in R$: $ab + ba \in X$. این از آنجا ناشی می‌شود که می‌توان $ab + ba$ را با جمع و تفریق از عناصرِ X بدست آورد: $ab + ba = (a + b)^2 - a^2 - b^2$.
در نهایت باید نشان دهیم که هرگاه $a, b, c \in R$، به ازای $d \in R$ مناسبی $2abc = d^2$ یا معادلاً $2abc \in X$. با توجه به خواصی که در بالا برای X برشمردیم، تنها کافی است نشان دهیم $2abc$ به صورت جمع و تفریقِ عناصری به فرمِ $xy + yx$ که در آن $x, y \in R$ قابل بیان است. این را هم می‌توان در تساویِ زیر مشاهده کرد:

$$2abc = \big(a(bc) + (bc)a\big) - \big(b(ca) + (ca)b\big) + \big(c(ab) + (ab)c\big)$$

پاسخ ۴. عنصر همانیِ G را با e نشان می‌دهیم. برای هر $a \in G$، بنابر

فرض مسأله، یا داریم $a\times e=\vec{0}$ که در چنین حالتی به شرط آنکه $e\neq\vec{0}$ بردارِ a در $\mathbb{R}^3$ مضربی از e خواهد بود یا آنکه

$$a\times e=a*e=a\Rightarrow a\perp a\times e=a\Rightarrow a=\vec{0}$$

پس اگر $e\neq\vec{0}$، هر عنصر دلخواهِ $a\in G\subseteq\mathbb{R}^3$ یا هم‌راستا با e خواهد بود یا صفر که در این حالت حکمِ مطلوب برقرار است. بنابراین در ادامه توجه خود را به حالتی معطوف می‌کنیم که: $e=\vec{0}$. آنگاه با تثبیت یک $a\in G-\{e=\vec{0}\}$، برقراری هریک از تساوی‌های $a\times a^{-1}=a*a^{-1}=e$ یا $a\times a^{-1}=0$ به معنای هم‌راستا بودنِ a و وارونش خواهد بود. به کمک این مطب، با استقرایی ساده بر $n\in\mathbb{N}$، می‌توان نتیجه گرفت که بردارهای $a^n=\overbrace{a*\cdots*a}^{n\text{ بار}}$ و a از $\mathbb{R}^3$ هم‌راستا هستند: دوباره با به کاربردنِ ویژگیِ مفروض برای G در صورتِ مسأله، $a^n\times a^{-1}\in\mathbb{R}^3$ یا صفرخواهد شد یا ناصفر و برابر با $a^n*a^{-1}=a^{n-1}$. در حالتِ نخست، چون $a^{-1}\neq\vec{0}$ (زیرا در غیر این صورت a^{-1} و به تبع آن a برابر با $e=\vec{0}$ خواهند بود که با روش برگزیدنِ a در تناقض است.) باید a^n مضربی از a^{-1} و در نتیجه مضربی از a باشد که همان چیزی است که در پی آن بودیم. حالتِ دوم یعنی $a^n\times a^{-1}=a^{n-1}\neq\vec{0}$ رخ نمی‌دهد. چرا که از آن نتیجه می‌شود a^{n-1} و a^{-1} بر هم عمودند، در حالی که این دو از فرض استقرا و آنچه که در بالا ثابت شد، مضارب ناصفری از بردارِ a هستند. پس برای یک عنصر دلخواهِ $a\in G-\{e\}$ اثبات کردیم که a^{-1} و a^n ها برای هر $n\in\mathbb{N}$ هم‌راستای a هستند. با اعمالِ این مطلب به a^{-1} این گزاره‌ی کلی‌تر حاصل می‌شود که برای هر $n\in\mathbb{Z}$، $a^n\in\mathbb{R}^3$ مضربی از $a\in\mathbb{R}^3$ است. در جمع‌بندی آنچه که تا اینجا حاصل گردید:

(*) $e=\vec{0}$ و برای هر $a\in G-\{e\}$، عناصر زیرگروه دوری تولید شده توسطِ a به زیرفضایی از $\mathbb{R}^3$ که a تولید می‌کند تعلق دارند و به علاوه a^{-1} مضرب ناصفری است از a.

در ادامه ادعا می‌کنیم که:

(**) اگر $a\in G$ و $b\in G$ مضربی از بردارِ a نباشد، آنگاه $a\perp b$.

برای دیدن دلیل توجه کنید که باید نشان دهیم که اگر برای $a,b\in G$، $a\times b\neq\vec{0}$، آنگاه $a\perp b$. ضرب خارجیِ این دو بردار صفر نیست و لذا باید $a*b=a\times b$. ضرب خارجیِ این بردار و a^{-1} صفر نیست، چرا که با توجه به (*) صفر شدن این ضرب خارجی به معنای آن خواهد بود که ضرب خارجیِ b و $a\times b$ و a صفر است که امکان‌پذیر نیست چراکه این دو بردارِ غیر صفر بر هم عمودند. پس باید:

$$b=a^{-1}*(a*b)=a^{-1}\times(a\times b)$$

که صفر بودن ضرب داخلیِ b و a^{-1} و از آنجا b و a را بدست خواهد داد. در نهایت با استفاده از (*) و (**)، حکم مطلوب مبنی بر صفر بودن ضرب خارجیِ هر دو عنصر از G را اثبات خواهیم کرد. فرض کنید اینگونه نباشد و $a\in G-\{e=\vec{0}\}$ را دلخواه بگیرید. از فرض خلف G مشمول در زیرفضای $Span\{a\}$ از $\mathbb{R}^3$ نیست و لذا $b\in G$ موجود است به قسمی که ضرب خارجیِ عناصرِ a و b از G صفر نیست یا معادلاً بردارهایی ناصفر و غیر هم‌راستا هستند. پس از ویژگی مفروض برای G در صورتِ مسأله، باید $a*b=a\times b$ و به علاوه بنابر (**) a و b بر هم عمودند. پس سه بردار ناصفرِ a، b و $a\times b=a*b$ از $\mathbb{R}^3$ دوبدو متعامدند و لذا ضرب هردوتایی از آنها در G با ضرب خارجی‌شان در $\mathbb{R}^3$ یکسان است. بنابراین پایه‌ای برای $\mathbb{R}^3$ معین می‌کنند و علی‌الخصوص هیچ بردار غیر صفری نمی‌تواند بر هر تمامی آنها عمود باشد. این در حالی است که با توجه به (**)، $a^2*b=a*(a*b)$ باید بر a و $a*b$ عمود باشد و با به کاربردن مجددِ (**)، اگر $a^2\neq\vec{0}$ بر b هم عمود خواهد شد (با استفاده از (*)، $a^2\neq\vec{0}$ نشان می‌دهد که a^2 مضرب ناصفری از a است و لذا همانندِ بردار اخیر، ضرب خارجیِ a^2 در b هم ناصفر است.) پس چون همان‌گونه که گفتیم هیچ بردار ناصفری از $\mathbb{R}^3$ نمی‌تواند بر هر سه بردارِ b و $a*b=a\times b$ عمود باشد، یا باید $a^2=\vec{0}$ یا آنکه

$$a^2*b=a*(a*b)=a\times(a\times b)=\vec{0}$$

تساویِ اخیر به دلیل آنکه بردارهای ناصفرِ a و $a\times b$ متعامد بودند رخ نمی‌دهد و لذا $a^2=\vec{0}=e$. $a\in G-\{e\}$ دلخواه بود و در نتیجه هر عنصر غیرهمانی از گروهِ G از مرتبه‌ی دو است. به وضوح چنین گروهی آبلی است. در حالی که G نمی‌تواند آبلی باشد، زیرا برای همان a,b مورد بحث در بالا: $a*b=a\times b=-b\times a=-b*a\neq\vec{0}$. تناقض حاصله حکم مطلوب را نتیجه می‌دهد.

پاسخ ۵. سه زیرمجموعه‌ای از $E=End(V)$ که در صورت مسأله ذکر شده‌اند ($\{0\}$، $End(V)$ و زیرمجموعه‌ی شامل اندومورفیسم‌هایی که رتبه‌شان متناهی است.) به وضوح ایده‌آل‌های دوطرفه‌ای از حلقه‌ی $E=End(V)$اند. حال بالعکس باید نشان دهیم که هر ایده‌آل سره و ناصفرِ I از این حلقه باید یکی از این سه باشد. بدین منظور کافی است دو مورد اثبات شوند: اگر اندومورفیسمِ $f:V\to V$ ناصفر باشد، آنگاه هر اندومورفیسمی از V با رتبه‌ی متناهی در ایده‌آل دوطرفه‌ای از E که f تولید می‌کند واقع است. به علاوه اگر رتبه‌ی f نامتناهی باشد آنگاه ایده‌آل دوطرفه‌ی تولید شده توسط آن بر E منطبق است. مورد اول نشان می‌دهد که I ایده‌آل متشکل از اندومورفیسم‌های با رتبه‌ی متناهی را شامل می‌شود و مورد دوم نشان می‌دهد که I مشمول است در آن و بنابراین اثبات این دو حل را تکمیل خواهد کرد. ابتدا به مورد اول می‌پردازیم: فرض کنید بردارِ $w=f(v)$ در بردِ f ناصفر باشد. فرض کنید $\tilde{f}:V\to V$ با رتبه‌ی متناهی باشد و عناصرِ $w_1=\tilde{f}(v_1),\ldots,w_n=\tilde{f}(v_n)$ پایه‌ای برای زیرفضای $Im(\tilde{f})$ از V. با اضافه کردن پایه‌ای برای $Ker(\tilde{f})$ به

