آنالیز روی خمینه‌ها (قسمت اول)

احمدرضا حاج سعیدی صادق

چکیده

عملگرهای فردهلم[۱]، به‌دلیل ارتباطی که میان آنالیز، توپولوژی و جبر ایجاد می کنند، زمینه مطالعاتی گسترده هستند. همچنین این عملگرها در مطالعه معادلات انتگرالی[۲] و معادلات دیفرانسیل نیز به نحوی ظهور پیدا می‌کنند.اما عمیق‌ترین و جذاب‌ترین ویژگی این عملگرها، اندیس[۳] این عملگرهاست. همان طور که ثابت خواهیم کرد، اندیس عملگرها به طور موضعی ثابت‌اند و این خود، ما را به سمت مطالعه توپولوژی فضای عملگرهای فردهلم سوق می‌دهد. خواهیم دید که فضای عملگرهای فردهلم، برحسب اندیس به مولفه‌های همبندی مسیری افراز می‌شود و هر دو عملگر با اندیس یکسان، در یک مولفه قرار می‌گیرند. در این مقاله صرفا به معرفی عملگرهای فردهلم و مقدماتی از آنالیز تابعی می‌پردازیم. در مقالات بعدی به کاربردهای این عملگرها در شاخه‌های دیگر می‌پردازیم.

در اینجا ما با فضای هیلبرت مختلط جدایی پذیر H سر و کار داریم؛ دلیل این فرض، وجود یک دنباله یکامتعامد کامل[۴](پایه شادر[۵]) است که همانند پایه برای فضاهای برداری متناهی‌البعد عمل می‌کنند. ازخواننده انتظار می‌رود با مفاهیم ابتدایی آنالیز تابعی در حد تعریف آشنا باشد تا در مطالعه این مطالب با ابهام روبرو نشود.

تعریف ۱. *عملگر $F \in B(H)$ ($B(H)$ فضای عملگرهای کراندار است) را عملگر فردهلم می‌نامیم اگر $Ker(F)$ و $Coker(F) = H/Im(F)$ هر دو متناهی‌البعد باشند. در این صورت اندیس این عملگر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$Index(F) := dim(Ker(F)) - dim(Coker(F))$$

دقت کنیم که اگر H متناهی‌البعد باشد، آنگاه هر عملگری فردهلم با اندیس صفر است؛ این امر از رابطه $H/Ker(F) = Im(F)$ نتیجه می‌شود.

مثال ۲. *فرض کنید $e_1, e_2, \cdots$ یک دنباله یکامتعامد کامل(پایه شادر) برای H باشد. در این صورت عملگر های*

$$shift^{+} : H \to H$$

$$e_i \mapsto e_{i+1}$$

و

$$shift^{-} : H \to H$$

$$e_i \mapsto e_{i-1}$$

هر دو این عملگرها فردهلم هستند. همچنین هر توانی از این دو عملگرها نیز فردهلم هستند و

$$Index((shift^{+})^n) = -n, Index((shift^{-})^n) = n$$

منظور ما از f^n ، $f \circ f \circ \cdots \circ f$ است.

قضیه ۳. *تصویر عملگر فردهلم $F : H \to H$ زیرفضایی بسته از H است.*

اثبات. فرض کنیم $v_1 + Im(F), v_2 + Im(F), \cdots, v_m + Im(F)$ تشکیل یک پایه برای $Coker(F)$ بدهند. در این صورت نگاشت

$$F' : H \oplus span\{v_1, \cdots, v_m\} \to H$$

$$(u, v) \to F(u) + v$$

عملگری کراندار و پوشاست. پس بنابر قضیه نگاشت باز[۶]، این عملگر باز است. از آنجا که $H \oplus span\{v_1, \cdots, v_m\} \setminus H \oplus \{0\}$ در $H \oplus span\{v_1, \cdots, v_m\}$ باز است،تصویر آن تحت نگاشت F' یعنی $H \setminus Im(F)$ باز است و لذا $Im(F)$ بسته است. □

