مکمل‌پذیری و متمم‌پذیری در گروه‌ها و کاربردهای آن در نظریه‌ی گراف

چکیده

فرض کنید R حلقه‌ای نیم‌ساده باشد. هر ایده‌آل دلخواه I از R را که در نظر بگیرید، ایده‌آل J از R موجود است چنان که $I \oplus J = R$. حال حلقه‌ی اعداد صحیح را در نظر بگیرید. ایده‌آل $۲\mathbb{Z}$ را در $\mathbb{Z}$ نگاه کنید، هیچ ایده‌آل $m\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$ در این حلقه موجود نیست که $۲\mathbb{Z} \oplus m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$، ولی می‌توان m را طوری پیدا کرد که $۲\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. در واقع کافی است که $(۲, m) = ۱$. در این مقاله می‌خواهیم این دو مفهوم را برای گروه‌ها بازسازی کنیم و در نهایت به کاربردهایی از این دو مفهوم درنظریه‌ی گراف اشاره می‌کنیم. به مفهوم اول، "مکمل‌پذیری" و به مفهوم دوم "متمم‌پذیری" می‌گویند.

تعریف ۱. *as- گروه‌ها و ac- گروه‌ها: فرض کنید G یک گروه باشد و $H \leq G$. به زیرگروه سره K از گروه G یک متمم [۱] برای زیرگروه H می‌گویند هرگاه $G = HK$. حال اگر $H \cap K = ۱$، به K مکمل[۲] H نیز گفته می‌شود.*

اگر هر زیرگروه دلخواه از G دارای متمم بود، G را یک as- گروه می‌نامند که در واقع a اول کلمه‌ی "arbitrary" به معنی دلخواه و s اول کلمه‌ی "supplement" است. و به همین ترتیب اگر هر زیرگروه دلخواه از گروه G دارای مکمل باشد، آن‌گاه G را یک ac- گروه می‌نامند.

مثال ۲. *گروه $\mathbb{Z}_۶$ را در نظر بگیرید. ۲ زیرگروه سره دارد: $۲\mathbb{Z}_۶$ و $۳\mathbb{Z}_۶$. می‌توان به راحتی دید که $\mathbb{Z}_۶ = (۳\mathbb{Z}_۶)(۲\mathbb{Z}_۶)$. بنابراین $\mathbb{Z}_۶$ هم ac- گروه و هم as- گروه است.*

در ادامه به بررسی تاریخچه‌ی این دو کلاس از گروه‌ها می‌پردازیم و هم‌چنین قضایایی اساسی و مهمی که تا امروز در مورد این دو کلاس اثبات شده است را مرور می‌کنیم.

[۱] Supplementation
[۲] Complementation

در ابتدا ac- گروه‌های متناهی مورد توجه قرار گرفتند. هال[۳] در سال ۱۹۳۷ تمام ac- گروه‌های متناهی را رده‌بندی کرد. البته هال در ۱۹۳۷ از اصطلاح ac- گروه در کارهای خود استفاده نکرده بود. او از اصطلاح متمم‌پذیر استفاده کرد. اصطلاح ac- گروه‌ها و as- گروه‌ها در سال ۲۰۰۰ توسط کاپه[۴] و کرتلند[۵] برای اولین بار به کار رفت ولی تا قبل از آن نشانه‌ای از این اصطلاح نیست، حتی ریاضیدانان شوروی سابق که با این مفهوم کار می‌کردند از لفظ تجزیه‌ی کامل[۶] برای ac- گروه‌ها استفاده می‌کردند. برای مثال می‌توانید به مقاله‌های [۲] از باااوا[۷] و مقاله‌های [۶] و [۷] از چرینکوا[۸] مراجعه کنید. در قضیه‌ی بعد به رده‌بندی as- گروه‌های متناهی می‌پردازیم.

قضیه ۳. *فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. آن‌گاه گزاره‌های زیر با هم معادل هستند:*

الف) G یک ac- گروه است.

