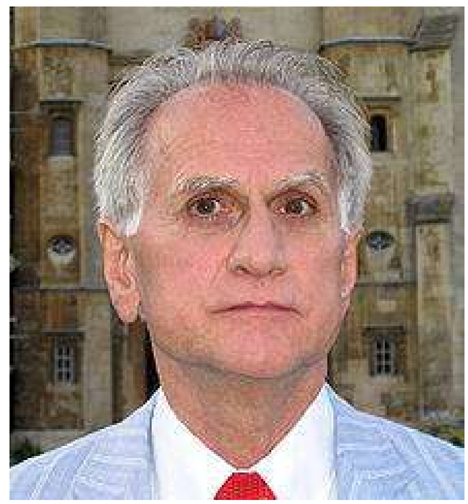
فرازهایی از کنفرانس RSA 2013

عباس محرابیان[1]

کنفرانس ساختارها والگوریتم‌های تصادفی[2] از پنجم تا نهم آگست ۲۰۱۳ (چهاردهم تا هجدهم مرداد ۱۳۹۲) در شهر Poznan لهستان برگزار شد. کنفرانس امسال شانزدهمین شماره از این سری بود و دو مناسبت را جشن می‌گرفت: سی‌امین سالگرد تولد خود کنفرانس، و هفتادمین سالگرد تولد Bela Bollobas که نقش پررنگی در پیشرفت این شاخه بازی کرده است.



شکل ۱: Bela Bollobas

در این یادداشت فرازهایی از این کنفرانس که برایم جالب بوده را ذکر می‌کنم. این یک یادداشت فنی نیست: برخی از مطالب زیر را چند روز بعد از شنیدن سخنرانی مربوطه یادداشت کرده‌ام و امکان بروز اشتباه در جزئیات وجود دارد ولی سعی کرده‌ام در هر مورد مقاله مناسبی معرفی کنم تا خواننده علاقمند بتواند به آن‌ها مراجعه کند. طبیعتاً علایق شخصی نویسنده در انتخاب فرازها مؤثر بوده است. خوشحال می‌شوم اگر نظری در مورد این یادداشت دارید به نگارنده به نشانی amehrabi@uwaterloo.ca ای‌میل بزنید.

[1] نگارنده در سال ۱۳۸۸ مدرک کارشناسی خود را در دو رشته مهندسی کامپیوتر و ریاضیات از دانشگاه صنعتی شریف اخذ نمود و در حال حاضر دانشجوی دکتری دانشگاه واترلوی کاناداست.

[2] Random structures and algorithms 2013, http://rsa2013.amu.edu.pl/

شکل ۲: Geoffrey Grimmett

Geoffrey Grimmett از دانشگاه کمبریج درباره مسئله شمارش مسیرها[3] صحبت کرد. فرض کنید G یک گراف نامتناهی رأس ترایا[4] باشد. تعداد مسیرهای به طول n که از یک رأس خاص شروع می‌شود را با $s(n,G)$ نشان می‌دهیم. منظور از مسیر در این‌جا همان تعریف نظریه گرافی آن است، یعنی دنباله‌ای از رئوس متمایز که هر دوتا رأس متوالی به هم وصل باشند. احتمال‌کارها معمولا به جای مسیر از عبارت self-avoiding walk استفاده می‌کنند. در این صورت به ازای هر دو عدد طبیعی a و b داریم:

$$s(a+b,G) \leq s(a,G)s(b,G)$$

و می‌توان از این رابطه نتیجه گرفت ثابت $m(G)$ وجود دارد که

$$s(n,G) = m(G)^{n+o(n)}$$

و $m(G)$ ثابت اتصال[5] گراف G خوانده می‌شود. به عنوان مثال برای شبکه‌ی دوبعدی $Z^۲$ ثابت شده است که

$$۲٫۶۳ \leq m(Z^۲) \leq ۲٫۶۸$$

اخیراً Grimmett و Li ثابت کردند[6] برای هر گراف ساده، نامتناهی، همبند، d-منظم و رأس‌ترایای G داریم

$$\sqrt{d-۱} \leq m(G) \leq d-۱$$

کران بالا تقریباً واضح است. کران پایین اثبات ترکیبیاتی زیبایی دارد که در این سخنرانی شمه‌ای از آن گفته شد. هم‌چنین سخنران گفت نمی‌دانند که آیا این بهترین کران پایین ممکن است؟ حتی برای

