محک‌هایی برای مسطح بودن گراف

علی قصاب

اگر به گراف به عنوان شرح اتصالات بین نقاط خاص نگاه کنیم، خواهیم دید که گراف موجودیت خود را از صفحه‌ای که در آن نشانده می‌شود، نمی‌گیرد. با این همه، بنا به سنت رایج، که از شهود بشری نشأت می‌گیرد، متداول است که به گراف شکلی نسبت دهیم، که دست بر قضا معمولاً در صفحه رسم می‌شود. آنچه در همان ابتدا خودنمایی می‌کند این است که لزومی ندارد اتصالات، که به «یال»ها مشهورند، در همان جایی که گراف اراده کرده است، برخورد کنند. به راحتی می‌توان به گراف‌های چموشی دست یافت که هر طور در صفحه رسم شوند، یال هایشان با هم در محلی به جز رئوس برخورد کنند. اختصاص واژه‌ی راحت در اینجا کمی بحث بر انگیز است، زیرا شاید به راحتی(!) زمانی را به یاد آورید که تصور می‌کرده اید که عموماً همه‌ی گراف‌ها مسطح هستند؛ و نشان به آن نشان که ممکن است تلاش عبثی در نوجوانی برای حل مسأله‌ی بنام سه خانه- سه چاه کرده باشید![1]

تعریف ۱. *گرافی را که بتوان آن را در صفحه طوری رسم کرد که محل برخورد یال ها، در رئوس مرتبطشان باشند، را مسطح می گویند. به فرایند مسطح کردن، نشاندن[2] در صفحه می‌گویند.*

در سیر تاریخی، یکی از ابتدایی‌ترین یافته‌ها چنین بوده است:

گزاره ۲. *$K_{3,3}$ و K_5 نامسطح هستند.*

ایده‌ی اثبات. به طور کلاسیک، اکنون نویسندگان از یکی از سه روش زیر کمک می‌گیرند:

الف) سناریوی یکم: از قضیه‌ی خم جردن (: هر خم ساده‌ی بسته‌ی C در صفحه، صفحه را به سه مجموعه‌ی همبند مسیری «رو»، «درون» و «بیرون» خم افراز می‌کند.) کمک گرفته می‌شود. در این روش برای مثال برای تسطیح ناپذیری K_5 ، ابتدا نشاندن مسطح K_4 به همراه چهار ناحیه‌ای که در صفحه ایجاد می‌کند، معرفی می‌شوند. سپس از قضیه خم جردن کمک گرفته می‌شود تا نشان دهند مکانی برای اختصاص رأس پنجم در هیچ یک از این چهار ناحیه نیست.

ب) سناریوی دوم: با به کار بردن قضیه‌ی خم جردن، رابطه‌ی اویلر(: برای هر گراف مسطحِ نشانده شده در صفحه با n رأس و q یال، که در صفحه f تا وجه(ناحیه) ایجاد می‌کند، داریم $n - q + f = ۲$) اثبات می‌شود. سپس با کمک این رابطه و روابط جانبی مثلاً $۲f = ۳q$، در یک سیر برهان خلف، تناقض فرض تسطیح‌پذیری K_5 آشکار می‌شود.

ج) سناریوی سوم: از خواص بنیادین توپولوژی صفحه، صورت خام و خاصی از رابطه‌ی اویلر نتیجه می‌شود، و از این صورت، مستقلاً هم قضیه‌ی جردن و هم رابطه‌ی اویلر اثبات می‌شود؛ و دنباله‌ی کار چنان می‌شود که در «ب» شرح داده شد.[3]

مسأله‌ی تعیین محکی برای تسطیح‌پذیری گراف از دیرباز و تقریباً مقارن با شکل گیری علقه‌ی نظریه‌ی گراف، مطرح بوده و شده است. از نخستین تلاش‌های کارآمد می‌توان به قضیه‌ی مستطاب کوراتفسکی اشاره کرد. جالب اینجاست که در سیر تاریخی، این نخستین محک مکشوف، یکی از کارآمدترین نتایج به دست آمده تاکنون است.

تعریف ۳. *می‌گوییم گراف G زیرتقسیم گراف H است اگر که با افزودن تعدادی رأس روی یال‌های H بتوان به از G رسید.*

به آسانی به دست می‌آید که: اگر زیرگرافی از گراف دارای زیرتقسیمی از $K_{3,3}$ و K_5 باشد، مسطح نیست.

این گزاره، از آن گزاره‌هایی است که به تعبیر وست (West) «TONCAS[4]» است.