ب) G یکریخت است با زیرگروهی از ضرب مستقیم گروه‌هایی با مرتبه‌ی خالی از مربع .

ج) G یک گروه ابرحل‌پذیر[۹] با سیلو زیرگروه‌های آبلی مقدماتی است.

ه) هر زیرگروه دوری از مرتبه‌ی اول دارای مکمل می‌باشد.

اثبات. معادل بودن گزاره‌های الف، ب و ج از گزاره ۱ و ۲ از مقاله‌ی [۱۲] نتیجه گرفته می‌شود و معادل بودن گزاره‌های الف و ه از نتیجه‌ی ۲ از مقاله‌ی [۳] به دست می‌آید. □

در ادامه به بررسی ac- گروه‌های نامتناهی می‌پردازیم.

قضیه ۴. *[باااوا ۱۹۵۳ ، [۲]] فرض کنید G یک ac- گروه باشد (نه لزوماً متناهی). در این صورت موارد زیر را داریم:*

الف) G یک گروه متاآبلی[۱۰] است.

ب) G یک گروه به طور موضعی آبلی است.

ج) اگر G یک p- گروه باشد، آن‌گاه G آبلی مقدماتی است.

[۳] Hall
[۴] Kappe
[۵] Kirtland
[۶] Completely Factorizable
[۷] Baeva
[۸] Chernikova
[۹] گروه G را ابرحل‌پذیر می‌گویند اگر دارای سری نرمال با عامل‌های دوری باشد.
[۱۰] گروه G را متاآبلی می‌گویند هر گاه $G'' = ۱$ یا به طور معادل G' آبلی باشد.

ه) *معادل است با این که G ضرب نیم‌مستقیم زیرگروه نرمال و آبلی A و زیرگروه آبلی B باشد؛ به قسمی که هر دوی A و B به ضرب مستقیم زیرگروه‌های دوری از مرتبه‌ی اعداد اول تجزیه می‌شوند.*

باوا در مقاله‌ی [۲] یک حکم جالب توجه دیگر نیز نشان داد، او نشان داد اگر G شامل یک سری افزایشی از زیرگروه‌های نرمال با عامل‌های دوری از مرتبه‌ی اعداد اول متمایز باشد، یک ac-گروه خواهد بود.

حال در ادامه به بررسی کلاس as-گروه‌ها می‌پردازیم. ابتدا به بررسی ارتباط ac-گروه‌ها و as-گروه‌ها می‌پردازیم. همان طور که قبلاً اشاره شد، اگر G یک ac-گروه باشد آنگاه as-گروه است. عکس این گزاره درست نیست، مثلاً گروه

$$D_\infty = \langle a, b | o(b) = 2, bab = a^{-1} \rangle$$

را در نظر بگیرید. با کمی بررسی می‌توان دریافت که D_∞ یک as-گروه است ولی ac-گروه نیست.

قضیه ۵. [قضیه ۳.۶ ، [۱۲]] *فرض کنید G یک as-گروه آرتینی[11] باشد در این صورت G یک ac-گروه است.*

حال با کمک این قضیه می‌توان as-گروه‌های متناهی را رده‌بندی کرد. توجه کنید با توجه به قضیه‌ی قبل، کلاس as-گروه‌های متناهی و ac-گروه‌های متناهی معادل می‌شوند. حال که با توجه به قضیه ۳، ac-گروه‌های متناهی رده‌بندی شده‌اند از این رو as-گروه‌های متناهی نیز رده‌بندی می‌شوند. اما در مورد as-گروه‌های نامتناهی رده‌بندی شناخته شده‌ای وجود ندارد. در سال ۲۰۱۲ در مقاله [۱] توانسته‌ایم نشان دهیم که as-گروه‌ها چه متناهی و چه نامتناهی، ساده نیستند.

حال در قضیه‌های بعدی سعی می‌کنیم که خواص بیشتری از as-گروه‌های نامتناهی بررسی کنیم.