$\{v_1, \dots , v_n\}$، پایه‌ای برای V بدست می‌آید که آن را β می‌نامیم. حال برای هر $1 \le i \le n$ یک اندومورفیسم یکتای $g_i : V \to V$ موجود است که عنصرِ v_i از پایه‌ی β را به v و سایر عناصر را به صفر می‌برد و همچنین چون بردارهای w و w_i ناصفرند، می‌توان یک اندومورفیسم $h_i : V \to V$ از V را برگزید با این ویژگی که $h_i(w) = w_i$. حال اندومورفیسمِ

$$h_1 \circ f \circ g_1 + \dots h_n \circ f \circ g_n$$

که به ایده‌آل دوطرفه‌ای از $End(V)$ که f تولید می‌کند تعلق دارد، با $\tilde{f}$ برابر است، چرا که بر $Ker\tilde{(f)}$ صفر است (هریک از g_iها چنین ویژگی را داشت.) و هر v_i را به

$$h_i\big(f(g_i(v_i))\big) = h_i(f(v)) = h_i(w) = w_i$$

می‌برد و لذا چگونگی عملِ $h_1 \circ f \circ g_1 + \dots h_n \circ f \circ g_n$ و $\tilde{f}$ بر عناصر پایه‌ی β از V یکسان است که تساوی آنها را بدست می‌دهد. پس $\tilde{f}$ عضو ایده‌آل دوطرفه‌ی تولید شده توسط f است. در ادامه به دومین گزاره می‌پردازیم: باید نشان دهیم که اگر رتبه‌ی اندومورفیسمِ $f : V \to V$ نامتناهی باشد، آنگاه ایده‌آل دوطرفه‌ی تولیدشده با آن کل $End(V)$ است یا معادلاً اندومورفیسم همانی 1_V را دربردارد. فرض کنید بردارهای

$$f(a_i) = b_i (i \in \mathbb{N})$$

واقع در بردِ f مستقل خطی باشند. پس زیرمجموعه‌ی $\{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ از V مستقل خطی است و قابل گسترش به یک پایه‌ی β' از V. از طرف دیگر طبق فرض مسأله پایه‌ای مانند $\beta'' = \{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ برای V موجود است. اندومورفیسم یکتای $f' : V \to V$ موجود است که هر عنصرِ e_i از β'' را به a_i تصویر می‌کند. f'' را اندومورفیسمی از V بگیرید که در پایه‌ی β' تحت آن $b_i \mapsto e_i$ برای هر i و سایر عناصر پایه‌ی مذکور به صفر می‌روند. حال $f'' \circ f \circ f' : V \to V$ متعلق به ایده‌آل دوطرفه‌ای از $End(V)$ که f تولید می‌کند، همانی است چرا هر e_i را ثابت نگاه می‌دارد:

$$f''\big(f(f'(e_i))\big) = f''(f(a_i)) = f''(b_i) = e_i$$

پاسخ ۶. فرض کنید F میدانی باشد با این ویژگی که گروه ضربیِ $(F^{\times}, \times)$ متناهی مولد یا به عبارت دقیق‌تر یک گروه آبلیِ متناهی مولد است. زیرمیدان اول[2] F برابر با اشتراک تمامی زیرمیدان‌های F تعریف می‌شود و می‌دانیم که یکریخت است با $\mathbb{Q}$ اگر مشخصه‌ی F صفر باشد و یکریخت است با میدان p عضویِ $\mathbb{Z}_p$ اگر مشخصه‌ی F عدد اولِ p باشد. حالت نخست رخ نمی‌دهد چرا که زیرگروه‌های هر گروه آبلیِ متناهی مولد، خود متناهی مولد هستند، در حالی که گروه ضربیِ اعداد گویا $(\mathbb{Q} - \{0\}, \times)$ چنین نیست: اگر اعداد گویای ناصفرِ $\frac{a_1}{b_1}, \dots , \frac{a_n}{b_n}$ مفروض باشند و q را عدد اولی آنقدر بزرگ بگیریم که درتجزیه‌ی هیچ‌یک از اعداد صحیح و ناصفرِ $a_1, b_1, \dots , a_n, b_n$ ظاهر نمی‌گردد، آنگاه q در زیرگروهی از $(\mathbb{Q}-\{0\}, \times)$ که اعداد گویای فوق تولید می‌کنند واقع نخواهد بود. پس مشخصه‌ی F عددی اول همچون p است و می‌توان زیرمیدانِ اول آن $\{n.1_F \mid n \in \mathbb{Z}\}$ را با $\mathbb{Z}_p$ یکی گرفت. حال توجه کنید که «قضیه‌ی ساختاری گروه‌های آبلیِ متناهی مولد» بیان می‌دارد که هر گروهی از این دست، یکریخت است با جمع مستقیمِ تعدادی متناهی گروه دوری. پس اگر مرتبه‌ی تمامی عناصر آن متناهی باشد، خود متناهی خواهد بود. بنابراین کافی است وجودِ یک عنصر ناصفرِ θ از F را که مرتبه‌اش در $(F^{\times}, \times)$ نامتناهی است به تناقض بکشانیم و این حل را تکمیل خواهد کرد. چنین عنصری از F بر $\mathbb{Z}_p$ (که از طریق یکی گرفتنِ آن با زیرمیدان اول، زیرمیدانی از F در نظر گرفته شد.) جبری نخواهد بود. چرا که در غیر این صورت، $\mathbb{Z}_p[\theta]$ یک توسیع میدانی متناهی از $\mathbb{Z}_p$ و لذا یک میدان متناهی خواهد بود. اگر درجه‌ی این توسیع را k بگیریم، این میدان متناهی p^kعضوی خواهد بود و از آنچه که درباره‌ی میدان‌های متناهی می‌دانیم، باید $1_F = \theta^{p^k-1}$ که با روش انتخابِ θ در تناقض است. پس این عنصر بر زیرمیدانِ $\mathbb{Z}_p$ از F جبری نیست، امری که نشان می‌دهد کوچکترین زیرمیدانی از F که θ را دربرمی‌گیرد یا به عبارت دیگر $\mathbb{Z}_p(\theta)$، از طریق همریختیِ معین شده با $x \mapsto \theta$ یکریخت است با میدانِ توابع گویا با ضرایبِ در $\mathbb{Z}_p$ یا به عبارت دیگر $\mathbb{Z}_p(x)$. پس F زیرمیدانی یکریخت با $\mathbb{Z}_p(x)$ را شامل می‌شود و لذا با تکرار استدلالی که پیشتر هم به کار رفت، گروه ضربیِ این میدان نیز باید همانندِ گروه ضربیِ F متناهی مولد باشد، در حالی که اینگونه نیست. چرا که می‌توان همان استدلالی که متناهی مولد نبودنِ $(\mathbb{Q} - \{0\}, \times)$ را نتیجه داد تکرار کنیم: با داشتنِ عناصرِ $\frac{p_1(x)}{q_1(x)}, \dots , \frac{p_n(x)}{q_n(x)}$ از $\mathbb{Z}_p(x) - \{0\}$ که در آن چندجمله‌ای‌های $p_1(x), q_1(x), \dots , p_n(x), q_n(x)$ از $\mathbb{Z}_p[x]$ ناصفرند، چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیری متعلق به $\mathbb{Z}_p[x]$ که هیچ‌یک از هیچ‌یک از چندجمله‌ای‌های فوق را نشمارد (توجه کنید که چنین چندجمله‌ای موجود است: $\mathbb{Z}_p[x]$ یک $U.F.D$ است و دارای نامتناهی عنصر تحویل‌ناپذیر.) در زیرگروهی از $(\mathbb{Z}_p(x)^{\times}, \times)$ که عناصرِ $\frac{p_1(x)}{q_1(x)}, \dots , \frac{p_n(x)}{q_n(x)}$ تولید می‌کنند واقع نخواهد بود.

پاسخ ۷. هر تابع پیوسته و یک به یک یکنواست. بنابراین کافی است نشان دهیم f یک به یک است. برهان خلف: اعداد حقیقیِ $a < b$ موجودند که $f(a) = f(b)$. حال توجه کنید که اگر $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ و $f(c_1) = f(c_2)$، آنگاه با قرار دادنِ $c = |c_1 - c_2|$ خواهیم داشت:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(x + c)$$

این از آنجا ناشی می‌شود که با به کار بردن ویژگیِ مفروض برای f در صورتِ مسأله، برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$f(x + c_1) = F(f(x), f(c_1)) = F(f(x), f(c_2)) = f(x + c_2)$$

از طرف دیگر نشان می‌دهیم برای هر $n \in \mathbb{N}$، عدد حقیقیِ α موجود است به قسمی که: $f(\alpha + \frac{b-a}{n}) = f(\alpha)$ و سپس به کمک حکم قبلی نتیجه

[2]subfield prime

خواهد شد که هر $0 < \frac{b-a}{n}$ دوره‌ی تناوبی از f است. عدد طبیعیِ n را تثبیت کنید و تابع پیوسته‌ی

$$\begin{cases} g:[a,b-\frac{b-a}{n}]\to\mathbb{R}\\ g(x)=f(x+\frac{b-a}{n})-f(x)\end{cases}$$

را در نظر بگیرید. چون $f(a)=f(b)$: $\sum_{k=0}^{n-1} g(a+k\frac{b-a}{n})=0$، پس g در نقطه‌ای صفر می‌شود (زیرا در غیر این صورت بنابر قضیه‌ی مقدار میانی g یا همواره مثبت خواهد بود یا همواره منفی که با تساوی فوق در تناقض است.)، حکمی که با توجه به ضابطه‌ی تعریف g نتیجه می‌دهد f در دو نقطه به فاصله‌ی $\frac{b-a}{n}$ از هم مقادیری یکسان می‌پذیرد که همان چیزی است که در پی آن بودیم. بنابراین تابع پیوسته‌ی $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دوره‌های تناوبی به دلخواه کوچک دارد که عبارتند از اعدادِ $\frac{b-a}{n}$. اثبات خواهیم کرد که چنین تابع پیوسته‌ای باید ثابت باشد با این روش که برای $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ و $\epsilon>0$ دلخواه نشان می‌دهیم: $|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$. از آنجا که تحدیدِ f به $[0,b-a]$ پیوسته‌ی یکنواخت است، $\delta>0$ را می‌توان برگزید با این ویژگی که برای هر $x,y\in[0,b-a]$ با $|x-y|<\delta$ داشته باشیم: $|f(x)-f(y)|<\epsilon$. $n\in\mathbb{N}$ را آنقدر بزرگ بگیرید که $\frac{b-a}{n}<\delta$. چون $\frac{b-a}{n}$ یک دوره‌ی تناوبِ f بود:

$$f(x_1)=f\big(x_1-\frac{b-a}{n}\lfloor\frac{x_1}{\frac{b-a}{n}}\rfloor\big)=f\big(\frac{b-a}{n}\{\frac{x_1}{\frac{b-a}{n}}\}\big)$$

و

$$f(x_2)=f\big(x_2-\frac{b-a}{n}\lfloor\frac{x_2}{\frac{b-a}{n}}\rfloor\big)=f\big(\frac{b-a}{n}\{\frac{x_2}{\frac{b-a}{n}}\}\big)$$

که در آن $\{\}$ نمادِ جز اعشاری است. ولی $\frac{b-a}{n}\{\frac{x_1}{\frac{b-a}{n}}\}$ و $\frac{b-a}{n}\{\frac{x_2}{\frac{b-a}{n}}\}$ در $[0,\frac{b-a}{n})$ واقعند و لذا فاصله‌شان از هم کمتر از δ است و در نتیجه قدرمطلق تفاضل مقادیرِ f در این دو نقطه – که با توجه به تساوی‌های فوق همان $|f(x_1)-f(x_2)|$ است – از ϵ تجاوز نمی‌کند یا به عبارت دیگر: $|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$. پس تابعِ f باید ثابت باشد که با مفروضات مسأله در تناقض است.