تعریف ۴. *برای هر عملگر کراندار $T \in B(H, H')$ عملگر الحاقی[۷] یکتا $T^* \in B(H', H)$ موجود است که برای هر $x \in H, y \in H'$*

---

[۴] Complete Orthogonal Sequence
[۵] Schauder basis
[۶] Open Mapping Principle
[۷] Adjoint Operator

$$< T(x), y >=< x, T^*(y) >$$

همچنین برای هر دو عملگر کراندار T و S رابطه‌های زیر را داریم:

$$(TS)^* = S^*T^* \text{ ،} (aT+bS)^* = \bar{a}T^* + \bar{b}S^* \text{ ،} T^{**} = T \text{ ،}$$
$$||T^*T|| = ||T^*||||T|| = ||T||^{2}$$

از آنجا که خواص عملگر الحاقی در تعریف گنجانده شده است، اثبات وجود و خواص را به خواننده واگذار می‌کنیم. از این پس فضای عملگرهای فردهلم روی فضای هیلبرت H را با $\mathcal{F}$ نمایش می‌دهیم. همچنین $\mathcal{F}$ را همراه با توپولوژی القایی از نرم عملگری روی $B(H)$، در نظر می‌گیریم.

مثال ۵. *برای عملگرهای معرفی شده در مثال اول داریم:* $shift^{+^*} = shift^-$

قضیه ۶. *برای $F \in B(H)$ اگر $Im(F)$ زیرفضایی بسته از H باشد(مثلا اگر $F \in \mathcal{F}$) روابط زیر برقرار است:*

$$Coker(F) \simeq Ker(F^*) \text{ و } Im(F) = Ker(F^*)^{\perp}$$

اثبات. برای هر $F(v) \in Im(F)$ و $w \in Ker(F^*)$ داریم

$$< F(v), w >=< v, F^*(w) >= ۰$$

پس

$$F(v) \in Ker(F^*)^{\perp}$$

بنابراین $Im(F) \subseteq Ker(F^*)^{\perp}$ به طرز مشابه اگر $u \in Im(F)^{\perp}$ و $u' \in H$ پس

$$۰ =< u, F(u') >=< F^*(u), u' >$$

در نتیجه $u \in Ker(F^*)$ به عبارتی $Im(F)^{\perp} \subseteq Ker(F^*)$ یا معادلا $Ker(F^*)^{\perp} \subseteq Im(F)^{\perp\perp} = Im(F)$ پس

$$Im(F) = Ker(F^*)^{\perp}$$

در اینجا از این نکته بهره گرفتیم که برای هر زیر فضای خطی بسته مثل A رابطه $A^{\perp\perp} = A$ برقرار است. برای دیدن حکم دوم، از بسته بودن $Im(F)$ می توان H را به صورت جمع مستقیم $Im(F)$ و مکمل متعامدش نوشت. پس $Coker(F) = H/Im(F)$ یکریخت است با $Im(F)^{\perp} = Ker(F^*)$. □

در اینجا لمی سودمند را بیان می‌کنیم ولی از اثبات آن به دلیل دور بودن از فضای کلی مطلب، چشم پوشی می‌کنیم؛ البته اثبات آن تمرینی مناسب برای خواننده است.

لم ۷. *فرض کنیم $H_۱, H_۲, \cdots$ دنباله ای از فضاهای هیلبرت جدایی پذیر باشند. اکنون اگر دنباله*

$$H_۱ \xrightarrow{T_۱} H_۲ \xrightarrow{T_۲} H_۳ \xrightarrow{T_۳} \cdots$$

از عملگرهای کراندار، دقیق باشد؛ آنگاه دنباله

$$H_۱ \xleftarrow{T_۱^*} H_۲ \xleftarrow{T_۲^*} H_۳ \xleftarrow{T_۳^*} \cdots$$

نیز دقیق است.