قضیه ۶. [تمرین ۸ صفحه‌ی ۴۴۳ ، [۱۱]] *اگر R یک حلقه‌ی نیم‌ساده باشد آنگاه $J(R) = 0$.*

همان‌طور که می‌دانید در حلقه‌های نیم‌ساده، ایده‌آل جیکوبسن نقشی اساسی دارد. به نظر می‌آید در as-گروه‌ها نیز باید به همین ترتیب باشد. زیرگروه فراتینی در واقع همان نقش ایده‌آل جیکوبسن را در نظریه‌ی حلقه‌ها بازی می‌کند. در واقع اشتراک تمام زیرگروه‌های ماکسیمال گروه G را زیرگروه فراتینی G می‌گویند و با نماد $\Phi(G)$ نمایش می‌دهند. قرارداد می‌کنند اگر G زیرگروه ماکسیمال نداشته باشد $G = \Phi(G)$. لازم به ذکر است که فراتینی زیرگروه خودش را سال‌ها قبل از ایده‌آل جیکوبسن معرفی کرد. برای دیدن خواص فراتینی می‌توانید به مقاله‌ی [۸] مراجعه کنید.

قضیه ۷. *اگر G یک as-گروه باشد، در این صورت G دارای زیرگروه ماکسیمال است، بعلاوه $\Phi(G) = 1$.*

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که G حداقل شامل یک زیرگروه ماکسیمال است. عضو $x \in G$ را در نظر بگیرید. از آنجا که G as-گروه است، زیرگروه سره‌ی H موجود است که $\langle x \rangle H = G$. حال قرار دهید $\Sigma = \{K < G | H \leq K, x \notin K\}$. به راحتی می‌توان دید Σ ناتهی است زیرا $H \in \Sigma$. هر زنجیر دارای کران بالایی است.لذا بنابر لم زرن دارای عضو ماکسیمال است. فرض کنید $\mathfrak{m}$ عضو ماکسیمال باشد آن‌گاه نشان می‌دهیم $\mathfrak{m}$ در G نیز ماکسیمال است. فرض کنید $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{m}_1$. آن‌گاه دو حالت داریم. حالت اول: فرض کنید $x \notin \mathfrak{m}_1$. از آن‌جائیکه $H \subset \mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{m}_1$ پس $\mathfrak{m}_1$ متعلق به Σ است و با ماکسیمال بودن $\mathfrak{m}$ در تناقض است. حالت دوم: فرض کنید $x \in \mathfrak{m}_1$. با توجه به اینکه $\langle x \rangle H = G$ لذا داریم: $\langle x \rangle H = \langle x \rangle \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_1$. پس $\mathfrak{m}$ یک زیرگروه ماکسیمال G است. حال نشان می‌دهیم که $\Phi(G) = 1$. فرض کنید $1 \neq x \in \Phi(G)$. از آن‌جائیکه as-گروه است از این رو زیرگروه K به قسمی که $\langle x \rangle K = G$ وجود دارد. اما با توجه به گزاره‌ی ۱.۱۵ صفحه‌ی ۹۲ از [۱۵]، داریم $G = K$ که تناقض است. بنابراین $\Phi(G) = 1$. □

کاربردهای as-گروه‌ها و ac-گروه‌ها در نظریه‌ی گراف

نظریه‌ی گراف علاوه بر این‌که امروزه به عنوان یکی از مهمترین شاخه‌های ریاضی محسوب می‌شود، به عنوان یک ابزار قوی در اختیار سایر علوم هم‌چون فیزیک، شیمی، الکترونیک، مخابرات و غیره قرار گرفته است. از میان سایر شاخه‌های علم ریاضیات بعضی متخصصین علم جبر نیز سعی کرده‌اند گراف‌هایی به اشیاء جبری اعم از نیم‌گروه‌ها، گروه‌ها و حلقه‌ها نسبت دهند و از خواص هندسی گراف برای یافتن نتایجی در مورد ساختار جبری این اشیاء بهره گیرند و برای برخی از قضایای جبری ترجمه‌ای به زبان خواص هندسی گراف‌ها به دست آورند.