پاسخ ۸. ادعا می‌کنیم که اگر عدد طبیعیِ n و $0<a\le 1$ چنان باشند که $f_n(a)=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$، آنگاه $0<c\le 1$ موجود است به قسمی که $f_{n-1}(c)=\frac{c^n}{n!}$. با فرض درست بودن این حکم، k بار استفاده از آن مسأله را حل خواهد کرد: چون $f_k(1)=\frac{1}{(k+1)!}$ برای عدد طبیعیِ k، در حالت $n=k+1$ نقطه‌ی $a=1$ تساویِ $f_n(a)=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$ را برآورده می‌کند و بنابراین در حالتِ $n=0$ باید $c\in(0,1]$ای موجود باشد با $f_n(c)=\frac{c^{n+1}}{(n+1)!}$ که همان تساویِ $f_0(c)=c$ است و حکم مطلوب مبنی بر نقطه‌ی ثابت داشتنِ $f_0:[0,1]\to[0,1]$ را بدست می‌دهد. . پس به حکمی که در ابتدای حل بیان شد می‌پردازیم: تابعِ مشتق‌پذیرِ $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$g(x)=f_n(x)-\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=\int_0^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t-\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

در $x=0$ و $x=a\in(0,1]$ صفر می‌شود و در نتیجه از قضیه‌ی رول باید $g'(x)=f_{n-1}(x)-\frac{x^n}{n!}$ در یک نقطه‌ی $c\in(0,a)$ صفر گردد که به معنای برقراریِ $f_{n-1}(c)=\frac{c^n}{n!}$ به ازای یک $c\in(0,1]$ است.

پاسخ ۹. قسمت الف) وجودِ f با خواص مذکور معادل است با این گزاره که برای هر $x\ge1$ تابعِ

$$\begin{cases} g_x:[0,\infty)\to[0,\infty)\\ g_x(a)=e^a-\frac{a}{x}-x\end{cases}$$

ریشه‌ای یکتا دارد. برای دیدن دلیل درستی این گزاره توجه کنید که g_x اکیداً صعودی است:

$$\forall a>0: g'_x(a)=e^a-\frac{1}{x}>1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}\ge0$$

و به علاوه چون $g_x(0)=1-x\le0$ و $\lim_{a\to\infty}g_x(a)=\infty$ بنابر قضیه‌ی مقدار میانی باید ریشه داشته باشد، ریشه‌ای که به دلیل اکیداً صعودی بودنِ g_x یکتاست. حال اگر برای هر $x\ge1$، $f(x)$ را ریشه‌ی یکتای $g_x:[0,\infty)\to[0,\infty)$ بنامیم، به تابعی همچون $f:[1,\infty)\to[0,\infty)$ خواهیم رسید که در $g_x(f(x))=0$ صدق می‌کند، تساوی‌ای که با توجه به ضابطه‌ی g_x به معنای $e^{f(x)}=\frac{f(x)}{x}+x$ است. این حل قسمت (الف) را تکمیل می‌کند. قبل از پرداختن به قسمت بعدی حل نکته‌ای را بیان می‌کنیم که در ادامه سودمند خواهد بود: با توجه به اینکه دیدیم تابعِ $g_x:[0,\infty)\to[0,\infty)$ اکیداً صعودی است و همچنین $f(x)$ ریشه‌ی یکتای آن است:

$$\forall x\ge1,t\ge0: t\ge f(x)\Leftrightarrow g_x(t)\ge0$$

قسمت ب) ابتدا توجه کنید که با کار بردن نکته‌ای که در بالا بیان شد: $f(x)\ge\ln x$ برای هر $x\ge1$، زیرا:

$$g_x(\ln x)=e^{\ln x}-\frac{\ln x}{x}-x=-\frac{\ln x}{x}\le0$$

پس به منظور رسیدن به حدِ $\lim_{x\to\infty}x(f(x)-\ln x)=0$ کافی است نشان داد که با تثبیت هر $\epsilon>0$، $f(x)\le\ln x+\frac{\epsilon}{x}$ به ازای xهای به اندازه‌ی کافی بزرگ. دوباره با به کار بردن نکته‌ی فوق، تنها کافی است نشان دهیم که از جایی به بعد:

$$g_x(\ln x+\frac{\epsilon}{x})=xe^{\frac{\epsilon}{x}}-\frac{1}{x}(\ln x+\frac{\epsilon}{x})-x\ge0$$

این برقرار است چرا که با توجه به $\lim_{x\to\infty}x(e^{\frac{\epsilon}{x}}-1)=\epsilon$ و $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}(\ln x+\frac{\epsilon}{x})=0$، حد سمت چپ نامساوی فوق وقتی $x\to\infty$ برابر است با $\epsilon>0$. در نهایت به اثبات همگراییِ دنباله‌ی $\{\sum_{k=1}^n f(k)-\ln n!\}_{n=1}^\infty$ می‌پردازیم. ابتدا توجه کنید که با نوشتنِ $\ln n!$ به صورت $\sum_{k=1}^n\ln n$ مسأله تبدیل می‌شود به اثبات همگراییِ سریِ $\sum_{n=1}^\infty(f(n)-\ln n)$، سری‌ای که با توجه به آنچه که در بالا بیان شد جملاتش نامنفی‌اند. بنابراین می‌توانیم به منظور اثبات همگرایی آن از آزمون

مقایسه استفاده کنیم. هرگاه n به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد. برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$e^{f(n)} = \frac{f(n)}{n} + n \Rightarrow f(n) - \ln n = \ln(۱ + \frac{f(n)}{n^۲})$$

و می‌دانیم که $\ln(۱+x) \le x$ برای هر $x \ge ۰$ (برای دیدن دلیل آن تابع $h(x) = x - \ln(x+۱)$ را در نظر بگیرید که بر بازه‌ی $[۰,\infty)$ مشتق آن $h'(x) = \frac{x}{x+۱}$ نامنفی است. لذا h بر این بازه صعودی است و بنابراین چون $h(۰) = ۰$، بر این بازه نامنفی نیز خواهد بود.) و در نتیجه:

$$f(n) - \ln n = \ln(۱ + \frac{f(n)}{n^۲}) \le \frac{f(n)}{n^۲}$$

با توجه به حدِ $\lim_{n\to\infty} n(f(n) - \ln n) = ۰$ که قبلاً ثابت شد، اگر n به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد $f(n) \le \frac{۱}{n} + \ln n$ و ترکیب آن با نامساوی قبلی نشان می‌دهد که از جایی به بعد

$$f(n) \le \frac{\ln n}{n^۲} + \frac{۱}{n^۳}$$

حال با توجه به همگرایی سریِ $\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{\ln n}{n^۲} + \frac{۱}{n^۳})$، آزمون مقایسه همگراییِ $\sum_{n=۱}^{\infty}(f(n) - \ln n)$ را بدست خواهد داد و حل تکمیل است.

پاسخ ۱۰. توجه کنید که $\sum_{n=۰}^{۱۳۸۹} x^n = \frac{x^{۱۳۹۰}-۱}{x-۱}$ و با مشتق‌گیری از این تساوی:

$$\sum_{n=۱}^{۱۳۸۹} n x^{n-۱} = \frac{۱۳۸۹x^{۱۳۹۰} - ۱۳۹۰x^{۱۳۸۹} + ۱}{(x-۱)^۲}$$

پس در همسایگی مناسبی حول مبدأ که در آن $|۱۳۸۹x^{۱۳۹۰} - ۱۳۹۰x^{۱۳۸۹}| < ۱$، می‌توان نوشت:

$$f(x) = \frac{(x-۱)^۲}{۱ + (۱۳۸۹x^{۱۳۹۰} - ۱۳۹۰x^{۱۳۸۹})}$$
$$= (۱ - ۲x + x^۲)\big(\sum_{n=۰}^{\infty}(۱۳۸۹x^{۱۳۹۰} - ۱۳۹۰x^{۱۳۸۹})^n\big)$$

با ساده کردن حاصلضربِ فوق به یک سری توانی حولِ $x = ۰$ می‌رسیم که تابعِ f را در همسایگی‌ای از مبدأ توصیف می‌کند. پس $f(x)$ در همسایگی‌ای از مبدأ تحلیلی است و سری توانیِ مذکور در واقع بسط تیلورِ آن در $x = ۰$ است. لذا ضریبِ $x^{۱۳۹۰}$ در این سری توانی باید برابر باشد با $\frac{f^{(۱۳۹۰)}(۰)}{۱۳۹۰!}$. به منظور یافتنِ این ضریب توجه کنید که به ازای یک سری توانی مناسبِ $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$، می‌توان حاصلضربِ فوق را اینگونه نوشت:

$$(۱ - ۲x + x^۲)\big(\sum_{n=۰}^{\infty}(۱۳۸۹x^{۱۳۹۰} - ۱۳۹۰x^{۱۳۸۹})^n\big)$$
$$= ۱ - ۲x + x^۲ + (۱ - ۲x + x^۲)(۱۳۸۹x^{۱۳۹۰} - ۱۳۹۰x^{۱۳۸۹})$$
$$+ x^{۲۷۷۸}(۱ - ۲x + x^۲)(\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n)$$

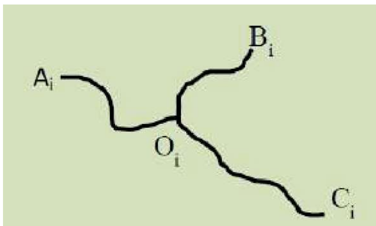
پس $\frac{f^{(۱۳۹۰)}(۰)}{۱۳۹۰!}$ همان ضریبِ $x^{۱۳۹۰}$ در

$$(۱ - ۲x + x^۲)(۱۳۸۹x^{۱۳۹۰} - ۱۳۹۰x^{۱۳۸۹})$$

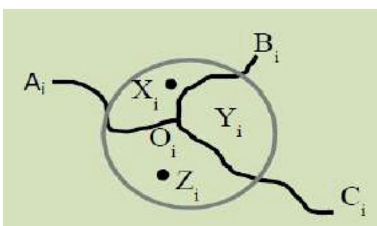
است. لذا:

$$f^{(۱۳۹۰)}(۰) = ۱۳۹۰!(۲ \times ۱۳۹۰ + ۱۳۸۹) = ۴۱۶۹(۱۳۹۰!)$$

پاسخ ۱۱. فرض کنید بتوان این‌کار را کرد و $\{T_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناشمارا از زیرمجموعه‌های دوبدو مجزایی از صفحه باشد که هریک همیومورفند با شکلِ T. مشابه شکل، هر T_i از سه شاخه‌ی مجزا تشکیل شده که در نقطه‌ای همچون O_i به هم متصلند. نقاط انتهایی این شاخه‌ها را A_i، B_i و



C_i نامگذاری کنید [3]. برای هر $i \in I$، ω_i را دایره‌ای فرض کنید که مختصاتِ مرکز آن و همچنین طول شعاعِ آن اعدادی گویا باشند و O_i نیز درون این دایره باشد ولی A_i، B_i و C_i در آن واقع نشوند. در این صورت شاخه‌های T_i درون دایره را به سه قسمت مجزا تقسیم می‌کنند. X_i، Y_i و Z_i را نقاطی با مختصات گویا در این سه قسمت بگیرید. از آنجا که تعداد دوایرِ



با مرکز و شعاع گویا و نیز تعداد سه‌تایی‌های (X,Y,Z) از نقاط گویای صفحه (نقاطی که هردو مختصه‌شان گویا باشد.) شماراست، پس با توجه به ناشمارا بودن خانواده‌ی $\{T_i\}_{i\in I}$، حداقل دو تا از T_iها مثلاً T_i و T_j موجودند با این ویژگی که: $\omega_i = \omega_j$، $X_i = X_j$، $Y_i = Y_j$ و $Z_i = Z_j$. اما به راحتی می‌توان دید که در این صورت T_i و T_j یکدیگر را قطع می‌کنند.