اکنون می‌توان نتیجه گرفت: اگر $F \in \mathcal{F}$ آنگاه $F^* \in \mathcal{F}$. می‌توان دنباله دقیق زیر را در نظر گرفت:

$$۰ \longrightarrow Ker(F) \xrightarrow{i} H \xrightarrow{F} H \xrightarrow{p} Coker(F) \longrightarrow ۰$$

که i و p نگاشت شمول و خارج قسمتی هستند. در این صورت طبق لم اخیر، دنباله زیر نیز دقیق است:

$$۰ \longrightarrow Coker(F) \xrightarrow{p^*} H \xrightarrow{F^*} H \xrightarrow{i^*} Ker(F) \longrightarrow ۰$$

پس خواهیم داشت:

$$dimKer(F^*) = dimCoker(F) \text{ و}$$
$$dimCoker(F^*) = dimKer(F)$$

در نتیجه F^* فردهلم است و بعلاوه

$$Index(F^*) = dimKer(F^*) - dimCoker(F^*) =$$
$$dimCoker(F) - dimKer(F) = -Index(F)$$

قضیه ۸. *برای یک عملگر کراندار $F : H \to H$ که $Im(F)$ زیرفضایی بسته از H باشد (مثلا وقتی که F فردهلم است) روابط $Ker(F^*F) = Ker(F)$ و $Im(F^*F) = Im(F^*)$ برقرارند.*

اثبات. برای تساوی $Ker(F^*F) = KerF$، شمول $Ker(F^*F) \supseteq KerF$ واضح است. فرض کنیم $v \in Ker(F^*F)$ پس: $۰ =< v, F^*F(v) >=< F(v), F(v) >$ که نتیجه می‌دهد $v \in Ker(F)$ پس $Ker(F^*F) \subseteq KerF$ و تساوی اول ثابت شد. دقت کنیم که در اثبات این تساوی از بسته بودن $Im(F)$ استفاده نکردیم. برای رابطه دوم، $Im(F^*F) \subseteq Im(F^*)$ واضح است. فرض کنیم $v = F^*(u) \in Im(F^*)$ بنابر قضیه ۶ می‌توان نوشت $u = u_۱ + u_۲$ به طوری که $u_۱ = F(w) \in Im(F) = Ker(F^*)^{\perp}$ و $u_۲ \in Ker(F^*)$ پس داریم $v = F^*(u_۱ + u_۲) = F^*F(w) \in Im(F^*F)$ بنابراین شمول $Im(F^*F) \supseteq Im(F^*)$ نیز برقرار است و اثبات تمام است. □

تعریف ۹. عملگر $F \in B(H)$ *را از رتبه متناهی*[8] *می نامیم اگر* $dim(Im(F)) < \infty$.

قضیه ۱۰. *اگر عملگر* $F \in B(H)$ *از رتبه متناهی باشد،* F^* *نیز از رتبه متناهی است.*

اثبات. فرض کنیم e_1، $\cdots$ و e_n یک پایه یکامتعامد برای $Ker(F)^\perp$ باشد و برای $1 \leq i \leq n$ قرار می دهیم $f_i = F(e_i)$. پس

$$F(z) = \sum_{i=1}^{n} f_i < z, e_i >$$

اکنون به راحتی می‌توان دید که $F^*(z) = \sum_{i=1}^{n} e_i < z, f_i >$. □

عملگرهای از رتبه متناهی، شاید به طور مستقیم در نتایج اصلی این مقاله ظاهر نشوند. اما این عملگرها ما را به معرفی عملگرهایی که به آن ها فشرده[9] می گوییم، بسیار نزدیک می کنند! به عبارتی دیگر فضای عملگرهای فشرده بستار فضای عملگرهای از رتبه متناهی است.