متناظر کردن گراف به ساختارهای جبری به یکی از مسایل مهم در نظریه جبری گراف تبدیل شده است. تاکنون گراف‌های مختلفی به نیم‌گروه‌ها و گروه‌ها نظیر شده است. برای مثال در سال ۱۹۷۵، زلینکا گراف اشتراکی را برای گروه‌های آبلی در مقاله‌ی [۱۶] بررسی

[11] گروه G را آرتینی می‌گویند هرگاه هر خانواده‌ای از زیرگروه‌هایش عنصر مینیمال داشته باشد.

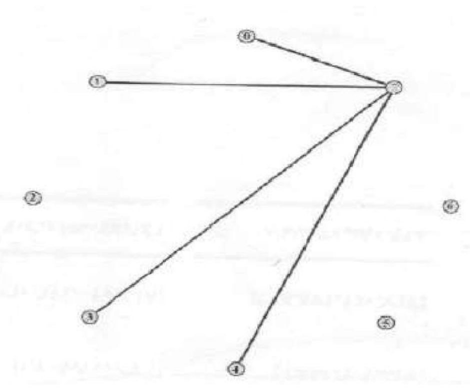
کرد، برای مطالعه‌ی بیشتر گراف‌های اشتراکی گروه‌ها به [۱۷] مراجعه کنید. حتی با استفاده از سرشت‌های تحویل‌ناپذیر گروه می‌توان به گروه یک گراف نظیر کرد، به مقاله‌ی [۱۸] مراجعه کنید.

حال با استفاده از مفهوم as-گروه‌ها و ac-گروه‌ها می‌توان به گروه‌ها گراف نظیر کرد و آن را به کلیه‌ی گروه‌ها تعمیم داد.

تعریف ۸. *فرض کنید G یک گروه باشد. تمام زیرگروه‌های ناسره و نابدیهی G را به عنوان رئوس گراف $\Gamma(G)$ در نظر بگیرید. دو راس H و K را به هم وصل می‌کنیم اگر و تنها اگر $G = HK$. گراف $\Gamma(G)$ را گراف دوگان ماکسیمال[۱۲] زیرگروه‌های یک گروه می‌نامیم. برای راحتی به جای گراف دوگان ماکسیمال زیرگروه‌های یک گروه، گراف دوگان ماکسیمال می‌گوییم.*

مثال ۹. *$\Gamma(A_۴)$ را در نظر بگیرید.*

- ۰ : ⟨(۱۲۳)⟩
- ۱ : ⟨(۱۳۴)⟩
- ۲ : ⟨(۱۲)(۳۴)⟩
- ۳ : ⟨(۲۳۴)⟩
- ۴ : ⟨(۱۴۲)⟩
- ۵ : ⟨(۱۴)(۲۳)⟩
- ۶ : ⟨(۱۳)(۲۴)⟩
- ۷ : ⟨(۱۲)(۳۴), (۱۳)(۲۴)⟩



قضیه ۱۰. *گراف دوگان ماکسیمال یک گروه، گرافی ساده است.*

اثبات. فرض کنید راس H به K متصل باشد یعنی $G = HK$. از آن‌جائیکه $G = HK$ پس HK زیرگروه است و بنا به گزاره‌ی ۳.۱۲ از [۱۶] داریم $KH = HK$ پس $G = KH$ و K نیز به H وصل است. بنابراین گراف $\Gamma(G)$ ساده است. □

به همین ترتیب می‌توان گرافی مشابه برای حالت $G = HK$ که در آن $H \cap K = ۱$ تعریف کرد اما در این مقاله به بررسی گراف دوگان ماکسیمال می‌پردازیم. یکی از اولین سؤالاتی که در مورد گراف دوگان ماکسیمال به ذهن می‌رسد، چه موقع این گراف پوچ نمی‌باشد یعنی حداقل شامل یک یال است؟ برای پاسخ دادن به این سوال به تعریف مفهوم مهمی از نظریه گروه‌ها نیاز داریم.