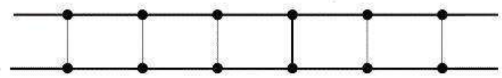
[3] Counting self-avoiding walks

[4] Vertex-transitive

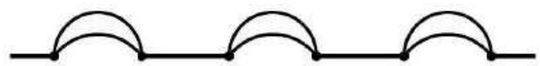
[5] Connectivity constant

[6] Grimmett and Li, Bounds on connective constants of regular graphs (2012), http://arxiv.org/abs/1210.6277

$d = ۳$ بهترین مثالی که وجود دارد گراف زیر است (معروف به گراف نردبان):

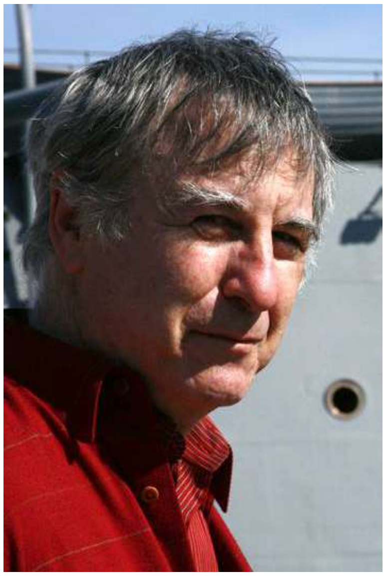


که دارای ثابت اتصال $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ است که از $\sqrt{۲}$ بزرگ‌تر است. البته گراف زیر دارای ثابت اتصال $\sqrt{۲}$ است ولی ساده نیست (یال دوگانه دارد):



حال فرض کنید $s_۱(n, G)$ تعداد مسیرهای به طول n در گراف G باشد که از یک رأس خاص شروع می‌شوند و از انتها قابل ادامه دادن تا بی‌نهایت هستند. هم‌چنین فرض کنید $s_۲(n, G)$ تعداد مسیرهای به طول n در گراف G باشد که از یک رأس خاص شروع می‌شوند و از ابتدا قابل ادامه دادن تا بی‌نهایت هستند. بالاخره فرض کنید $s_۳(n, G)$ تعداد مسیرهای به طول n در گراف G باشد که از یک رأس خاص شروع می‌شوند و از هر دو سر قابل ادامه دادن تا بی‌نهایت هستند. می‌توان ثابت‌های $m_۱(G)$، $m_۲(G)$ و $m_۳(G)$ را متناظر با این پارامترها تعریف کرد. Grimmett، Holroyd و Peres ثابت کردند[7] در هر گرافی این چهار ثابت با هم برابرند. این قضیه اثبات پیچیده‌تری دارد. سخنران حدس می‌زند که در شبکه دوبعدی، حکم قوی‌تری درست است: ثابت مثبت c وجود دارد که به ازای هر n داریم $s_۱(n, G) > cs(n, G)$.

Joel Spencer از دانشگاه نیویورک درباره یک قضیه که اثبات وجودی دارد صحبت کرد که به تازگی اثباتی ساختنی برایش پیدا شده. فرض کنید یک خانواده n عضوی F از زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی S داریم. می‌خواهیم اعضای مجموعه S را با دو رنگ آبی و قرمز رنگ کنیم به طوری که برای هر مجموعه در F، اختلاف تعداد اعضای آبی و قرمز $O(\sqrt{n})$ باشد. خود سخنران نزدیک ۳۰ سال پیش نشان داد[8] که چنین کاری ممکن است. اثبات او وجودی بود و الگوریتم سریعی برای پیدا کردن رنگ‌آمیزی ارائه نمی‌کرد. سال ۲۰۱۰ نخستین الگوریتم سریع (با زمان اجرای چندجمله‌ای) برای پیدا کردن چنین رنگ‌آمیزی ارائه شد[9].