قضیه ۱۱. *اگر* $K \in B(H)$ *عملگری از رتبه متناهی باشد، آن گاه* $I + K$ *عملگری فردهلم است و اندیس آن صفر است.* (I *نگاشت همانی* H *است.*)

قبل از اثبات این قضیه، قضیه ای معروف به نام "لم مار"[10] را بیان می کنیم؛ البته به اثبات آن به دلیل طولانی بودن، نمی‌پردازیم:

قضیه ۱۲. *فرض کنید* A، B، $\cdots$ *و* C' *فضاهایی برداری روی یک میدان باشند و* F، F' *و* F'' *توابعی خطی باشند به طوری که نمودار زیر جابجایی باشد و دنباله های افقی دقیق باشند:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d, "F"] & B' \arrow[r] \arrow[d, "F'"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "F''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

لم مار

در این صورت دنباله دقیق زیر وجود دارد:

$$0 \longrightarrow Ker(F) \longrightarrow Ker(F') \longrightarrow Ker(F'') \xrightarrow{\delta}$$
$$Coker(F) \longrightarrow Coker(F') \longrightarrow Coker(F'') \longrightarrow 0$$

اثبات. **(قضیه ۱۱):** در نمودار فوق فرض کنیم

$A = A' = Im(K)$، $B = B' = H$ و $C = C' = H/Im(K)$ و همچنین فرض کنیم $F = (I + K) \mid Im(K)$، $F' = I + K$ و عملگر F'' عملر القایی $I + K$ روی $H/Im(K)$ باشد؛ البته دقت کنیم که این سه عملگر، خوش تعریف می‌باشند. عملگرهای سطری، در هر دو سطر از چپ به راست، عملگرهای شمول و خارج قسمتی است. در این صورت این نمودار حاصل جابجایی است؛ اما F روی فضایی متناهی البعد تعریف شده است پس اندیس آن صفر است، همچنین F'' همان عملگر همانی $H/Im(K)$ است. پس فردهلم است و اندیس صفر دارد؛ همچنین $Ker(F'') = 0$ و $Coker(F'') = 0$ پس بنا بر لم مار و دنباله دقیق متناظر و نوشتن رابطه دنباله بعدهای آن(جمع متناوب بعد فضاها در دنباله‌ی دقیقی که لم مار بدست می‌دهد صفر است.) می‌توان نتیجه گرفت که $Ker(F')$ و $Coker(F')$ متناهی البعدند و

$$Index(I + K) = Index(F) + Index(F'') = 0$$

□

تعریف ۱۳. عملگر $K \in B(H)$ *را فشرده می‌نامیم اگر تصویر گوی باز واحد (یا هر زیر مجموعه کراندار) تحت این عملگر بستار فشرده داشته باشد. به طور معادل یک عملگر فشرده است اگر تصویر هر دنباله کراندار تحت آن، یک زیر دنباله همگرا داشته باشد. فضای عملگرهای فشرده را با* $\mathcal{K}$ *نمایش می‌دهیم.*

با فرض نامتناهی البعد بودن H، نتیجه فوری ای که می‌توان گرفت این است که $\mathcal{K}$ ایده آلی دوطرفه، نابدیهی و سره از $B(H)$ است. البته باید ساختار جبری که از جمع و ترکیب عملگرها، به وجود می‌آید را در نظر بگیریم. اول از همه دقت کنیم که $\mathcal{K}$ شامل تمام عملگرهای از رتبه متناهی است ولی عملگر همانی را دارا نیست (چون گوی واحد در فضای نامتناهی البعد، فشرده نیست). به وضوح برای هر $T \in B(H)$ و $K \in \mathcal{K}$ عملگرهای $K \circ T$ و $T \circ K$ فشرده اند. اگر K و K' دو عملگر فشرده باشند به سادگی از تعریف دوم عملگر فشرده، فشردگی $K + K'$ نتیجه می‌شود.