پاسخ ۱۲. کافی است نشان دهیم که برای عناصر دلخواهِ $x \in E$ و $y \in E^{\perp}$: $\langle Ty, x\rangle = ۰$. فرض کنید اینگونه نباشد و $|\langle Ty, x\rangle| > ۰$. پس $y \neq ۰$. حال قرار می‌دهیم $z = x + \alpha\mu\overline{\langle Ty, x\rangle}y$ که در آن $\alpha > ۰$ یک عدد حقیقی دلخواه است. چون $x \in E$، $Tx = \mu x$ و بنابراین:

$$Tz = \mu x + \alpha\mu\overline{\langle Ty, x\rangle}Ty$$

[3] توجه کنید که همه‌ی این موارد خوش‌تعریف هستند و مستقل از شکل! هر T_i یا در واقع هر فضای همیومورف با شکلِ T یا به عبارت دقیق‌تر همیومورف با زیرفضای $\{۱\} \times [-۱,۱] \cup [۰,۱] \times \{۰\}$ از $\mathbb{R}^۲$، دارای نقطه‌ی یکتایی است که مکملش دارای سه مؤلفه‌ی همبندی است که هریک همیومورفند با $[۰,۱)$. در T_i نقطه‌ی یکتای حائز این ویژگی را O_i و این مؤلفه‌های همبندی را شاخه‌های T_i نامیده‌ایم. انتهای هر شاخه هم با توجه به آنکه هریک از آنها به عنوان زیرفضایی از T_i همیومورف است با $[۰,۱)$ معنی دارد: نقطه‌ی یکتایی که با حذفش از مؤلفه‌ی همبندی مذکور، فضای حاصل هم همبند خواهد بود.

از طرف دیگر به دلیل $y \in E^{\perp}$، $\langle y, x\rangle = 0$ و لذا داریم:

$$\begin{aligned}\langle Tz, z\rangle &= \langle \mu x + \alpha\mu\overline{\langle Ty,x\rangle} Ty, x + \alpha\mu\overline{\langle Ty,y\rangle} y\rangle \\ &= \mu \parallel x \parallel^2 + \langle \alpha\mu\overline{\langle Ty,x\rangle} Ty, x\rangle \\ &+ \langle \alpha\mu\overline{\langle Ty,x\rangle} Ty, \alpha\mu\overline{\langle Ty,x\rangle} y\rangle \\ &= \mu \parallel x \parallel^2 + \alpha\mu\overline{\langle Ty,x\rangle}\langle Ty,x\rangle + \left|\alpha\mu\overline{\langle Ty,x\rangle}\right|^2\langle Ty,y\rangle \\ &= \mu \parallel x \parallel^2 + \alpha\mu\left|\langle Ty,x\rangle\right|^2 + \alpha^2\left|\langle Ty,x\rangle\right|^2\langle Ty,y\rangle\end{aligned}$$

از طرف دیگر با استفاده‌ی مجدد از $\langle y, x\rangle = 0$:

$$\begin{aligned}\parallel z \parallel^2 &= \parallel x + \alpha\mu\overline{\langle Ty,x\rangle} y \parallel^2 = \parallel x \parallel^2 + \left|\alpha\mu\langle Ty,x\rangle\right|^2 . \parallel y \parallel^2 \\ &= \parallel x \parallel^2 + \alpha^2\left|\langle Ty,x\rangle\right|^2 . \parallel y \parallel^2\end{aligned}$$

حال چون بنابر فرض $\left|\langle Tz, z\rangle\right| \le \parallel z \parallel^2$، از روابط بالا نتیجه می‌شود که برای هر $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned}&\left|\left(\mu \parallel x \parallel^2 + \alpha\mu\left|\langle Ty,x\rangle\right|^2 + \alpha^2\left|\langle Ty,x\rangle\right|^2\langle Ty,y\rangle\right)\right| \\ &\le \parallel x \parallel^2 + \alpha^2\left|\langle Ty,x\rangle\right|^2 . \parallel y \parallel^2\end{aligned}$$

ولی چون $|\mu| = 1$ و $\alpha > 0$، بنابر نامساوی مثلثی:

$$\begin{aligned}&\left|\left(\mu \parallel x \parallel^2 + \alpha\mu\left|\langle Ty,x\rangle\right|^2 + \alpha^2\left|\langle Ty,x\rangle\right|^2\langle Ty,y\rangle\right)\right| \\ &\ge \left|\mu \parallel x \parallel^2 + \alpha\mu\left|\langle Ty,x\rangle\right|^2\right| - \alpha^2\left|\langle Ty,x\rangle\right|^2 . \left|\langle Ty,y\rangle\right| \\ &= \parallel x \parallel^2 + \alpha\left|\langle Ty,x\rangle\right|^2 - \alpha^2\left|\langle Ty,x\rangle\right|^2 . \left|\langle Ty,y\rangle\right|\end{aligned}$$

پس ثابت کردیم که برای هر $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned}&\parallel x \parallel^2 + \alpha\left|\langle Ty,x\rangle\right|^2 - \alpha^2\left|\langle Ty,x\rangle\right|^2 . \left|\langle Ty,y\rangle\right| \\ &\le \parallel x \parallel^2 + \alpha^2\left|\langle Ty,x\rangle\right|^2 . \parallel y \parallel^2 \Rightarrow \\ &\alpha\left|\langle Ty,x\rangle\right|^2 \le \alpha^2\left|\langle Ty,x\rangle\right|^2\left(\parallel y \parallel^2 + \left|\langle Ty,y\rangle\right|\right)\end{aligned}$$

با توجه به اینکه طبق فرض خلف $\left|\langle Ty,x\rangle\right| \neq 0$ و α مثبت بود، با حذف $\alpha\left|\langle Ty,x\rangle\right|$ از طرفین نامساوی فوق نتیجه می‌شود که:

$$\forall \alpha > 0 : \alpha\left(\parallel y \parallel^2 + \left|\langle Ty,y\rangle\right|\right) \ge 1$$

که غیرممکن است. پس به تناقض می‌رسیم و باید $T(E^{\perp}) \subseteq E^{\perp}$.

پاسخ ۱۳. ابتدا توجه کنید که بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که f و g در هیچ نقطه‌ای از U صفر نمی‌شوند. چرا که در غیر این صورت حکم به سادگی حاصل می‌شود: اگر مقدار ثابت $|f| + |g|$ را c بنامیم، برای هر $z \in U$: $|f(z)| + |g(z)| = c$ و بنابراین $|f(z)|, |g(z)| \le c$ و اگر در $z_0 \in U$ای مثلاً g صفر شود، باید به ناچار $|f(z_0)| = c$ یا به عبارت دیگر در نامساوی

$$\forall z \in U : |f(z)| \le c$$

به ازای $z = z_0$ تساوی داریم. ولی با توجه به اصل ماکسیمم مطلق برای توابع هولومورف و همچنین همبند بودن U، این به معنای ثابت بودن $f : U \to \mathbb{C}$ است. این ثابت بودن g را هم نشان می‌دهد: به دلیل ثابت بودن $|f| + |g|$، $|g|$ نیز باید ثابت باشد که تنها در صورت ثابت بودن تابع هولومورف $g : U \to \mathbb{C}$ امکان‌پذیر است (این دوباره نتیجه‌ای است از اصل ماکسیمم). پس در ادامه توجه خود را به حالتی معطوف می‌کنیم که هیچ‌یک از f یا g در نقطه‌ای از دامنه‌ی تعریف صفر نشوند. در این صورت توابع دو متغیره و حقیقی‌مقدار $|f|$ و $|g|$ بر باز U از $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ هموار یا به عبارت دیگر C^{∞} خواهند بود، زیرا از ترکیب توابع هموار $f, g : U \to \mathbb{C} - \{0\}$ (توجه کنید که توابع هولومورف بی‌نهایت بار مشتق‌پذیرند.) و تابع نرم $\begin{cases}\mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{R}^+ \\ z \mapsto |z|\end{cases}$ بدست می‌آیند. بنابراین می‌توان عملگر $\frac{\partial}{\partial \bar z}$ [4] را بر آنها اثر داد:

$$\begin{cases} |f|^2 = f\bar f \Rightarrow 2|f|\dfrac{\partial|f|}{\partial\bar z} = \dfrac{\partial|f|^2}{\partial\bar z} = \dfrac{\partial f}{\partial\bar z}\bar f + f\dfrac{\partial\bar f}{\partial\bar z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial\bar z} = 0, \overline{\dfrac{\partial f}{\partial z}} = \bar f' \Rightarrow \dfrac{\partial|f|}{\partial\bar z} = \dfrac{f\bar f'}{2|f|} \\ |g|^2 = g\bar g \Rightarrow 2|g|\dfrac{\partial|g|}{\partial\bar z} = \dfrac{\partial|g|^2}{\partial\bar z} = \dfrac{\partial g}{\partial\bar z}\bar g + g\dfrac{\partial\bar g}{\partial\bar z} \\ \dfrac{\partial g}{\partial\bar z} = 0, \overline{\dfrac{\partial g}{\partial z}} = \bar{g'} \Rightarrow \dfrac{\partial|g|}{\partial\bar z} = \dfrac{g\bar{g'}}{2|g|} \end{cases}$$

که در آن از اینکه $|f|$ و $|g|$ در هیچ نقطه‌ای صفر نمی‌شوند استفاده شد. از طرف دیگر به دلیل ثابت بودن $|g| + |f|$، باید $\frac{\partial|g|}{\partial\bar z} + \frac{\partial|f|}{\partial\bar z} = 0$ و لذا از محاسبات فوق باید:

$$\forall z \in U : \frac{f(z)\bar f'(z)}{2|f(z)|} = -\frac{g(z)\bar{g'}(z)}{2|g(z)|}$$