شکل ۳: Joel Spencer

این الگوریتم از تکنیک Semi-definite programming استفاده می‌کرد. سال ۲۰۱۲ الگوریتم سریع دیگری برای حل این مسئله ارائه شد[10] که دو ویژگی مهم داشت. اول این که این الگوریتم در حقیقت اثبات متفاوتی برای قضیه Spencer ارائه می‌کند. دوم این که خود الگوریتم بسیار زیباست و ایده اصلی آن یک قدم زدن تصادفی هوشمندانه است که از هیچ ابزار سنگینی استفاده نمی‌کند و احتمالاً در آینده کاربردهای دیگری نیز پیدا خواهد کرد.

شکل ۴: Gil Kalai

Gil Kalai درباره‌ی thresholdها صحبت کرد. گراف Erdos-Renyi با پارامترهای n و p را در نظر بگیرید و آن را $G(n,p)$ بنامید. می‌دانیم که اگر $p >> ۱/n$ آن‌گاه امید ریاضی تعداد دورهای همیلتونی از ۱ بیشتر است. ولی کوچکترین p که تضمین کند به

---

[7] Grimmett, Holroyd, and Peres, Extendable self-avoiding walks (2013), http://arxiv.org/abs/1307.7132.

[8] Spencer, Six Standard Deviations Suffice (1985), Transactions of the American Mathematical Society.

[9] Bansal, Constructive Algorithms for Discrepancy Minimization (FOCS 2010), http://arxiv.org/abs/1002.2259.

[10] Lovett and Meka, Constructive Discrepancy Minimization by Walking on The Edges (FOCS 2012), http://arxiv.org/abs/1203.5747.

احتمال $۱-o(۱)$ گراف دارای یک دور همیلتونی است، $p \approx \ln(n)/n$ است. Kahn و Kalai این پدیده را در مسائل مختلفی مشاهده کردند و چنین حدسی زدند[۱۱]: فرض کنیم $H(n)$ گراف مشخصی با حداکثر n رأس باشد و فرض کنیم $p(n)$ کوچک‌ترین مقداری باشد که به احتمال بیش از یک دوم، $H(n)$ زیرگرافی از $G(n, p(n))$ باشد. حال فرض کنید $q(n)$ کوچک‌ترین مقدار با این خاصیت باشد: برای هر زیرگراف $H'(n)$ از $H(n)$، امید ریاضی تعداد کپی‌های $H'(n)$ در $G(n, q(n))$ (به عنوان زیرگراف) لااقل ۱ می‌باشد. در این صورت داریم $p(n) = O(q(n) \log n)$. این گزاره اگر درست باشد بسیار قوی است و نتایج مهمی دارد.

شکل ۵: Xavier Perez-Gimenez

Xavier Perez-Gimenez از دانشگاه واترلو درباره پارامترهای spanning tree packing number و arboricity روی گراف‌های Erdos-Renyi سخنرانی کرد. فرض کنید G یک گراف باشد. حداکثر تعداد زیردرخت‌های فراگیر G که دوبه‌دو یال–مجزا باشند را با $stp(G)$ نشان می‌دهیم و حداقل تعداد جنگل‌هایی که اجتماع آن‌ها همه‌ی یال‌های G را بپوشاند با $a(G)$ نشان می‌دهیم. دو کران بالای ساده برای $stp(G)$ وجود دارد: اولا اگر G رأسی از درجه d داشته باشد، $stp(G)$ از d بیشتر نیست. بنابراین مینیمم درجه‌ی G یک کران بالاست. ثانیا اگر گراف G دارای n رأس و m یال باشد، آن‌گاه $stp(G)$ از $\lfloor \frac{m}{n-۱} \rfloor$ بیشتر نیست چرا که هر زیردرخت فراگیر دارای $n-۱$ یال است. فرض کنید $p = p(n)$ تابع دلخواهی از n باشد و گراف Erdos-Renyi را با $G(n,p)$ نمایش می‌دهیم. Gao، Perez-Gimenez و Sato نشان دادند[۱۲] که به احتمال نزدیک به ۱

[۱۱] Kahn and Kalai, Thresholds and Expectation Thresholds (2007), Combinatorics, Probability and Computing, http://arxiv.org/abs/math/0603218.