قضیه ۱۴. $\mathcal{K}$ *بستار فضای عملگرهای از رتبه متناهی است.*

اثبات. فرض کنیم عملگر کراندار K در بستار $\mathcal{K}$ واقع باشد. فرض کنیم $\epsilon > 0$ دلخواه باشد. $K' \in \mathcal{K}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $||K - K'|| < \epsilon/3$. فرض کنیم D گوی بسته واحد باشد. از فشردگی K' می‌توان متناهی گوی به شعاع $\epsilon/3$ به مرکزهای $K'(u_1)$، $\cdots$ و $K'(u_m)$ ($u_i \in D$ برای $1 \leq i \leq m$) یافت که پوششی برای $K'(D)$ باشد. اکنون برای هر $u \in D$ می‌توان $u_i \in \{u_1, \cdots, u_m\}$ یافت به طوری که $| K'u - K'u_i | < \epsilon/3$. پس

[8] Finite Rank Operator
[9] Compact Operator
[10] Snake Lemma

$$| Ku - Ku_i | < | Ku - K'u | + | K'u - K'u_i | + | K'u_i - Ku_i | < ||K - K'|| + \epsilon/3 + ||K - K'|| < \epsilon$$

پس می توان $K(D)$ را با گوی‌های به شعاع ϵ حول $K(u_1)$، $\cdots$ و $K(u_m)$ پوشاند و در نتیجه K هم فشرده است.

اکنون نشان می‌دهیم هر عملگر فشرده، حد دنباله ای از عملگرهای از رتبه متناهی است. فرض کنیم $K \in \mathcal{K}$. فرض کنیم e_1، e_2، $\cdots$ یک پایه یکامتعامد برای فضای هیلبرت H باشد. فرض کنیم $P_n : H \to span\{e_1, \cdots, e_n\}$ عملگر تصویر متعامد باشد. نشان می‌دهیم که دنباله $\{P_n(K)\}_{n=1}^{\infty}$ از عملگرهای از رتبه متناهی به K میل می‌کند. از فشردگی K، می توان $K(D)$ را با متناهی گوی به شعاع، ϵ به مرکزهای $K(u_1)$، $\cdots$ و $K(u_m)$ پوشاند. از آن جا که $\{P_n(K)\}_{n=1}^{\infty}$ نقطه به نقطه به K میل می‌کنند، می‌توان برای n به اندازه کافی بزرگ و برای $1 \le i \le m$ فرض کرد $| P_n(K)(u_i) - K(u_i) | < \epsilon$. دقت کنیم که $||P_n|| = 1$؛ برای هر $u \in D$ می‌توان u_i ای یافت که $| K(u) - K(u_i) | < \epsilon$ بنابراین داریم

$$| K(u) - P_n(K)(u) | \le | K(u) - K(u_i) | + | K(u_i) - P_n(K)(u_i) | + | P_n(K)(u_i) - P_n(K)(u) | < \epsilon + \epsilon + | K(u_i) - K(u) | < 3\epsilon$$

و اثبات اکنون کامل است. □

قضیه ۱۵. *$\mathcal{K}$ تحت الحاق بسته است.*

اثبات. فرض کنیم $K \in \mathcal{K}$ پس دنباله‌ای از عملگرهای از رتبه متناهی مثل $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ موجود است که به K میل می‌کند. مطابق قضیه ۱۰، $\{T_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ نیز دنباله ای از عملگرهای از رتبه متناهی است. بنابراین

$$||T_n^* - K^*|| = ||(T_n - K)^*|| = ||T_n - K|| \to 0$$

پس قضیه قبل نتیجه می‌دهد $K^* \in \mathcal{K}$. □

لم ۱۶. *اگر K عملگری فشرده باشد، آنگاه $I + K$ عملگری فردهلم با اندیس صفر است.*

اثبات. بنابر قضیه ۱۴ می‌توان عملگری از رتبه متناهی مثل F یافت که $||K - F|| < 1$ بنابر قضیه‌ای مقدماتی در آنالیز تابعی $Q = I - (F - K)$ وارون‌پذیر است. پس داریم:

$$I + K = Q(Q^{-1} + Q^{-1}K) = Q(Q^{-1} + Q^{-1}Q - Q^{-1} + Q^{-1}F) = Q(I + Q^{-1}F)$$

یک عملگر وارون‌پذیر با ترکیب شدن با یک عملگر کراندار، بعد Ker و $Coker$ آن را تغییر نمی‌دهد. اما $I + (I - (F - K))^{-1}F$ مطابق قضیه ۱۱ فردهلم و با اندیس صفر است. از طرفی هم $Q = I - (F - K)$ وارون‌پذیر است، پس $I + K$ فردهلم با اندیس صفر است. □