با محاسبه‌ی نرم طرفین تساوی فوق می‌بینیم که $|g'(z)| = |f'(z)|$ برای هر $z \in U$. پس توابع تحلیلی f' و g' بر باز U تنها در حد ضرب در عددی مختلط با نرم یک تفاوت دارند: $\theta \in \mathbb{R}$ای موجود است که برای آن $f' = e^{i\theta}g'$ در سرتاسر U. برای دیدن دلیل کافی است به تابع هولومورف $\frac{f'}{g'}$ توجه کرد که بر دیسک بازی حول هر نقطه‌ای که g' در آن ناصفر باشد نُرمش یک است و لذا همان‌گونه که قبلاً هم بیان شد بر چنین همسایگی‌ای باید ثابت باشد. در نقاطی هم که g' صفر شود، f' نیز به دلیل تساوی نرم‌های این دو تابع نُرمش صفر و درنتیجه صفر خواهد بود. پس موضعاً f' از ضرب عددی ثابت با نرم یک در g' حاصل می‌شود و حال همبندی U وجود تساوی‌ای همچون $f' = e^{i\theta}g'$ را بدست می‌دهد. از $f' = e^{i\theta}g'$، ثابت بودن $f - e^{i\theta}g$ بدست می‌آید: $a \in \mathbb{C}$ موجود است چنان که

$$\forall z \in U : f(z) - e^{i\theta}g(z) = a$$

[4] یادآوری: عملگرهای $\frac{\partial}{\partial z}$ و $\frac{\partial}{\partial \bar z}$ بر توابع مشتق‌پذیر و مختلط‌مقدار به دامنه‌ی بازی از $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ اینگونه عمل می‌کنند:

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial x} - i\frac{\partial h}{\partial y}\right) \quad \frac{\partial h}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial x} + i\frac{\partial h}{\partial y}\right)$$

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که با تجزیه‌ی تابع مشتق‌پذیر h به اجزای حقیقی و موهومی‌اش به صورت $h = u + iv$، $\frac{\partial h}{\partial \bar z} = 0$ به معنای برقراری روابط کوشی–ریمان

$$u_x = v_y \quad u_y = -v_x$$

است. پس اگر فرض کنیم که h تابعی دومتغیره، مختلط مقدار و C^1 بر بازی از $\mathbb{R}^2$ است، اینکه با در نظر گرفتن آن به عنوان تابعی بر بازی از $\mathbb{C}$ هولومورف باشد معادل است با $\frac{\partial h}{\partial \bar z} = 0$ و در صورت هولومورف بودن h، h' همان $\frac{\partial h}{\partial z}$ خواهد بود.

از طرف دیگر تابعِ $|f|+|g|$ بر U تابعی ثابت بود. پس اگر فرض کنیم تابع ثابت با مقدارِ c باشد، این به همراه بالایی نشان می‌دهد:

$$\forall z\in U: |f(z)|+|ae^{i\theta}-f(z)|=c$$

پس برد تابع هولومورفِ $f:U\to\mathbb{C}$ مشمول است در یک بیضی، در حالی که اگر در نقطه‌ای مشتقِ f ناصفر باشد، بنابر قضیه‌ی تابع وارون باید بردِ آن بازی از $\mathbb{C}$ را دربرداشته باشد. پس باید $f'=0$ در تمامی نقاطِ U، که با به کار بردن همبندیِ U ثابت بودنِ $f:U\to\mathbb{C}$ از آن حاصل می‌گردد. اینکه ثابت بودنِ f حکم مشابه برایِ g را نتیجه می‌دهد هم قبلاً ثابت شد.

پاسخ ۱۴. پاسخ مثبت است. باز همبندِ $\mathbb{C}-\{0,1\}$ از صفحه‌ی مختلط را در نظر بگیرید. می‌دانیم پوشش جهانیِ[5] هولومورفِ آن از میان سه انتخابی که «قضیه‌ی نگاشت ریمان»[6] مجاز می‌دارد - یعنی کره‌ی ریمان، صفحه‌ی مختلط و دیسک باز واحد - (در حد یکریختی) دیسک باز واحد است. پس یک نگاشت هولومورفِ $g:D\to\mathbb{C}-\{0,1\}$ موجود است که به پوششی نیز هست. به دلیل پوششی بودن پوشاست و به علاوه موضعاً یک وارون هولومورف دارد و بنابراین مشتق آن در هیچ نقطه‌ای از D صفر نیست. حال اگر آن را با یک نگاشت هولومورف و پوشای $h:\mathbb{C}-\{0,1\}\to\mathbb{C}$ که مشتقش در هیچ نقطه‌ای صفر نشود ترکیب کنیم، حاصل یک نگاشت هولومورف و پوشایِ $h\circ g:D\to\mathbb{C}$ خواهد بود که بنابر قاعده‌ی زنجیره‌ای مشتقش همه‌جا ناصفر است. $h(z)=\frac{2z^3}{3}-z^2$ مثالی از چنین hای است و لذا $f:=\frac{2g^3}{3}-g^2:D\to\mathbb{C}$ حائز تمامیِ خواص مطلوب در صورت مسأله است.

پاسخ ۱۵. یک رابطه‌ی هم‌ارزیِ $\sim$ روی X تعریف می‌کنیم به این صورت که:

$x\sim y \Leftrightarrow$ x و y را نتوان از هم جدا کرد.

به سادگی دیده می‌شود که این یک رابطه‌ی هم‌ارزی است:

- x را نمی‌توان از x جدا کرد، پس $x\sim x$.
- اگر x را بتوان به کمک بازهای U و V با خواص بیان شده در صورت مسأله از y جدا کرد، آنگاه می‌توان با همان U و V، y را هم از x جدا نمود. پس $y\nsim x$ نتیجه می‌دهد $x\nsim y$ که به معنای تقارنی بودنِ این رابطه است
- این رابطه ترایایی است. چرا که اگر چنین نباشد، به ازای نقاطی همچون x، y و z خواهیم داشت: $y\sim x$ و $z\sim y$ در حالی که $z\nsim x$ یا معادلاً می‌توان x و z را از هم جدا کرد. پس بازهای U و V از X حول به ترتیب x و z موجودند به قسمی که $U\cap V=\emptyset$ و $X=U\cup V$. حال اگر y در U باشد، این دو باز آن را از z جدا می‌کنند که با $z\sim y$ تناقض دارد و اگر در V باشد این بازها آن را از x جدا می‌کنند که به دلیلِ $y\sim x$ امکان‌پذیر نیست.

در ادامه نشان می‌دهیم کلاس‌های هم‌ارزیِ رابطه‌ی $\sim$ همان مؤلفه‌های همبندیِ X هستند. امری که اثباتش قسمت اولِ مسأله را حل خواهد کرد: امکان‌پذیر نبودن جدا کردنِ x و y از هم به معنای $y\sim x$ است و در این صورت این دو نقطه باید در یک کلاسِ هم‌ارزی باشند که خود (با صحیح پنداشتنِ حکم فوق) زیرمجموعه‌ای همبند از X (در واقع یک مؤلفه‌ی همبندی آن) است. پس به اثبات حکم فوق می‌پردازیم. ابتدا توجه کنید که به وضوح اعضای هر مؤلفه‌ی همبندی در یک کلاس هم‌ارزی از $\sim$ واقعند. چرا که اگر $x\nsim y$ یا به عبارت دیگر بتوان x و y را به وسیله‌ی بازهای U و V با خواصی مشابه قبل از هم جدا کرد، این دو نقطه نمی‌توانند تواماً در هیچ زیرمجموعه‌ی همبندِ D از X واقع شوند. چرا که با توجه به اینکه زیرمجموعه‌ی همبندِ D به صورتِ $(D\cap U)\cup(D\cap V)$ به عنوان اجتماع بازهای مجزایش قابل بیان است، باید یک از زیرمجموعه‌های ظاهر شده در سمت راست برابر D شود که نشان می‌دهد $D\subseteq U$ یا $D\subseteq V$. حال بالعکس نشان می‌دهیم که هر کلاس هم‌ارزی مشمول است در یک مؤلفه‌ی همبندی از X یا به بیان دیگر خود همبند است. بدین منظور یک کلاس هم‌ارزیِ C از $\sim$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $C=X_1\cup X_2$ که در آن X_1 و X_2 در C هم بازند و هم بسته. باید نشان دهیم که یکی از آنها تهی است تا همبندیِ C حاصل گردد. ابتدا توجه کنید که

$$C=\bigcap_{F \text{ شاملِ } C \text{ و در } X \text{ هم باز است و هم بسته}} F$$

این از آنجا ناشی می‌شود که نقاط اشتراک ظاهر شده در سمت راست را نمی‌توان از نقاط C جدا کرد. زیرا اگر بازهای U و V از X حول به ترتیب $x\in C$ و عنصرِ y از اشتراک ظاهر شده در بالا موجود باشند به گونه‌ای که $X=U\cup V$ و $U\cap V=\emptyset$، آنگاه چون نمی‌توان اعضای C را از هم جدا کرد باید C به تمامی مشمول باشد در یکی از U و V. از طرف دیگر $x\in U\cap C\neq\emptyset$ و لذا به ناچار باید $C\subseteq U$. پس زیرمجموعه‌ی هم باز و هم بسته‌ی U شامل C است و بنابراین باید اشتراک مذکور و به تبع آن y را هم دربرداشته باشد که با $y\in V=X-U$ تناقض دارد. از این تساوی، C اشتراک تعدادی زیرمجموعه‌ی بسته ولذا خود بسته خواهد بود و بنابراین X_1 و X_2 که زیرمجموعه‌هایی مجزا و بسته از C بودند، X هم بسته خواهند بود. از طرف دیگر X یک فضای متریک فشرده است. لذا X_1 و X_2 هم فشرده‌اند و فاصله‌ی مثبتی از هم دارند: $\epsilon=dist(X_1,X_2)>0$ پس می‌توان بازهای مجزای W_1 و W_2 از X حول به ترتیب X_1 و X_2 را یافت [7]: کافی است اجتماع گوی‌های بازِ به شعاع $\frac{\epsilon}{3}$ حول نقاطِ این دو

[5] covering universal
[6] Theorem Mapping Riemann

[7] توجه کنید که در واقع تنها چیزی که اینجا نیاز داریم، نرمال بودنِ فضای X است و

زیرمجموعه را در نظر گرفت:

$$W_1 = \cup_{x\in X_1} B_{\frac{\epsilon}{3}}(x) \quad W_2 = \cup_{x\in X_2} B_{\frac{\epsilon}{3}}(x)$$

این دو زیرمجموعه بازند و چون $\epsilon > 0$ برابر با $dist(X_1, X_2)$ انتخاب شده بود مجزا. قرار دهید $W = W_1 \cup W_2$ و $Z = X - W$. پس W باز و Z بسته خواهند بود و Z با توجه به فشرده بودنِ X فشرده. W که برابر با $W_1 \cup W_2$ بود، چون $X_1 \subseteq W_1$ و $X_2 \subseteq W_2$، $C = X_1 \cup X_2$ را شامل می‌شود. پس برای مکملِ آن Z:

