مسأله

مسأله ۱. G گروهی متناهی است و $f : G \to G$ همریختی‌ای که بیش از $\frac{3}{4}$ از اعضای G را به معکوس آنها می‌نگارد. ثابت کنید $f(x) = x^{-1}$ برای هر $x \in G$ و همچنین G آبلی است. به علاوه با ذکر یک مثال تحقیق کنید این احکام در حالتی که همریختیِ $f : G \to G$، دقیقاً $\frac{3}{4}$ از اعضای G را به معکوس آنها تصویر کند، لزوماً صادق نیستند.

مسأله ۲. فرض کنید G یک گروهِ غیرآبلی و متناهی باشد. نشان دهید اعضای $g, h, a \in G$ وجود دارند به طوری که $g \neq h$، $h = aga^{-1}$ و $gh = hg$.[1]

مسأله ۳. R حلقه‌ای است متناهی (که ممکن است یکدار یا جابجایی نباشد.) با این ویژگی که برای هر $a, b \in R$، یک عنصرِ $c \in R$ موجود است به قسمی که $a^2 + b^2 = c^2$. ثابت کنید برای هر $a, b, c \in R$، $d \in R$ای موجود است که تساویِ $2abc = d^2$ را برآورده می‌کند.

مسأله ۴. $(G, *)$ یک گروه است به قسمی که

- G زیرمجموعه‌ای است از $\mathbb{R}^3$.
- برای هر $a, b \in G$، حداقل یکی از تساوی‌های $a \times b = a * b$ یا $a \times b = \vec{0}$ رخ می‌دهد که در آن $\times$ نمایانگرِ ضرب خارجی در $\mathbb{R}^3$ است.

نشان دهید $a \times b = \vec{0}$ برای هر $a, b \in G$.

مسأله ۵. V فضایی برداری است بر میدانِ k که دارای پایه‌ای شمارا و نامتناهی است. حلقه‌ی اندومورفیسم‌های V یا $End(V)$ (یعنی مجموعه‌ی تمامی نگاشت‌های k-خطیِ $V \to V$ که با اعمالِ جمع نگاشت‌های خطی و ترکیب نگاشت‌ها به عنوانِ ضرب، تشکیل یک حلقه می‌دهد.) را E می‌نامیم. نشان دهید تنها ایده‌آل‌های دوطرفه‌ی E عبارتند از ایده‌آلِ صفر، E و ایده‌آلِ متشکل از تمامی اندومورفیسم‌هایی که رتبه‌شان متناهی است.

مسأله ۶. نشان دهید هر میدانی که گروه ضربی‌اش متناهی مولد[2] باشد متناهی است.

[1] مطرح شده در سی و هفتمین مسابقه‌ی ریاضی دانشجویی کشور. راه‌حلِ ارائه شده در اینجا با راه‌حلِ رسمی در سایتِ ims.ir متفاوت است.

[2] finitely generated

مسأله ۷. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی ثابت و غیرپیوسته است و به ازای تابعی مانندِ F داریم: $f(x+y) = F(f(x), f(y))$ برای هر $x, y \in \mathbb{R}$. ثابت کنید f اکیداً یکنواست.

مسأله ۸. تابع پیوسته‌ی $f_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ مفروض است. دنباله‌ی توابعِ $\{f_n : [0,1] \to \mathbb{R}\}_{n \geq 0}$ را به طور استقرایی با $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t$ تعریف می‌کنیم. فرض کنید $f_k(1) = \frac{1}{(k+1)!}$ به ازای یک $k \in \mathbb{N}$. نشان دهید $x_0 \in [0,1]$ وجود دارد به قسمی که $f_0(x_0) = x_0$.

مسأله ۹. الف) ثابت کنید یک تابع منحصربه‌فردِ $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ یافت می‌شود به طوری‌که:

$$\forall x \geq 1 : e^{f(x)} = \frac{f(x)}{x} + x$$

ب) نشان دهید که برای این تابع، اولاً $\lim_{x\to\infty} x(f(x) - \ln x) = 0$ و ثانیاً دنباله‌ی $\{a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \ln n!\}_{n=1}^\infty$ همگراست.

مسأله ۱۰. برای تابعِ

$$f(x) = \frac{1}{1 + 2x + \cdots + 1389x^{1388}}$$

که حولِ مبدأ تعریف شده و هموار است، $f^{(1390)}(0)$ را بیابید.

مسأله ۱۱. ثابت کنید نمی‌توان ناشمارا زیرمجموعه‌ی مجزا و همیمورف با T (منظور شکل حرف انگلیسیِ T است که می‌توان آن را به عنوان زیرفضای $\{1\} \times [-1,1] \cup [0,1] \times \{0\}$ از $\mathbb{R}^2$ در نظر گرفت.) در صفحه پیدا کرد.

مسأله ۱۲. فرض کنید $(H, \langle , \rangle)$ یک فضای ضرب داخلیِ مختلط باشد و $T : H \to H$ عملگری خطی با این ویژگی که

$$\forall x \in H : |\langle Tx, x \rangle| \leq \| x \|^2$$

$\mu \in \mathbb{C}$ با $|\mu| = 1$ را مقدارویژه‌ای از این عملگر بگیرید و

$$E = \{x \in H \mid Tx = \mu x\}$$

را فضای ویژه‌ی متناظرش. ثابت کنید مکمل متعامدِ E یعنی $E^\perp$، تحت T ناورداست: $T(E^\perp) \subseteq E^\perp$.