[۱۲] Gao, Perez-Gimenez, Sato, Arboricity and spanning-tree packing in random graphs with an application to load balancing, http://arxiv.org/abs/1303.3881, SODA 2014

وقتی n بزرگ باشد، داریم

$$stp(G(n,p)) = \min\{\delta, \lfloor \frac{m}{n-۱} \rfloor\}$$

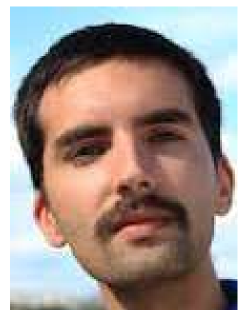
در حقیقت چیزی که آن‌ها ثابت کردند قوی‌تر است: فرآیند تصادفی تولید یک گراف تصادفی را در نظر بگیرید. از گراف با n رأس و بدون یال شروع می‌کنیم، و در هر گام یک یال تصادفی از بین یال‌هایی که در گراف موجود نیست را به گراف اضافه می‌کنیم، تا در نهایت به گراف کامل برسیم. آنان نشان دادند به احتمال نزدیک به ۱ برای n های بزرگ، در تمام طول این فرآیند رابطه فوق برقرار است. در همین مقاله آنان قضایایی در مورد arboricity گراف‌های تصادفی نیز ثابت کردند.

شکل ۶: Aravind Srinivasan

Aravind Srinivasan از دانشگاه Maryland در مورد جنبه‌های الگوریتمی Lovasz Local Lemma صحبت کرد. این لم که در روش‌های احتمالاتی بسیار کاربرد دارد از قرار زیر است: فرض کنیم یک فضای احتمال و خانواده‌ای از پیشامدهای "بد" داریم. هم‌چنین فرض کنید احتمال رخ دادن هر یک از پیشامدها حداکثر p است و به علاوه هر کدام از این پیشامدها به حداکثر d پیشامد دیگر وابسته است. اگر $ep(d+۱) < ۱$ آن‌گاه احتمال این که هیچ یک از پیشامدهای بد اتفاق نیفتد مثبت است. این صورت‌بندی که دقیق نیست (وابستگی بین پیشامدها باید تعریف شود)، حالت خاص ولی پرکاربردی از این لم است. برای تعریف دقیق‌تر و حالت کلی لم فصل پنجم کتاب The Probabilistic Method نوشته Alon و Spencer را ببینید. توجه کنید که این لم تنها می‌گوید نقطه‌ای در فضای نمونه وجود دارد که خارج از پیشامدهای بد است، ولی در مورد نحوه پیدا کردن آن نقطه حرفی نمی‌زند. این لم در سال ۱۹۷۵ توسط Erdos و Lovasz ثابت شد[۱۳] و در سال ۲۰۱۰ نخستین بار الگوریتم سریعی

[۱۳] Erdos and Lovasz, Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions (1975), In Infinite and Finite Sets, volume II, pages 609—627, North-Holland, 1975.

توسط Moser و Tardos ارائه شد[۱۴] که تحت شرایطی این نقطه را پیدا می‌کرد. بسیاری از اثبات‌های وجودی که از این لم استفاده می‌کردند به کمک این الگوریتم تبدیل به اثبات‌های ساختنی (در زمان چندجمله‌ای) شدند. پس از آن تلاش شد که برای سایر قضایایی که در اثباتشان از این لم استفاده می‌شد ولی در چهارچوب شرایط این الگوریتم جا نمی‌گرفتند نیز اثبات‌هایی الگوریتمی پیدا شود[۱۵] و بعضاً الگوریتم‌هایی پیدا شدند که به کمک آن‌ها می‌شد حکم‌هایی را ثابت کرد که از حکم‌هایی که به صورت وجودی اثبات می‌شدند قوی‌تر بودند. سخنران چند نمونه از این دست ارائه کرد، که در دو مقاله اخیر خود[۱۶] به آن‌ها پرداخته است.