همچون لم قبل، در بقیه قضایا هم از حکم زیر بهره می‌گیریم: اگر برای عملگر کراندار Q داشته باشیم $||Q|| < 1$ آنگاه عملگر $I + Q$ وارون‌پذیر است؛ در واقع وارون آن $\sum_{n=0}^{\infty}(-Q)^n$ است.

از این پس قرار می‌دهیم $\mathcal{B} = B(H)$ و فرض می‌کنیم H نامتناهی البعد است. فضای $\mathcal{B}/\mathcal{K}$ و نگاشت خارج قسمتی $\pi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}/\mathcal{K}$ را در نظر می‌گیریم. روی این فضا، نرم

$$||\pi(T)|| = inf\{||T - K|| \mid K \in \mathcal{K}\}$$

را می‌گذاریم. از بسته بودن $\mathcal{K}$ خوش‌تعریفی نرم، به دست می‌آید. اول از همه داریم $||\pi(I)|| \le ||I|| = 1$. ازطرفی برای عملگر فشرده K، $||I + K|| \ge 1$ زیرا در غیر این صورت $K = I - (I - K)$ وارون‌پذیر است و نمی‌تواند فشرده باشد. اگر K_1 و K_2 فشرده باشند و T_1 و T_2 دو عملگر کراندار باشند، $K_1 \circ T_2 + T_1 \circ K_2 - K_1 \circ K_2$ نیز فشرده است. پس

$$inf||T_1T_2 - K|| \le ||T_1T_2 - (K_1 \circ T_2 + T_1 \circ K_2 - K_1 \circ K_2)|| = ||(T_1 - K_1)(T_2 - K_2)||$$

که اینفیموم روی تمام Kهای فشرده است. در نتیجه

$$inf||T_1T_2 - K|| \le inf||(T_1 - K_1)||.||(T_2 - K_2)||$$

که اینفیموم دومی روی تمام K_1 و K_2 های فشرده گرفته شده است. پس $||\pi(T_1)\pi(T_2)|| \le ||\pi(T_1)||||\pi(T_2)||$ [11] از این پس فضای عناصر وارون‌پذیر $\mathcal{B}/\mathcal{K}$ و $\mathcal{B}$ را به ترتیب با $(\mathcal{B}/\mathcal{K})^{\times}$ و $\mathcal{B}^{\times}$ نمایش می‌دهیم. اکنون یکی از مهم‌ترین قضیه‌های مورد نظرمان را بیان می‌کنیم:

قضیه ۱۷. $\mathcal{F} = \pi^{-1}(\mathcal{B}/\mathcal{K})^{\times}$.

اثبات. از قضیه ۸ می‌دانیم برای هر $F \in \mathcal{F}$

$Ker(F^*F) = Ker(F)$، $Im(F^*F) = Im(F^*)$، $Ker(FF^*) = Ker(F^*)$ و $Im(FF^*) = Im(F)$

پس اگر دو نگاشت از رتبه متناهی

$P : H \to Ker(F)$ و $Q : H \to Ker(F^*)$

[11] با توجه به این‌که $\mathcal{K}$ یک ایده‌آل دوطرفه $\mathcal{B}$ بود، $\mathcal{B}/\mathcal{K}$ یک جبر است و این‌جا در واقع نشان دادیم که $\mathcal{B}/\mathcal{K}$ یک جبر باناخ است.