مسأله ۱۳. فرض کنید $U \subseteq \mathbb{C}$ باز و همبند و $f, g : U \to \mathbb{C}$ توابعی تحلیلی باشند که $|f| + |g|$ ثابت است. ثابت کنید f و g توابعی ثابت هستند[3].

مسأله ۱۴. (خشایار فیلُم) ثابت یا رد کنید: تابعی هولومورف و پوشا از دیسک باز واحد $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ به $\mathbb{C}$ موجود است که مشتقش در هیچ نقطه‌ای صفر نمی‌شود.

[3] مطرح شده در سی و ششمین مسابقه‌ی ریاضی دانشجویی کشور. راه‌حلِ ارائه شده در اینجا با راه‌حل رسمی در سایتِ ims.ir متفاوت است.

مسأله ۱۵. (ابوالفضل طاهری) فرض کنید (X,d) یک فضای متریک فشرده باشد. می‌گوییم $x,y \in X$ را می‌توان از هم جدا کرد اگر زیرمجموعه‌های بازِ U,V از X موجود باشند به طوری که $x\in U$، $y \in V$، $U\cap V=\emptyset$ و $U\cup V = X$. نشان دهید اگر نتوان دو نقطه‌ی x,y از X را جدا کرد، آنگاه یک زیرمجموعه‌ی همبند از X وجود دارد که شامل هردوی x,y است. (اگر X فشرده نباشد چطور؟)

مسأله ۱۶. (عرفان صلواتی) فرض کنید $x_۱, x_۲, \ldots$ دنباله‌ای کراندار در فضای هیلبرتِ H باشد. تعریف کنید:

$$C_۰ = \{\sum_{n=۱}^{N} t_n x_n \mid N\in\mathbb{N}, t_n \geq ۰,\ \sum_{n=۱}^{N} t_n = ۱\}$$

$$C = \{\sum_{n=۱}^{\infty} t_n x_n \mid t_n \geq ۰,\ \sum_{n=۱}^{\infty} t_n = ۱\}$$

نشان دهید $C \subseteq \bar{C}_۰$. آیا لزوماً $\bar{C} = \bar{C}_۰$ برقرار است؟

مسأله ۱۷. هریک از اعداد حقیقی را با یکی از رنگ‌های آبی یا قرمز رنگ کرده‌ایم. می‌دانیم که تابعِ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ وجود دارد با این ویژگی که اگر رنگِ x و y متفاوت باشد، آنگاه:

$$\min\{f(x), f(y)\} \leq |x-y|$$

ثابت کنید هر بازه‌ی باز از $\mathbb{R}$ شامل زیربازه‌ای باز است که رنگ تمامی نقاط آن یکسان است.

مسأله ۱۸. A را یک ماتریس متقارن و $n\times n$ حقیقی بگیرید. نشان دهید اگر رتبه‌ی این ماتریس $n-۱$ باشد، آنگاه $k\in\{۱,\ldots,n\}$ موجود است به قسمی که رتبه‌ی ماتریسی که از حذف سطرِ kام و ستونِ kام از A حاصل می‌شود $n-۱$ است.

مسأله ۱۹. فرض کنید $v_۰$ بردارِ صفر در $\mathbb{R}^n$ و $v_۱, v_۲, \ldots, v_{n+۱} \in \mathbb{R}^n$ به گونه‌ای باشند که برای هر $۰ \leq i,j \leq n+۱$، $|v_i - v_j|$ عددی گویا شود ($|x|$ به معنای نرم اقلیدسیِ $x\in\mathbb{R}^n$ است). ثابت کنید $v_۱, \ldots v_{n+۱}$ روی میدانِ اعداد گویا وابسته‌ی خطی‌اند.

مسأله ۲۰. A و B ماتریس‌هایی مربعی با درایه‌های مختلط هستند به طوری که $AB-BA$ به صورت ترکیب خطیِ A و B است. نشان دهید A، B حداقل یک بردار ویژه‌ی (غیرصفر) مشترک دارند.

مسأله ۲۱. (M,g) یک خمینه‌ی ریمانی است. تابعک‌های طول و انرژی را که با $L(\gamma)$ و $E(\gamma)$ نشان می‌دهیم، بر فضای خم‌های مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته‌ی $\gamma:[۰,۱]\to M$ با ضابطه‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$L(\gamma) = \int_۰^۱ \sqrt{g_{\gamma(s)}\big(\dot\gamma(s), \dot\gamma(s)\big)}\mathrm{ds}$$

$$E(\gamma) = \int_۰^۱ g_{\gamma(s)}\big(\dot\gamma(s), \dot\gamma(s)\big)\mathrm{ds}$$

ثابت کنید اگر خمِ γ، E را مینیمم کند L را نیز مینیمم می‌کند و در نتیجه یک ژئودزیک روی M است.

مسأله‌های پیشنهادی خود را به همراه راه‌حل برای ما بفرستید:

mathematicsjournal@gmail.com