شکل ۷: Abbas Mehrabian

من در مورد نتایجی که اخیراً در مورد قطر دو مدل از گراف‌های تصادفی اثبات کرده‌ام صحبت کردم. در سال ۲۰۰۶ قضیه‌ای ثابت شد[۱۷] که روشی با استفاده از قضیه کرامر (در مورد large deviations) برای محاسبه ارتفاع دامنه وسیعی از درخت‌های تصادفی ارائه می‌دهد. ما از تکنیک مطرح شده استفاده کردیم تا قطر دو مدل از گراف‌های تصادفی را تخمین بزنیم. نتایجی که در زیر می‌آید احتمال وقوعشان به ۱ میل می‌کند وقتی تعداد رئوس به بی‌نهایت میل کند. اولین مدل، شبکه تصادفی آپولونیوسی[۱۸] نام دارد. یک مثلث‌بندی مسطح تصادفی را به طریق زیر می‌سازیم. از یک مثلث روی صفحه شروع می‌کنیم. در هر گام یکی از وجه‌های کران‌دار را به تصادف (و به صورت یکنواخت از بین تمام وجه‌های کران‌دار) انتخاب کرده، رأسی درون آن اضافه می‌کنیم و آن را به سه رأس وجه انتخاب شده وصل می‌کنیم. بعد از $n - ۳$ بار انجام این کار یک گراف مسطح مثلث‌بندی‌شده حاصل می‌شود. این مدل سال ۲۰۰۵ مطرح شده است[۱۹] و علاوه بر مسطح بودن، دارای برخی از خواص شبکه‌های واقعی مثل دنباله درجات توانی[۲۰] است. با همکاری چند نفر دیگر نشان دادیم[۲۱] که نسبت قطر این گراف به $\ln(n)$ در احتمال به c میل می‌کند، که $c \approx ۱٫۶۶۸$ پاسخ یک معادله داده‌شده است. مدل دوم درخت وبگرد تصادفی[۲۲] نام دارد و یک درخت تصادفی تولید می‌کند. فرض کنیم $p \in [۰, ۱)$. یک گراف جهت‌دار تصادفی می‌سازیم که در آن هر رأس دقیقاً یک یال خروجی دارد. فرض کنیم $X_۱, X_۲, \ldots$ متغیرهای تصادفی با پارامتر p باشند. از تک رأس $v_۰$ که یک لوپ جهت‌دار دارد شروع می‌کنیم. درگام $i > ۰$ رأس v_i را اضافه می‌کنیم، یک رأس تصادفی از گراف فعلی انتخاب می‌کنیم مثل u، و روی تنها مسیری که در گراف از u شروع می‌شود و طولش X_i است حرکت می‌کنیم. فرض کنیم رأس پایانی این مسیر w باشد. در این صورت یالی از v_i به w می‌کشیم. وقتی تعداد رئوس به n رسید، جهت یال‌ها ولوپ رأس اول را حذف می‌کنیم و یک درخت n رأسی به دست می‌آید. مدل اصلی که در سال ۲۰۰۶ برای مدل‌سازی گراف وب مطرح شد[۲۳]، دارای یک پارامتر دیگر به نام d هم بود. در حقیقت آن مدل درخت تولید نمی‌کرد بلکه یک گراف تولید می‌کرد، تنها تفاوتش با مدلی که گفته شد این بود که هر رأس جدید که اضافه می‌شد مستقلاً به d رأس قدیمی یال ایجاد می‌کرد بنابراین درجه خروجی همه رئوس (به جز اولین رأس) برابر d بود. ایده این مدل چنین بود: فرض کنیم شما یک صفحه وب جدید ایجاد کرده‌اید و می‌خواهید به d صفحه وب دیگر لینک بدهید. ابتدا به یک صفحه تصادفی می‌روید. به احتمال p این صفحه برایتان جالب است و به آن لینک می‌دهید، و به احتمال $1 - p$ برایتان جالب نیست، که در این صورت روی یک لینک تصادفی از آن کلیک می‌کنید و به یک صفحه دیگر می‌روید. به احتمال p صفحه جدید برایتان جالب است و به آن لینک می‌دهید، و به احتمال $1 - p$ برایتان جالب نیست که در این صورت روی یک لینک تصادفی از آن کلیک می‌کنید، و همین کار

[۱۴] Moser and Tardos, A constructive proof of the general lovasz local lemma (2010), Journal of the ACM, http://arxiv.org/abs/0903.0544.