تعریف ۱۱. *گروه G را تجزیه‌پذیر می‌نامیم اگر زیرگروه‌های سره و نابدیهی H و K از G موجود باشند به طوری که $G = HK$. گروه‌هایی نیز وجود دارند که تجزیه‌ناپذیرند. یعنی هر زیرگروه آنها فاقد متمم است.*

در قضایای بعدی به بررسی تجزیه‌ناپذیری چند گروه می‌پردازیم و هم‌چنین ذکر می‌کنیم چه موقع زیرگروه یک گروه آبلی فاقد متمم است. همه‌جا p و q را نمایانگر اعدادی اول می‌گیریم.

قضیه ۱۲. *فرض کنید G یک گروه آبلی باشد.*

الف) [تمرین D-۱۰.۵ ، [۵]] زیرگروه K از G فاقد متمم است اگر و فقط اگر $K \subseteq \Phi(G)$ و K هیچ گروه خارج‌قسمتی یکریخت با $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ نداشته باشد.

ب) [۱۳.۱.۶ ، [۱۵]] G تجزیه‌ناپذیر است اگر و فقط اگر $G \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$.

تذکر ۱۳. *توجه کنید که گروه‌های ناآبلی متناهی و نامتناهی وجود دارند که تمام زیرگروه‌های آن‌ها فاقد متمم باشد. برای مثال، فرض کنید $G \cong PSL(۲,۱۳)$. آن‌گاه تمام زیرگروه‌های G فاقد متمم هستند. برای جزئیات بیشتر می‌توان به [۱۳.۱.۱۱ و ۱۵] و مقاله‌ی [۴] مراجعه کنید. برای حالت نامتناهی می‌توان گروه تارسکی مانستر[۱۳] را در نظر گرفت. تعریف این گروه را می‌توان در [۱۳] یافت.*

در واقع تجزیه‌پذیری برای یک گروه معادل با این است که گراف دوگان ماکسیمال آن پوچ نباشد. حال در ادامه به بررسی همبندی و قطر گراف دوگان ماکسیمال می‌پردازیم.

[۱۲] Co-maximal

[۱۳] Tarski Monster

قضیه ۱۴. [قضیه ۱ ، [۱]] *فرض کنید G یک گروه باشد به طوری‌که $\delta(\Gamma(G)) \geq 1$. در این صورت $\mathrm{diam}(\Gamma(G)) \leq 3$.*

قضیه ۱۵. *فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. در این صورت $\mathrm{diam}(\Gamma(G)) = 2$ اگر و فقط اگر G یکی از حالات زیر باشد:*

الف) $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_q$.[14]

ب) *p-گروه آبلی مقدماتی به جز حالت $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$.*

اثبات. ابتدا فرض کنید $\mathrm{diam}(\Gamma(G)) = 2$. فرض کنید p کوچک‌ترین عدد اول باشد که $|G|$ را عاد می‌کند. اگر عدد اول q متمایز با p وجود داشت که $|G|$ را عاد کند در این صورت زیرگروه H و K از مرتبه‌ی p و q وجود دارند. دو حالت داریم:

حالت اول: فرض کنید $G = HK$. در این صورت G یک گروه از مرتبه‌ی pq است. بنا به رده‌بندی گروه‌های از مرتبه‌ی pq یا $G = \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_q$ یا $G = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$. دقت کنید که $\Gamma(\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q) = K_2$.

حالت دوم: فرض کنید $HK \neq G$. در این صورت ادعا می‌کنیم که G یک p-گروه است. فرض کنید L یک زیرگروه باشد که $G = HL = KL$. در این صورت داریم $[G : L] = p$. دقت کنید چون p کوچک‌ترین عدد اول است، داریم $L \trianglelefteq G$. بنابراین $H \cong K$ که غیرممکن است پس G یک p-گروه است و ادعا ثابت می‌شود. حال با توجه به قضیه‌ی ۳، G یک گروه آبلی مقدماتی است.