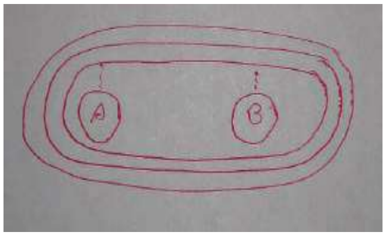
$$Z \subseteq X - C = \cup_{F \text{ شاملِ } C \text{ و در } X \text{ هم باز است و هم بسته}} (X - F)$$

ولی در بالا هر $X - F$ بازی از X است و در نتیجه با توجه به فشرده بودنِ زیرفضای C از X، تعداد متناهی زیرمجموعه‌ی هم باز و هم بسته‌ی $F_1, \ldots, F_n$ از X موجودند که همگی شامل C اند و همچنین $Z \subseteq \cup_{i=1}^{n}(X - F_i)$. لذا:

$$C \subseteq \cap_{i=1}^{n} F_i \subseteq X - Z = W = W_1 \cup W_2$$

قرار دهید $A := \cap_{i=1}^{n} F_i$. این زیرمجموعه در X هم باز است و هم بسته و C را نیز شامل می‌شود (چرا که تمامیِ F_iها این خواص را داشتند.) و به علاوه از بالا $A \cap W_1$، $A \cap W_2$ و $X - A$ فضای X را می‌پوشانند. توجه کنید که این زیرمجموعه‌های دوبدو مجزا، همگی بازند. چرا که در X، W_1 و W_2 باز بودند و A تواماً باز و بسته. حال فضای X را با سه زیرمجموعه‌ی بازِ دوبدو مجزا پوشانده‌ایم و بنابراین نقاطی که در دو تای مختلف از این بازها باشند را می‌توان به کمک همین بازها از هم جدا کرد. پس C که هیچ‌یک از دو نقطه‌اش از هم جدا نمی‌شدند، به تمامی مشمول است در یکی از این سه زیرمجموعه، علی‌الخصوص حداقل یکی از $A \cap W_1$ و $A \cap W_2$ را قطع نمی‌کند، بنابر تقارن دومی را. امری که با توجه به $C \subseteq A$ نشان می‌دهد $C \cap W_2 = \emptyset$. اما W_2 شاملِ $X_2 \subseteq C$ بود و لذا $X_2 = \emptyset$ که نشان می‌دهد C همبند است. [8]

اگر فضای متریکِ X فشرده نباشد حکم درست نیست. به عنوان مثال زیرفضایی از $\mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید متشکل از دو گوی بسته و مجزای A و B و شمارا تا بیضی دوبدو مجزا حول این دو گوی که به آنها نزدیک می‌شوند بی‌آنکه بینشان تقاطعی رخ دهد. مطابق شکل:



A و B مؤلفه‌های همبندی جدا از هم‌اند در حالی که نمی‌توان اعضای آنها را از یکدیگر جدا کرد.

پاسخ ۱۶. نرم در فضای هیلبرتِ H را به صورتِ $|.|$ نشان می‌دهیم و M را کران بالایی برای $\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ می‌گیریم. چون $C \subseteq C_0$، به وضوح داریم: $\bar{C} \subseteq \bar{C_0}$ و برای اثبات آنکه در واقع تساوی رخ می‌دهد، یک عنصرِ $x = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ از C را در نظر می‌گیریم که در آن t_nها اعدادی نامنفی هستند که $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$ را برآورده می‌کنند [9] و سپس نشان می‌دهیم که می‌توان با دنباله‌ای از عناصرِ C_0 به آن میل کرد. قرار دهید: $y_m := \sum_{n=1}^{m} t_n x_n + (\sum_{n=m+1}^{\infty} t_n) x_{m+1}$. با توجه به تعریفِ C_0 به دلیلِ $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$ و $t_n \geq 0$، هر y_m به C_0 تعلق دارد و حال ادعا می‌کنیم حد دنباله‌ی $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ برابر است با x، که حکم مطلوب را بدست خواهد داد. برای هر $m \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\begin{aligned} |x - y_m| &= |\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n - (\sum_{n=1}^{m} t_n x_n + (\sum_{n=m+1}^{\infty} t_n) x_{m+1})| \\ &= |\sum_{n=m+1}^{\infty} t_n x_n - \sum_{n=m+1}^{\infty} t_n x_{m+1}| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} t_n |x_n - x_{m+1}| \\ &\leq 2M(\sum_{n=m+1}^{\infty} t_n) \end{aligned}$$

وقتی $m \to \infty$، به دلیل همگراییِ $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$ باید $\sum_{n=m+1}^{\infty} t_n \to 0$ که با توجه به نامساویِ فوق، $\lim_{m\to\infty} y_m = x$ را اثبات می‌کند.

درباره‌ی قسمت دوم توجه کنید که $C_0 \subseteq C$ حتی برای فضاهای هیلبرتِ یک‌بعدی هم درست نیست! فرض کنید H همان فضای هیلبرتِ $\mathbb{R}$ باشد و قرار دهید $x_n = \frac{1}{n}$ برای هر $n \in \mathbb{N}$. دنباله‌ی $\{x_n = \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ از اعضای C_0 به صفر همگراست، نقطه‌ای که در

$$C = \{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{n} \mid t_n \geq 0, \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1\}$$

واقع نیست.

پاسخ ۱۷. بازه‌ای را که همه‌ی نقاطش همرنگ باشند یک بازه‌ی «تک رنگ» می‌نامیم. به منظور حل مسأله کافی است نشان داد برای هردو عدد حقیقی دلخواهِ $a < b$، بازه‌ی $I = (a, b)$ شامل زیربازه‌ای تک رنگ و باز است. برهان خلف: فرض کنید I هیچ زیربازه‌ی تک رنگ و بازی را دربرنداشته باشد. به دو گزاره‌ی کمکی نیاز خواهیم داشت:

بنابراین با تبدیلِ فضای متریک فشرده به فضای توپولوژیک فشرده و هاسدورف، با توجه به نرمال بودنِ فضاهایی از این دست، این راه‌حل در آن حالت هم معتبر خواهد بود.

[8] لازم به ذکر است که اگر فضای X موضعاً همبند باشد، می‌توان حکم مسأله را بسیار راحت‌تر ثابت کرد. چرا با این شرط مؤلفه‌های همبندی X باز خواهند بود و حال اگر $x, y \in X$ در یک مؤلفه‌ی همبندی نباشند، مؤلفه‌ی همبندی x و اجتماعِ سایر مؤلفه‌های همبندی، دو بازی خواهند بود که این دو نقطه را از هم جدا می‌کنند.

[9] توجه کنید که سریِ $\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ در فضای هیلبرت H همگراست و به عبارت دیگر x خوشتعریف است. چرا که مجموعه‌های جزئیِ این دنباله کُوشی هستند. امری که با توجه به نامساوی زیر، از همگراییِ $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$ نتیجه می‌گردد.

$$|\sum_{n=m}^{\infty} t_n x_n| \leq \sum_{n=m}^{\infty} t_n |x_n| \leq M(\sum_{n=m}^{\infty} t_n)$$

(*) با فرض $x \in I$ دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعضای I وجود دارد با این خواص که برای هر n: $a_n > x$، $\lim_{n\to\infty} a_n = x$، $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$ و رنگ هریک از a_nها با رنگ x متفاوت است.

به منظور اثبات (*) بنابر تقارن فرض کنید x قرمز باشد و برای هر $n \in \mathbb{N}$ زیربازه‌ی باز و ناتهی $I \cap (x, x+\frac{1}{2n})$ از I را در نظر بگیرید که بنابر فرض خلف نمی‌تواند تک رنگ باشد و لذا حداقل یک نقطه‌ای آبی مثلاً نقطه‌ی a_n در آن واقع است. این نقاط یک دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ تعریف می‌کنند که به x همگراست، رنگ تمامی جملاتش آبی و در نتیجه متفاوت با رنگ x است و همچنین همه‌ی جملات از x بیشترند و تنها اثبات $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$ باقی می‌ماند. برای آن هم توجه کنید که از ویژگی مفروض در صورت مسأله برای f: $\min\{f(a_n), f(x)\} \leq |x - a_n|$ برای هر n. $f(x) > 0$ و $\lim_{n\to\infty} a_n = x$، پس از جایی به بعد $|x - a_n| < f(x)$ و با قرار دادن آن در نامساوی فوق می‌بینیم که برای nهای به اندازه‌ی کافی بزرگ:

$$0 < f(a_n) = \min\{f(a_n), f(x)\} \leq |x - a_n|$$

و در نتیجه با توجه به $\lim_{n\to\infty} |x - a_n| = 0$ به $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$ می‌رسیم. بنابراین $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ همه‌ی خواص مطلوب در (*) را دارد.

(**) به ازای هر $x \in I$ $y \in I$ای موجود است که برای آن $f(y) \leq \frac{f(x)}{2}$، $[y - \frac{f(y)}{2}, y + \frac{f(y)}{2}] \subset [x - \frac{f(x)}{2}, x + \frac{f(x)}{2}]$ و رنگ x و y یکی نیست.

برای اثبات این حکم، دوباره بنابر تقارن فرض کنید x قرمز باشد و دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعضای I را که (*) بدست می‌دهد در نظر بگیرید: هر a_n آبی و از x بیشتر است و به علاوه $a_n \to x$ و $f(a_n) \to 0$ وقتی $n \to \infty$. با توجه به این موارد و $f(x) > 0$، می‌توان m را آنقدر بزرگ گرفت تا $f(a_m) \leq \frac{f(x)}{2}$ و $|a_m - x| \leq \frac{f(x)}{4}$ برقرار شوند. حال قرار می‌دهیم $y = a_m$ و نشان می‌دهیم که موارد مطلوب در (**) را برآورده می‌کند. از موارد فوق $f(y) = f(a_m) \leq \frac{f(x)}{2}$ و $y \in I$ برخلاف x که قرمز بود آبی است. تنها $[y - \frac{f(y)}{2}, y + \frac{f(y)}{2}] \subset [x - \frac{f(x)}{2}, x + \frac{f(x)}{2}]$ باقی می‌ماند که آن هم برقرار است. زیرا با توجه به $y = a_m$، از بالا: $y > x$، $0 < f(y) \leq \frac{f(x)}{2}$ و $|y - x| \leq \frac{f(x)}{4}$. در نتیجه:

$$(y - \frac{f(y)}{2}) - (x - \frac{f(x)}{2}) > y - x > 0$$

و

$$(x + \frac{f(x)}{2}) - (y + \frac{f(y)}{2}) = \frac{f(x) - f(y)}{2} - (y - x) \geq \frac{f(x)}{4} - (y - x) \geq 0$$