[۱۵] See, e.g., Haeupler, Saha, and Srinivasan, New constructive aspects of the Lovasz Local Lemma (FOCS 2010), http://arxiv.org/abs/1001.1231

[۱۶] Harris and Srinivasan, Constraint Satisfaction, Packet Routing, and the Lovasz Local Lemma (STOC 2013), http://www.cs.umd.edu/~srin/PDF/2013/assign-lll.pdf; Harris and Srinivasan, The Moser-Tardos Framework with Partial Resampling (FOCS 2013).

[۱۷] Broutin and Devroye, Large deviations for the weighted height of an extended class of trees (2006), Algorithmica, http://www.cs.mcgill.ca/~nbrout/pub/weighted_height.pdf.

[۱۸] Random Apollonian Network

[۱۹] Zhou, Yan, and Wang, Maximal planar networks with large clustering coefficient and power-law degree distribution (2005), Physical Review E, http://arxiv.org/abs/cond-mat/0412448.

[۲۰] Power-law degree sequence

[۲۱] Ebrahimzadeh, Farczadi, Gao, Mehrabian, Sato, Wormald, and Zung, On the Longest Paths and the Diameter in Random Apollonian Networks, http://arxiv.org/abs/1303.5213.

[۲۲] Random surfer tree model

[۲۳] Blum, Chan, and Rwebangira, A Random-Surfer Web-Graph Model (ANALCO 2006), http://repository.cmu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1138&context=compsci.

را ادامه دهید تا بالاخره صفحه‌ای پیدا شود که برایتان جالب است و یا به صفحه‌ای برسید که خروجی ندارد. این کار را $d-1$ بار دیگر مستقلاً انجام می‌دهید تا d لینک مورد نظر صفحه وب جدید خود را بسازید. ما حالت خاص $d=1$ را بررسی کردیم و نشان دادیم[۲۴] وقتی تعداد رئوس به n برسد، اگر $p \geq 21\%$ آن‌گاه ارتفاع درخت تقسیم بر $\ln(n)$ در احتمال به c میل می‌کند که تابعی داده شده بر حسب p است، و اگر $p < 21\%$ آن‌گاه ارتفاع درخت حاصل بین $c_1 \ln(n)$ و $c_2 \ln(n)$ است که c_1 و c_2 توابعی داده شده بر حسب p هستند.

شکل ۸: Noga Alon

Noga Alon درباره عدد پوشش ماتریس‌ها[۲۵] صحبت کرد. این یک پارامتر جدید است که کاربردهای جالبی در طراحی الگوریتم‌های تقریبی دارد. مجموعه همه بردارهای نامنفی nتایی که مجموع درایه‌هایشان ۱ است را با Δ_n نشان دهید. به عبارت دیگر، Δ_n مجموعه همه‌ی توزیع‌های احتمال روی یک مجموعه n عضوی است. فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ باشد و مسئله ماکسیمم‌سازی عبارت $p^T Aq$ را در نظر بگیرید به شرط $q \in \Delta_n$، $p \in \Delta_m$ و تعدادی شرایط خطی[۲۶] دیگر روی p و q. در اینجا A ثابت است و p و q متغیرهای ما هستند. یک مسئله خیلی مهم که در این دسته قرار می‌گیرد، مسأله پیدا کردن یک mixed Nash equilibrium برای یک بازی دونفره است.