نگاشت‌های تصویر متعامد باشند، آنگاه F^*F+P و FF^*+Q هر دو یک به یک و پوشا و در نتیجه وارون‌پذیرند. پس $\pi(F^*)\pi(F)=\pi(F^*F+P)$ و $\pi(F)\pi(F^*)=\pi(FF^*+Q)$ وارون‌پذیرند؛ بنابراین $\pi(F)$ و $\pi(F^*)$ نیز وارون‌پذیر هستند و $\mathcal{F}\subseteq\pi^{-1}(\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times$. اکنون فرض کنیم، برای $F\in\mathcal{B}$؛ $\pi(F)$ عنصری وارون‌پذیر از $(\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times$ باشد. پس به ازای $F'\in\mathcal{B}$، $FF',F'F\in\pi(I)$ پس هر دو این دو عملگر اخیر، فردهلم و با اندیس صفرند. اما

$$Im(FF')\subseteq Im(F)$$

و

$$Ker(F)\subseteq Ker(F'F)$$

پس F نیز فردهلم است و $\mathcal{F}\supseteq\pi^{-1}(\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times$. □

قضیه ۱۷ را می‌توان به این صورت نیز بیان کرد: عملگر $F\in\mathcal{B}$ فردهلم است اگر و فقط اگر عملگر $F'\in\mathcal{B}$ و عملگرهای فشرده K_1 و K_2 موجود باشند که $FF'=I+K_1$ و $F'F=I+K_2$. همچنین به عملگر F' که خود فردهلم است، شبه‌وارون[12] F می‌گوییم و بنابر لم ۱۶ داریم: $Index(F')=-Index(F)$. به علاوه یک شبه وارون با اضافه شدن یک عملگر فشرده به آن، شبه‌وارون می ماند.

قضیه ۱۸. *$\mathcal{F}$ در $\mathcal{B}$ باز است. همچنین*

$$\mathcal{F}\circ\mathcal{F}\subseteq\mathcal{F} \text{ و } \mathcal{F}+\mathcal{K}=\mathcal{F}$$

اثبات. برای باز بودن $\mathcal{F}$ طبق قضیه قبل کافی است نشان دهیم که $(\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times$ در $\mathcal{B}/\mathcal{K}$ باز است. فرض کنیم $a\in(\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times$ و $\|h\|<\|a^{-1}\|^{-1}$. پس $\|ha^{-1}\|<1$ و بنابر آنچه در قبل گفتیم، $1+ha^{-1}$ وارون‌پذیر است. چون $a+h=(1+ha^{-1})a$، $a+h$ نیز وارون‌پذیر است و $(\mathcal{B}/\mathcal{K})^\times$ در $\mathcal{B}/\mathcal{K}$ باز است. فرض کنیم که $F_1,F_2\in\mathcal{F}$ و $K\in\mathcal{K}$، از آنجا که $\pi(F_1+K)=\pi(F_1)$ و $\pi(F_1\circ F_2)=\pi(F_1)\pi(F_2)$ دو رابطه بعدی نتیجه می‌شوند. □

دقت کنید که برای $F\in\mathcal{F}$ و $K\in\mathcal{K}$، چون هر شبه‌وارون F' از F برای $F+K$ هم شبه‌وارون است، پس داریم

$$Index(F+K)=-Index(F')=Index(F)$$

قضیه ۱۹. *نگاشت $Index:\mathcal{F}\to\mathbb{Z}$ پوشا و به طور موضعی ثابت است.*

[12] Quasi-Inverse

اثبات. برای پوشا بودن، کافی است عملگرهای فردهلم زیر را در نظر بگیریم: $shift^{+n}$ و $shift^{-n}$ (از مثال ۲ استفاده می‌کنیم).