عکس قضیه واضح است. □

حال به دنبال رده‌بندی کردن گروه‌هایی هستیم که گراف دوگان ماکسیمال زیرگروه آن‌ها کامل هستند. ابتدا حکمی را در مورد گروه‌های آبلی نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۶. *فرض کنید G یک گروه آبلی بوده به طوری که $\delta(\Gamma(G)) \geq 1$. آن‌گاه موارد زیر با هم معادل هستند:*

الف) *راسی متصل به همه‌ی رئوس وجود دارد.*

ب) $G = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$.

ج) *$\Gamma(G)$ گراف کامل است.*

اثبات. (ب)⇒(الف). فرض کنید H راسی باشد که به همه‌ی رئوس متصل است. واضح است که H باید زیرگروه ماکسیمال و زیرگروه ساده باشد، پس H یک زیرگروه دوری مرتبه‌ی اول است که ماکسیمال نیز است. حال نشان می‌دهیم که هر زیرگروه سره از G، هم ماکسیمال و هم زیرگروه ساده است. فرض کنید L یک زیرگروه از G باشد. چون $G = HL$، پس داریم $G/H \cong L$. از آن‌جایی که H، هم زیرگروه ساده و هم زیرگروه ماکسیمال است لذا L نیز هم زیرگروه ساده و هم زیرگروه ماکسیمال است. حال ادعا می‌کنیم که G تاب‌دار [15] است، زیرا فرض کنید g عضوی خالی از تاب [16] از G باشد. در این صورت زیرگروه‌های نابدیهی $\langle g^2 \rangle \subsetneq \langle g \rangle$ را در نظر بگیرید. بنابراین $\langle g^2 \rangle$ در G ماکسیمال نیست که این تناقض است پس G تابدار است و ادعا ثابت می‌شود. اگر G یک p-گروه باشد، آن‌گاه دو عضو مرتبه‌ی p را در نظر بگیرید. چون این دو عضو باید به هم وصل باشند، پس $|G| = p^2$ که به راحتی می‌توان نتیجه گرفت $G = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ پس می‌توان فرض کرد که عضوهایی از مرتبه‌ی p و q موجودند بنابراین $G = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$.

(ب)⇒(ج) و (ج)⇒(الف) واضح هستند. □

تذکر ۱۷. *در قضیه‌ی قبل شرط آبلی را نمی‌توان حذف کرد. فرض کنید $G = S_3$. در این صورت راس $\langle(123)\rangle$ به بقیه‌ی رئوس متصل است در حالی که گراف دوگان ماکسیمال آن کامل نیست.*

قضیه ۱۸. *فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت $\Gamma(G)$ گراف کامل است اگر و فقط اگر $G = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$.*

اثبات. فرض کنید $\Gamma(G)$ گراف کامل باشد. همانند استدلال قضیه‌ی قبل G بی‌تاب نیست، لذا G تاب‌دار است. حال فرض کنید $\langle g_1 \rangle$ و $\langle g_2 \rangle$ دو زیرگروه با مرتبه‌های p و q باشند که در آن p و q دو عدد متمایز اول هستند. چون $\Gamma(G)$ گراف کامل است، لذا بنا به رده‌بندی گروه‌های از مرتبه‌ی pq، داریم $G \in \{\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_q, \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q\}$. اگر $G = \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_q$، آن‌گاه دو زیرگروه وجود دارند که به هم متصل نیستند. بنابراین $G = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$. عکس قضیه واضح است. □

تذکر ۱۹. *به راحتی می‌توان دید که $\Gamma(\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q) = K_2$ و $\Gamma(\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p) = K_{p+1}$.*

در قضیه‌ی بعد، عدد خوشه‌ای و عدد رنگی راسی را برای گروه آبلی با تولید متناهی به دست می‌آوریم.