مجموعه S را به صورت $S = \{Aq : q \in \Delta_n\}$ تعریف کنید، یعنی مجموعه همه ترکیب‌های محدب ستون‌های ماتریس A. منظور از یک ϵ-net برای A یک مجموعه T است به طوری که برای هر $x \in S$، لااقل یک $y \in T$ پیدا شود به طوری که $||x-y||_\infty \leq \epsilon$ باشد. اندازه‌ی کوچکترین ϵ-net برای A را عدد پوشش A می‌نامیم و با $N(\epsilon, A)$ نشان می‌دهیم. حال برای این که مسئله ماکسیمم‌سازی عبارت $p^T Aq$ به شرط $q \in \Delta_n$، $p \in \Delta_m$ و تعدادی شرایط خطی روی p و q را به صورت تقریبی (با دقت ϵ) حل کنیم، می‌آییم و

[۲۴] Mehrabian and Wormald, The height and diameter of the random surfer tree model, preprint (2013).

[۲۵] Cover number of matrices

[۲۶] Linear constraints

مساله ماکسیمم‌سازی عبارت $p^T y$ به شرط $q \in \Delta_n$، $p \in \Delta_m$، $||Aq - y||_\infty \leq \epsilon$ و همان شرایط خطی روی p و q را حل می‌کنیم، و این کار را به ازای همه‌ی yهایی که در ϵ-net هستند انجام می‌دهیم، و ماکسیمم می‌گیریم. متغیرها هم‌چنان p و q هستند ولی مسئله‌های جدید همگی برنامه‌ریزی خطی[۲۷] هستند و قابل حل در زمان چندجمله‌ای. دیدن این موضوع سخت نیست که جوابی که به دست می‌آید حداکثر به اندازه ϵ با جواب مسئله اصلی اختلاف دارد. زمان اجرای این الگوریتم به عدد پوشش ماتریس A ارتباط دارد.

برای نرمال‌سازی فرض کنیم همه درآیه‌های ماتریس A بین -1 و 1 باشند و رتبه ماتریس A را با $rank(A)$ نشان می‌دهیم. به کمک یک برهان حجمی می‌توان نشان داد که

$$N(\epsilon, A) \leq (1 + \frac{2}{\epsilon})^{rank(A)}$$

در سال ۲۰۱۳ الگوریتمی تصادفی ارائه شد[۲۸] که یک ϵ-net با $(\frac{1}{\epsilon})^{O(rank(A))} poly(m)$ نقطه را می‌سازد. به کمک لم Johnson-Lindenstrauss برای کاهش بُعد بدون تغییر زیاد در فواصل می‌توان نشان داد که اگر A ماتریسی مثبت نیمه‌معین[۲۹] باشد آن‌گاه $N(\epsilon, A) \leq (\frac{1}{\epsilon})^{O(\log n/\epsilon^2)}$. اخیراً Alon، Lee و Shraibman نشان دادند برای هر ماتریس m در n داریم $N(\epsilon, A) \leq n^{O(\log m/\epsilon^2)}$.

برمی‌گردیم به مسئله پیدا کردن یک mixed Nash equilibrium برای یک بازی دونفره. در سال ۲۰۰۶ ثابت شد که این مسئله PPAD-complete است[۳۰] ولی سختی مسأله پیدا کردن یک ϵ-approximate Nash equilibrium باز است. به صورت غیردقیق، منظور ارائه دو استراتژی تصادفی برای دو بازیکن است که هر کدام از آن‌ها با تغییر استراتژی خود بیش از ϵ نتوانند سود کنند. اگر ماتریس‌های سود دو بازیکن را با A و B نشان دهیم، با کمک ایده‌هایی که بالا ذکر شد می‌توان نشان داد که در حالت‌هایی که $A+B$ دارای رتبه کرانداری باشد یا مثبت نیمه‌معین باشد می‌توان یک ϵ-approximate Nash equilibrium را در زمان چندجمله‌ای یافت. برای اطلاعات بیشتر مقاله Alon، Lee، Shraibman و Vempala را ببینید.