برای این که نشان دهیم $Index$ به طور موضعی ثابت است، $F\in\mathcal{F}$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که $G\in\mathcal{F}$ شبه‌وارون آن باشد و $GF=I+K$. مانند استدلال فوق با فرض $T\in\mathcal{B}$ و $\|T\|<\|G\|^{-1}$، خواهیم داشت: $F+T\in\mathcal{F}$ و $I+GT\in\mathcal{B}^\times$. از طرفی

$$(I+GT)^{-1}G(F+T)=(I+GT)^{-1}(I+K+GT)=$$
$$I+(I+GT)^{-1}K$$

پس $(I+GT)^{-1}G$ شبه‌وارون $F+T$ است و در نتیجه

$$Index(F+T)=-Index(G)=Index(F)$$

□

لم ۲۰. *$\mathcal{B}^\times$ در $\mathcal{B}$ باز است.*

اثبات. با فرض $U\in\mathcal{B}^\times$ و $T\in\mathcal{B}$ اگر $\|T\|<\|U^{-1}\|^{-1}$ آنگاه $I+U^{-1}T$ وارون‌پذیر است. می‌توان نوشت:

$$U+T=U(I+U^{-1}T)$$

پس $U+T$ وارون‌پذیر است. □

قضیه ۲۱. *$\mathcal{B}^\times$ همبند مسیری است.*

این قضیه حالت خاصی از یک قضیه کلی‌تر است و در این مقاله آن را اثبات نمی‌کنیم؛ ولی در سری مقالات بعدی به طور مفصل به آن می‌پردازیم.

قضیه ۲۲. *برای هر $n\in\mathbb{Z}$، $\mathcal{F}_n=\{F\in\mathcal{F}\mid Index(F)=n\}$ همبند مسیری است.*

اثبات. برای $n>0$ تعریف می‌کنیم:

$$shift^n:\mathcal{F}_0\to\mathcal{F}_n$$
$$F\mapsto(shift^-)^n\circ F$$

که پوشا (پوشا بودن از وارون راست داشتن $shift^-$ نتیجه می‌شود) و پیوسته است (و لذا همبندی مسیری $\mathcal{F}_0$ حکم مشابهی را برای F_n نتیجه می‌دهد). همچنین عملگر الحاق، یک یکسانی $*:F_n\to F_{-n}$ را به ما می‌دهد. . پس تنها کافی است نشان دهیم $\mathcal{F}_0$ همبند مسیری است. از آنجا که $\mathcal{B}^\times\subset\mathcal{F}_0$ بنابر قضیه ۲۱ کافی است هر عنصر $\mathcal{F}_0$ را با مسیری به $\mathcal{B}^\times$ وصل کنیم. فرض کنیم $F\in\mathcal{F}_0$؛ چون $dim(Ker(F))=dim(Im(F)^\perp)$، عملگر وارون‌پذیر $\phi:Ker(F)\to Im(F)^\perp$ وجود دارد. نگاشت کراندار

$$\Phi = \{ \begin{array}{ll} \phi & \text{on } Ker(F) \\ \circ & \text{on } (Ker(F))^{\perp} \end{array}$$

را در نظر می‌گیریم. برای هر $t \in [\circ, \text{۱}]$، عملگر $F + t\Phi$ وارون‌پذیر است، چرا که نمایش ماتریسی زیر را دارد:

$$\begin{pmatrix} t\phi & \circ \\ \circ & F|_{(Ker(F))^{\perp}} \end{pmatrix}$$

$\square$

پس توانستیم نشان دهیم، $\mathcal{F}$ در $\mathcal{B}$ باز است و تحت الحاق، ترکیب و جمع با عملگرهای فشرده، بسته است. همچنین اندیس این عملگرها موضعا ثابتند؛ درنتیجه اندیس در هر مولفه همبندی $\mathcal{F}$ مسیری ثابت است. بنابر قضیه آخر برای هر عدد صحیح، یک و دقیقا یک مولفه همبندی مسیری با اندیس مورد نظر موجود است. در مقالات بعدی این مباحث را ادامه می‌دهیم و نظریه اندیس را گسترده‌تر مطرح می‌کنیم.

مراجع

[1] David Bleecker, Bernhelm Booth-Bavnbek, Index Theory, 2012.

[2] Martin Shechter, Principles of Functional Analysis, American Mathematical Society, 2002.

[3] Allen Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2001.