پس (**) هم ثابت شد. حال به کمک این موارد مسأله را حل می‌کنیم: یک نقطه‌ی دلخواه $x_1 \in I$ در نظر بگیرید و بنابر تقارن فرض کنید قرمز باشد. قرار می‌دهیم $I_1 = [x_1 - \frac{f(x_1)}{2}, x_1 + \frac{f(x_1)}{2}]$. از (**) $x_2 \in I$ با رنگ آبی وجود دارد که $f(x_2) \leq \frac{f(x_1)}{2}$ و به علاوه اگر $[x_2 - \frac{f(x_2)}{2}, x_2 + \frac{f(x_2)}{2}]$ را I_2 بنامیم $I_2 \subset I_1$. دوباره بنابر (**) $x_3 \in I$ با رنگ قرمز موجود است که برای آن $f(x_3) \leq \frac{f(x_2)}{2}$ با قرار دادن $I_3 = [x_3 - \frac{f(x_3)}{2}, x_3 + \frac{f(x_3)}{2}]$ داریم $I_3 \subset I_2$. مجدداً از (**) یک $x_4 \in I$ با رنگ آبی موجود است که $f(x_4) \leq \frac{f(x_3)}{2}$ و . . . پس با تکرار این روند، دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعضای I و بازه‌های بسته‌ی $I_n = [x_n - \frac{f(x_n)}{2}, x_n + \frac{f(x_n)}{2}]$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ حاصل می‌شوند با این ویژگی که x_n به ازای nهای فرد قرمز و به ازای nهای زوج آبی است و همچنین برای هر n: $f(x_{n+1}) \leq \frac{f(x_n)}{2}$ و $I_{n+1} \subset I_n$. از این موارد:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 < f(x_n) \leq \frac{f(x_1)}{2^{n-1}}$$

و بنابراین $f(x_n) = diam(I_n)$ وقتی $n \to \infty$ به صفر میل می‌کند. اما $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ دنباله‌ای تودرتو از بازه‌های بسته است و بنابراین طبق قضیه‌ی اشتراک کانتور $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ از تنها یک عضو تشکیل شده که آن را c می‌نامیم. حال به تناقض می‌رسیم: $c \in \mathbb{R}$ نه می‌تواند آبی باشد و نه قرمز! زیرا اگر قرمز باشد، باید برای هر عدد طبیعی k:

$$c \in I_{2k} = [x_{2k} - \frac{f(x_{2k})}{2}, x_{2k} + \frac{f(x_{2k})}{2}]$$

و از آنجا $|c - x_{2k}| \leq \frac{f(x_{2k})}{2}$. از طرف دیگر چون رنگ c و x_{2k} متفاوت است (به ترتیب قرمز و آبی‌اند.)، از فرض مسأله $\min\{f(c), f(x_{2k})\} \leq |c - x_{2k}|$ و با ترکیب این با نامساوی قبلی خواهیم داشت $\min\{f(c), f(x_{2k})\} < f(x_{2k})$ که نتیجه می‌دهد $0 < f(c) < f(x_{2k})$ برای هر k که با توجه به $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ که پیشتر بدست آمد، امکان‌پذیر نیست. وقتی هم که عضو یکتای $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$ آبی باشد هم به روشی کاملاً مشابه به تناقض می‌رسیم: برای هر $k \in \mathbb{N}$ رابطه‌ی

$$c \in I_{2k-1} = [x_{2k-1} - \frac{f(x_{2k-1})}{2}, x_{2k-1} + \frac{f(x_{2k-1})}{2}]$$

نشان می‌دهد $|c - x_{2k-1}| \leq \frac{f(x_{2k-1})}{2}$ و از طرف دیگر چون رنگ c و x_{2k-1} یکسان نیست (به ترتیب آبی و قرمزند.)، داریم: $\min\{f(c), f(x_{2k-1})\} \leq |c - x_{2k-1}|$ که به همراه قبلی نشان می‌دهد $\min\{f(c), f(x_{2k-1})\} < f(x_{2k-1})$ و لذا $0 < f(c) < f(x_{2k-1})$ برای هر k که دوباره چون $f(x_{2k-1}) \to 0$ وقتی $k \to \infty$، تناقض است. پس فرض خلف باطل است و حکم مطلوب اثبات می‌شود.

پاسخ ۱۸. حکم در حالت $n = 1$ واضح است و در حالت کلی از برهان خلف استفاده می‌کنیم: فرض کنید $n \geq 2$ و A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های حقیقی، متقارن و از رتبه‌ی $n-1$ باشد با این ویژگی که برای هر $1 \leq k \leq n$ زیرماتریس $(n-1) \times (n-1)$ی A_k جاصل از حذف سطر و ستون kام

A وارون‌پذیر نیست. پس برای هر $1 \le k \le n$ بردارِ

$$v^{(k)} = \begin{bmatrix} v_1^{(k)} \\ \vdots \\ v_{n-1}^{(k)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1} - \{0\}$$

را می‌توان یافت با این ویژگی که $A_k v^{(k)} = 0$. حال از روی $v^{(k)} \in \mathbb{R}^{n-1}$، بردار $w^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ را اینگونه می‌سازیم:

$$w^{(k)} = \begin{bmatrix} v_1^{(k)} \\ \vdots \\ v_{k-1}^{(k)} \\ 0 \\ v_k^{(k)} \\ \vdots \\ v_{n-1}^{(k)} \end{bmatrix}$$

که بدیهی است به دلیل ناصفر بودنِ $v^{(k)}$ آن هم ناصفر خواهد بود: $w^{(k)} \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. حال توجه کنید که چون با حذف سطر و ستونِ kام از A به A_k و با حذف درایه‌ی kامِ $w^{(k)}$ که صفر است به بردارِ $v^{(k)}$ می‌رسیم، باید درایه‌های اول تا $k-1$ام از $Aw^{(k)}$ با درایه‌های متناظر از $A_k v^{(k)}$ یکی باشند و درایه‌های $k+1$ تا n از $Aw^{(k)}$ با درایه‌های به ترتیب k تا $n-1$ از $A_k v^{(k)}$. پس به دلیلِ $A_k v^{(k)} = 0$ تمامی درایه‌های $Aw^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ به جز احتمالاً درایه‌ی kام صفرند. یعنی هر $Aw^{(k)}$ یا صفر است یا مضرب ناصفری از e_k، بردارِ nتایی‌ای که درایه‌ی kامِ آن یک است و سایر درایه‌هایش صفر. ($\{e_1, \ldots, e_n\}$ را پایه‌ی استاندارد برای $\mathbb{R}^n$ گرفته‌ایم.) و بنابراین هرگاه ماتریس A به عنوان یک نگاشت خطیِ $\begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto Ax \end{cases}$ در نظر گرفته‌شود، از آنچه که تا اینجا اثبات کرده‌ایم، برای هر $1 \le k \le n$ یا $w^{(k)} \in Ker(A)$ یا $e_k \in Im(A)$. فرض کنید به ازای عناصرِ $k_1 < \cdots < k_s$ از $\{1, \ldots, n\}$ حالت اول رخ دهد و به ازای سایر اعضای این مجموعه حالت دوم. لذا

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} - \{k_1, \ldots, k_s\} : e_k \in Im(A)$$

و به علاوه بردارهای ناصفرِ $w^{(k_1)}, \ldots, w^{(k_s)}$ از $\mathbb{R}^n$ در $Ker(A)$ واقعند. چون رتبه‌ی ماتریسِ $n \times n$ی A $n-1$ بود، زیرفضای $Ker(A)$ از $\mathbb{R}^n$ یک‌بعدی است و بنابراین هردو بردار ناصفر در آن مضرب یکدیگرند. پس چون بنابر روش ساختن بردارهای ناصفرِ $w^{(1)}, \ldots, w^{(n)}$، مؤلفه‌ی kامِ $w^{(k)}$ صفر بود، $w^{(k_1)}, \ldots, w^{(k_s)} \in Ker(A)$ با توجه به آنچه که در بالا بیان شد نتیجه می‌دهد که مؤلفه‌های $k_1, \ldots, k_s$ در هر بردار متعلق به زیرفضای $Ker(A)$ از $\mathbb{R}^n$ صفرند. ولی چون ماتریسِ A متقارن بود، نگاشت خطیِ $\begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto Ax \end{cases}$ در ضرب داخلیِ متداول بر $\mathbb{R}^n$ خودالحاق است و در نتیجه: $Im(A) = Ker(A)^{\perp}$. این در حالی است که از مورد قبلی $e_{k_1}, \ldots, e_{k_s}$ به مکمل متعامدِ $Ker(A)$ در $\mathbb{R}^n$ تعلق دارند. بنابراین بردارهای $e_{k_1}, \ldots, e_{k_s}$ نیز در کنار e_kهایی که $k \notin \{k_1, \ldots, k_s\}$ در $Im(A)$ واقعند، امری که نشان می‌دهد زیرفضای $Im(A)$ بر کلِ $\mathbb{R}^n$ منطبق است و این با $rank(A) = n-1$ تناقض دارد.

پاسخ ۱۹. برای هر $0 \le i, j \le n+1$ داریم: $|v_i - v_j| \in \mathbb{Q}$. اگر قرار دهیم $j = 0$، چون $v_0 = 0$ نتیجه می‌شود که برای هر $1 \le i \le n+1$: $|v_i| \in \mathbb{Q}$. حال اگر $1 \le i, j \le n+1$ باید طبق فرض $|v_i - v_j| \in \mathbb{Q}$ و خواهیم داشت:

$$|v_i - v_j| \in \mathbb{Q} \Rightarrow |v_i - v_j|^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow |v_i|^2 + |v_j|^2 - 2v_i.v_j \in \mathbb{Q}$$

ولی گفتیم که $|v_i|, |v_j| \in \mathbb{Q}$ و لذا $v_i.v_j \in \mathbb{Q}$ (منظور از $v_i.v_j$ ضرب‌داخلیِ این دو بردار در $\mathbb{R}^n$ است). پس برای هر $1 \le i, j \le n+1$، $v_i.v_j$ عددی گویاست. حال A را ماتریسِ $n \times (n+1)$ای بگیرید که ستون iامِ آن بردارِ v_i است:

$$A = [v_1|v_2|\cdots|v_{n+1}]$$

A^tA ماتریسی $(n+1) \times (n+1)$ است که درایه‌ی ijامِ آن با ضرب داخلیِ $v_i.v_j$ داده می‌شود. لذا از آنچه که در بالا گفتیم، درایه‌های A^tA گویا هستند. ولی توجه کنید که $rank(A^tA) \le rank(A)$ و چون A n تا سطر دارد: $rank(A) \le n$. پس برای ماتریسِ A^tA که $(n+1) \times (n+1)$ بود: $rank(A^tA) \le n$، نامساوی‌ای که معادل است با $\det(A^tA) = 0$ که آن هم به معنای وجود یک بردارِ $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ است که تساویِ $A^tAx = 0$ را برآورده می‌کند. ولی درایه‌های A^tA گویا بودند و بنابراین گزاره‌ای استاندارد از جبرخطی بیان می‌کند که می‌توان بردار ناصفرِ x در بالا را با درایه‌های گویا انتخاب کرد: بردارِ

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix}$$

موجود است با این ویژگی که در آن x_iها همگی گویا هستند و حداقل یکی از آنها ناصفر و همچنین $A^tAx = 0$. تساوی اخیر تنها در صورتی می‌تواند رخ دهد که $Ax = 0$، چرا که:

$$A^tAx = 0 \Rightarrow |Ax|^2 = (Ax)^t(Ax) = x^tA^tAx = 0 \Rightarrow Ax = 0$$

از این می‌توان به سادگی حکم مطلوب را نتیجه گرفت:

$$Ax = 0 \Rightarrow [v_1|v_2|\cdots|v_{n+1}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_{n+1}v_{n+1} = 0$$

تساوی اخیر با توجه به آنکه اعداد گویایِ $x_1, \ldots, x_{n+1}$ همگی صفر نبودند، وابستگی خطیِ $v_1, \ldots, v_{n+1}$ بر میدان اعداد گویا را بدست می‌دهد.