مطلب آخر درباره یک سخنرانی است که در کنفرانس RSA انجام نشد بلکه در ورکشاپی تحت عنوان Flexible Network Design در موسسه FIELDS شهر تورنتو برگزار شد.[۳۱] Lap Chi Lau

[۲۷] Linear programming

[۲۸] Alon, Lee, Shraibman and Vempala, The approximate rank of a matrix and its algorithmic applications (STOC 2013), http://www.tau.ac.il/~nogaa/PDFS/epsrankstoc3.pdf

[۲۹] positive semi-definite

[۳۰] Chen and Deng, Settling the complexity of two-player Nash equilibrium (FOCS 2006).

[۳۱] http://www.fields.utoronto.ca/programs/scientific/13-

شکل ۹: Lap Chi Lau

از دانشگاه هنگ‌کنگ درباره تعمیمی از حالت گسسته نامساوی Cheeger صحبت کرد. فرض کنیم G گرافی d–منظم باشد (اگرچه نتایج قابل تعمیم به گراف‌های وزن‌دار غیرمنظم نیز هستند، این فرض برای ساده شدن فرمول‌ها صورت می‌گیرد). رسانایی[۳۲] زیرمجموعه S از رئوس را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\phi(S) := \frac{|E(S, S^c)|}{d|S|}$$

که در آن S^c مکمل S را نشان می‌دهد و $E(S, S^c)$ مجموعه یال‌هایی است که یک سرشان در S و سر دیگرشان خارج از S است. هم‌چنین رسانایی گراف G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\phi(G) := \min\{\phi(S) : S \subset V(G), |S| \leq n/2\}$$

مسئله پیدا کردن یک زیرمجموعه با رسانایی کم یک مسئله الگوریتمی است که در بسیاری از زمینه‌های علوم کامپیوتر به صورت طبیعی ظاهر می‌شود. رابطه جالبی بین این پارامتر و خواص جبری گراف وجود دارد. فرض کنید A ماتریس مجاورت گراف G باشد که یک ماتریس $n \times n$ است که تعداد رئوس G را نشان می‌دهد. ماتریس L را به صورت $L := I_n - \frac{1}{d}A$ تعریف می‌کنیم. مقدار ویژه‌های این ماتریس را می‌توان به صورت

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq 2$$

نوشت. می‌توان دید که رسانایی گراف صفر است اگر و تنها اگر گراف ناهمبند باشد اگر و تنها اگر λ_2 صفر باشد. نامساوی Cheeger برای گراف‌ها چنین است[۳۳]:

$$\frac{\lambda_2}{2} \leq \phi(G) \leq \sqrt{2\lambda_2}$$

در سال ۲۰۱۲ تعمیمی از این نامساوی به مقدارویژه‌های بزرگ‌تر ارائه شد. تعریف کنید

$$\phi_k(G) := \min\{\max\{\phi(S_i) : i = 1, \ldots, k\} : S_1, S_2, \ldots, S_k \text{ partition } V(G)\}$$

در این صورت داریم[۳۴]:

$$\frac{\lambda_k}{2} \leq \phi_k(G) \leq O(k^4\sqrt{\lambda_k})$$

دقت کنید که $\phi(G) = \phi_2(G)$. سخنران و دیگران ثابت کردند[۳۵]:

$$\phi(G) \leq O(k)\frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_k}}$$

و الگوریتمی برای افراز کردن گراف به دو قسمت با رسانایی $O(k)\frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_k}}$ ارائه کردند.

14/netdesign/

[۳۲] conductance

[۳۳] For a proof, see Section 4.5 of Hoory, Linial, Widgerson, Expander Graphs and Their Applications (2006), Bulletin of the American Mathematical Society, http://www.ams.org/journals/bull/2006-43-04/S0273-0979-06-01126-8/S0273-0979-06-01126-8.pdf

[۳۴] Lee, Oveis Gharan, Trevisan, Multi-way spectral partitioning and higher-order Cheeger inequalities (STOC 2012), http://arxiv.org/abs/1111.1055

[۳۵] Kwok, Lau, Lee, Oveis Gharan, Trevisan, Improved Cheeger's inequality: analysis of spectral partitioning algorithms through higher order spectral graph (STOC 2013), http://arxiv.org/abs/1301.5584