قضیه ۲۰. *اگر G یک گروه آبلی با تولید متناهی باشد، آن‌گاه $\omega(\Gamma(G)) = \chi(\Gamma(G)) = |\mathrm{Max}(G)|$.*

اثبات. اگر G شامل نامتناهی زیرگروه ماکسیمال باشد، آن‌گاه $\omega(\Gamma(G)) = \chi(\Gamma(G)) = \infty$. پس می‌توان فرض کرد که $|\mathrm{Max}(G)| < \infty$. زیرگراف القایی راسی را روی رئوس $\mathrm{Max}(G)$

[14] برای دیدن تعریف ضرب نیم‌مستقیم می‌توانید به صفحه‌ی ۲۱۲ از مرجع [۱۴] مراجعه کنید.

[15] torsion

[16] torsion free

در نظر بگیرید. واضح است که این مجموعه تشکیل خوشه می‌دهد از این رو $|\mathrm{Max}(G)| \le \omega(\Gamma(G)) \le \chi(\Gamma(G))$. حال یک رنگ‌آمیزی سره برای $\Gamma(G)$ ارائه می‌دهیم. حال به هر کدام از اعضای $\mathrm{Max}(G)$ یک رنگ می‌دهیم. چون G متناهی مولد است، لذا هر زیرگروه درون یک زیرگروه ماکسیمال G قرار می‌گیرد. به هر زیرگروه رنگ یک زیرگروه ماکسیمال دربردارنده‌ی آن را نسبت می‌دهیم. توجه داشته باشید که طبق اصل انتخاب این کار امکان‌پذیر است. حال نشان می‌دهیم که این رنگ‌آمیزی سره است. فرض کنید $LK = G$. اگر L و K هم‌رنگ باشند، آن‌گاه L و K درون یک ماکسیمال هستند که با $LK = G$ در تناقض است. $\square$

مراجع

[1] S. Akbari, R. Nikandish, B. Miraftab, Co-Maximal Graphs of Subgroups of Groups, Submitted.

[2] N.V. Baeva, Completely Factorizable Groups, Dokl. Akad. Nauk SSSR 92 (1953) 877-880.

[3] A. Ballester-Bolinches, Xiuyun Guo, On Complemented Subgroups of Finite Groups, Arch. Math. (Basel) 72 (3) (1999) 161-166.

[4] M. Blaum, Factorization of the Simple Groups $PSL(3,q)$ and $PSU(3,q^2)$, Arch. Math. (Basel) Vol40, (1983) 8-13.

[5] G. Calugareanu, S. Breaz, C. Modoi, C. Pelea, D. Valcan, Excercises in Abelian Group Theory, Kluwer Academic Publishers, 2003.

[6] N. V. Chernikova, Groups with Complemented Subgroups, Mat. Sb. 39 (1956) 237-292.

[7] N. V. Chernikova, Groups with System of Complemented Subgroups, Dokl. Akad. Nank SSSR92 (1953) 877-880(Russian)

[8] V. Dlab, The Frattini Subgroup of Abelian Groups, Czechoslovak Math. J. 10, No1, (1960) 1-16.

[9] L. Fuchs, Infinite Abelian Groups I, Pure and Applied Mathematics Vol. 36, 1970.

[10] P. Hall, Complemented Groups, J. London Math. Soc. 12 (1937), 201-204.

[11] T. W. Hungerford, Algebra, Springer-Verlag, New York, 1974.

[12] L. C. Kappe, J. Kirtland, Supplementation in Groups, Glasgow Math. J. 42 (2000) 3750.

[13] A. Yu. Ol'shanskii, A Geometry of Defining in Relation Groups, (Kluwer, Boston, 1991).

[14] W. R. Scott, Group Theory, Dover Publications, Inc., New York, 1987.

[15] M. Suzuki, Group Theory I, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[16] B. Zelinka, Intersection Groups of Finite Abelian Groups, Czechoslovak Math. J. 25 (2) (1975) 171-174.

[17] R. Shen, Intersection Groups of Subgroups of Finite Groups, Czechoslovak Math. J. 60 (135) (2010) 945-950.

[18] M. L. Lewis, A Solvable Group Whose Character Degree Graphs has Diameter 3, Proceeding of the American Mathematical Society, Vol 131, No. 3 (2002) 625-630.