پاسخ ۲۰. هردوی ماتریس‌های A و B را $n \times n$ بگیرید و فرض کنید $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ چنان باشند که $AB - BA = c_1A + c_2B$. فرض کنید A و B برخلاف حکم مطلوب مسأله هیچ بردار ویژه‌ی مشترک غیرصفری نداشته باشند. عملگرهای خطیِ $T_1 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ و $T_2 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ را با ضابطه‌های به ترتیب $T_1(v) = Av$ و $T_2(v) = Bv$ تعریف می‌کنیم. چون میدانِ $\mathbb{C}$ بسته‌ی جبری است، A حداقل یک مقدار ویژه دارد که آن را λ_1 می‌نامیم و B نیز حداقل یک مقدار ویژه دارد که آن را λ_2 می‌نامیم و $v_1 \neq 0$ و $v_2 \neq 0$ را بردارویژه‌هایی متناظر به ترتیب λ_1 و λ_2 می‌گیریم. پس $T_1(v_1) = Av_1 = \lambda_1 v_1$ و $T_2(v_2) = Bv_2 = \lambda_2 v_2$. اکنون داریم:

$$\begin{aligned}
&(AB - BA)v_1 = (c_1A + c_2B)v_1 \\
&\Rightarrow A(Bv_1) = B(Av_1) + c_1(Av_1) + c_2(Bv_1) \\
&\Rightarrow A(Bv_1) = (\lambda_1 + c_2)Bv_1 + \lambda_1 c_1 v_1 \\
&\Rightarrow T_1(Bv_1) = (\lambda_1 + c_2)Bv_1 + \lambda_1 c_1 v_1 (*)
\end{aligned}$$

تساوی اخیر به همراهِ $T_1(v_1) = \lambda_1 v_1$ نتیجه می‌دهند که زیرفضای $W_1 := Span\{v_1, Bv_1\}$ از $\mathbb{C}^n$ تحتِ T_1 ناورداست. توجه کنید که این زیرفضا دوبعدی است. چرا که $v_1 \neq 0$ و Bv_1 مضربی از بردارِ v_1 نیست، زیرا اگر باشد v_1 علاوه بر A بردار ویژه‌ی B هم خواهد بود که طبق فرض خلف امکان‌پذیر نیست. لذا $\dim W_1 = 2$ و $\beta_1 := \{v_1, Bv_1\}$ پایه‌ی مرتبی برای این زیرفضای T_1-ناورداست. تحدیدِ T_1 به زیرفضای ناوردای W_1 را عملگرِ $U_1 : W_1 \to W_1$ بگیرید. نمایش ماتریسیِ این عملگر در پایه‌ی مرتبِ β_1 با توجه به $T_1(v_1) = \lambda_1 v_1$ و $(*)$ اینگونه خواهد بود:

$$[U_1]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 c_1 \\ 0 & \lambda_1 + c_2 \end{bmatrix}$$

پس چندجمله‌ای ویژه‌ی عملگرِ U_1 برابر است با $(x - \lambda_1)(x - \lambda_1 - c_2)$ که چون U_1 از تحدیدِ T_1 به زیرفضای T_1-ناوردای W_1 حاصل شده بود، باید چندجمله‌ای ویژه‌ی T_1 را بشمارد. بنابراین $\lambda_1 + c_2$ نیز ریشه‌ای از چندجمله‌ای ویژه‌ی T_1 و در نتیجه مقدار ویژه‌ای از A است. ولی مقدار ویژه‌ی λ_1 از A که کار را با آن آغاز کرده بودیم دلخواه بود. پس با استفاده‌ی مکرر از استدلال فوق، همه‌ی جملات دنباله‌ی $\{\lambda_1 + kc_2\}_{k=0}^{\infty}$ باید مقادیر ویژه‌ی ماتریسِ A باشند. اما تعداد مقادیر ویژه‌ی A متناهی است و از آنجا $c_2 = 0$. در ادامه آنچه که در بالا برای v_1 انجام شد را برای بردار ویژه‌ی v_2 از B تکرار می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&(AB - BA)v_2 = (c_1A + c_2B)v_2 = c_1Av_2 \\
&\Rightarrow B(Av_2) = A(Bv_2) - c_1Av_2 = (\lambda_2 - c_1)Av_2 \\
&\Rightarrow T_2(Av_2) = (\lambda_2 - c_1)Av_2 (**)
\end{aligned}$$

این تساوی به همراهِ $T_2(v_2) = \lambda_2 v_2$ ثابت می‌کنند که زیرفضای $W_2 = Span\{v_2, Av_2\}$ تحتِ T_2 ناورداست. با همان استدلالی که برای W_1 هم به کار رفت، به دلیلِ عدم وجود بردار ویژه‌ی مشترک برای A و B، W_2 دو بعدی است و $\beta_2 = \{v_2, Av_2\}$ پایه‌ای مرتب برای آن. با فرضِ $U_2 := T_2|_{W_2}$، بنابر $(**)$ و $T_2(v_2) = \lambda_2 v_2$ ماتریس نمایشِ $U_2 : W_2 \to W_2$ در پایه‌ی مرتبِ β_2 برابر خواهد بود با:

$$[U_2]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - c_1 \end{bmatrix}$$

مجدداً چون U_2 از تحدیدِ T_2 به زیرفضای T_2-ناوردای W_2 حاصل شده، باید چندجمله‌ای ویژه‌ی ماتریس فوق یعنی $(x-\lambda_2)(x-\lambda_2+c_1)$ مقسوم‌علیه‌ای از چندجمله‌ای ویژه‌ی T_2 باشد و بنابراین مانندِ λ_2، $\lambda_2 - c_1$ نیز مقدار ویژه‌ای از عملگرِ T_2 یا معادلاً از ماتریسِ B است. دوباره مشابه قبل با توجه به اینکه مقدار ویژه‌ی λ_2 از B که کار را با آن شروع کرده بودیم دلخواه بود، تکرار این استدلال نشان می‌دهد که تمامی جملات دنباله‌ی $\{\lambda_2 - kc_1\}_{k=0}^{\infty}$ مقادیر ویژه‌ی Bاند که تنها در صورت برقراریِ $c_1 = 0$ می‌تواند رخ دهد. پس تا اینجا $c_1 = c_2 = 0$ که به معنای جابجا شدنِ A و B است. ولی $AB = BA$ نشان می‌دهد که هر فضای ویژه از ماتریسِ A یا معادلاً از عملگرِ T_1، تحت B یا معادلاً عملگرِ T_2 ناورداست. علی‌الخصوص اگر W_3 را فضای ویژه‌ی متناظر مقدار ویژه‌ی λ_1 از T_1 بگیریم:

$$W_3 = \{v \in \mathbb{C}^n \mid T_1(v) = \lambda_1 v_1\}$$

آنگاه تحدیدِ T_2 به آن عملگری مانندِ $U_3 : W_3 \to W_3$ بدست می‌دهد. U_3 عملگری است بر فضای مختلط و متناهی‌البعدِ $W_3 \neq \{0\}$ و لذا به دلیل بسته‌ی جبری بودنِ میدانِ $\mathbb{C}$ یک بردار ویژه‌ی ناصفر دارد و این بردار ویژه‌ی هردوی T_1 و T_2 یا به عبارت دیگر هردوی ماتریس‌های A و B خواهد بود که با فرض خلف در تناقض است و این حکم مطلوب مسأله را ثابت می‌کند.

پاسخ ۲۱. بنابر نامساوی کوشی-شوارتز:

$$\begin{aligned}
E(\gamma) &= \int_0^1 g_{\gamma}(s)\big(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)\big)\mathrm{ds} \\
&\geq \Big(\int_0^1 \sqrt{g_{\gamma}(s)\big(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)\big)}\mathrm{ds}\Big)^2 = L(\gamma)^2
\end{aligned}$$

تساوی زمانی رخ می‌دهد که تابعِ $s \mapsto \sqrt{g_{\gamma(s)}\big(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)\big)}$ یا به عبارت دیگر طول بردار سرعت در خمِ $\gamma : [0,1] \to M$ ثابت باشد. فرض کنید خم مشتق‌پذیر و با مشتق‌پیوسته‌ی γ تابعِ E را مینیمم کند. حال برای خم دیگری از این دست همچون $\alpha : [0,1] \to M$ باید نشان دهیم که $L(\alpha) \geq L(\gamma)$. می‌توان یک بازپرمایشِ $\tilde{\alpha} : [0,1] \to M$ از آن در نظر گرفت با این ویژگی که طول بردار مماسِ $\dot{\tilde{\alpha}}(s)$ تغییر نکند [10]. پس بنابر آنچه که قبلاً گفتیم $E(\tilde{\alpha}) = (L(\tilde{\alpha}))^2$ به علاوه از آنجا که طولِ خم تحت بازپرمایش عوض نمی‌شود $L(\alpha) = L(\tilde{\alpha})$. با ترکیبِ این موارد با نامساوی‌ای که در ابتدا

[10] برای ساختنِ چنین بازپرمایشی به عنوان مثال کافی است بازپرمایشِ α برحسب طول را به صورتِ $\beta : [0, l] \to M$ در نظر گرفت که در آن l را طولِ α گرفته‌ایم. حال کافی است قرار داد $\tilde{\alpha}(s) = \beta(\frac{s}{l})$.

بیان شد و با توجه به خاصیتی که برای γ در نظر گرفته بودیم، خواهیم داشت:

$$(L(\alpha))^۲ = (L(\tilde{\alpha}))^۲ = E(\tilde{\alpha}) \geq E(\gamma) \geq (L(\gamma))^۲$$

پس $L(\alpha) \geq L(\gamma)$ که همان چیزی است که می‌خواستیم.