قضیه ۴. (کوراتفسکی). *یک گراف مسطح است اگر و تنها اگر هیچ زیرگرافی از آن زیرتقسیم $K_{3,3}$ و K_5 نباشد.*

کوراتفسکی در ۱۹۳۰ پرده از کشفش برداشت، و طبق سنت نه چندان غریب ریاضی در همان سال فرینک(Frink) و اسمیت(Smith) هم، مستقلاً، به این کشف نائل شدند، تا صدقی دوباره باشد بر گفته‌ی بویوبی پدر در توصیه به بویوبی پسر.[5]

[1] تصور دکتر بهزاد بر این است که این مسأله منتسب به شیخ بهایی است. اثبات این مدعای تاریخی، که با جایزه پاسخ داده می‌شود، نقطه و نطفه‌ی شروع نظریه‌ی گراف را یکصد سال به عقب باز خواهد گرداند.

[2] «embedding» و نه !«imbedding»

[3] این دیدگاه، در کتاب Graphs on Surfaces نوشته‌ی Mohar و Thomassen مطرح شده است. این مقاله، (بی اندازه) از داده‌ها و دیدگاه این کتاب بهره برده است.

[4] The Obvious Necessary Condition is Also Sufficient!

[5] چیزهای بسیاری هستند با یک مبدا تاریخی که در یک زمان در چندین مکان ظاهر می‌شوند، درست مثل گل‌های بنفشه که در بهار در همه جا می‌رویند.

پس از طی یک دوره‌ی بیش از بیست ساله نخستین آسان-برهان[۶]های این قضیه ظاهر شد. شرح مختصر برهان حاضر به یمن تلاش توماسن(Thomassen) در ۱۹۸۰ مهیا شده است.

تعریف ۵. *در گراف G یال $e = uv$ را در نظر می‌گیریم. با حذف این یال و سپس روی هم قرار دادن دو رأس u و v، به گراف G/e دست می‌یابیم. با تکرار این فرایند و همچنین فرایند حذف یال‌هایی از گرافG ، به کهاد(minor)ای از گراف G دست می‌یابیم.*

تعریف ۶. *گرافی دارای حداقل $n+1$ راس که با حذف هر $n-1$ رأس دلخواه همبند باقی می‌ماند را n- همبند می‌گوییم.*

لم ۷. (توماسن). *هر گراف ۳- همبند G با بیش از چهار رأس دارای یالی چون e است که گراف G/e ۳- همبند باقی می‌ماند.*

اثبات زیبا و البته مصور این لم در کتاب آموزشی متداول گشته‌ی باندی-مورتی (ِ جدید) موجود است

یک طرف قضیه‌ی کوراتفسکی که اثبات شد، و درباره‌ی طرف دیگر به خلاصه-برهان زیر اشاره می‌کنیم.

۱. ابتدا فرض می‌کنیم که گراف G ۳-همبند است. اکنون از استقرا کمک می‌گیریم و توجه داریم که بررسی صحت ادعا برای گراف‌های چهار و پنج رأسی به طریق مستقیم، آسان است.

۱.۱. برای حالت‌های با بیش از پنج رأس، از لم توماسن به وجود یال e آگاه می‌شویم که G/e ۳-همبند است.

۱.۱.۱. اگر G/e نامسطح باشد، با اعمال فرض استقرا و یافتن زیرتقسیم $K_{3,3}$ و K_5، می‌توان زیرتقسیم‌های مشابهی در G ساخت.

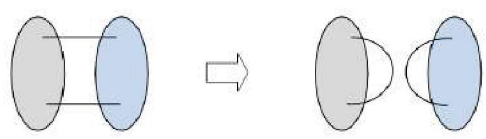
۱.۱.۲. درغیر این صورت، رأس حاصل از انقباض یال e (از گراف G) را z (در گراف G/e) می‌نامیم. گراف $(G/e) - z$ ۲-همبند است. پس هر وجهش یک دور C است، و لاجرم z در یک وجه آن همچون f واقع می‌شود.

۱.۲. باقی برهان در تکاپوی این باید باشیم که با گسترش رأس z به یال e در وجه f، یکی از زیرتقسیم‌های موردنظر $K_{3,3}$ یا K_5 بیابیم.

[۶]اثبات قضیه‌ی کوراتفسکی در فرهنگ متداول، به غلط، سخت به نظر می‌رسد. برای مثال به یاد دارم که شنیده ام دانشجوی دوره‌ی دکترایی از دانشکده، در امتحان جامعش عمده‌ی کتاب باندی-مورتی (ِ قدیم) را حاضر کرده بود، به جز اثبات این قضیه را.

۲. جاده‌ی فرعی:[با دقت در ساختار برهان به مطلب گرانبهای دیگری در حاشیه دست می‌یابیم: **قضیه.تات(Tutte).استین(Stein).** هر گراف ۳-همبند مسطح دارای نشاندنی محدب[۷] درصفحه است.]

۳. برای تکمیل برهان کافی است دقت کنیم که اگر گرافی ۲-همبند باشد، می‌توان با حذف برش‌های یالی منتسب به ۲-همبندی مذکور، مسأله‌ی تسطیح‌پذیری گراف را به تسطیح‌پذیری گراف‌های ۳-همبند محول کرد. (رجوع شود به شکل)



نتیجه‌ی جانبی دیگری که از بطن برهان اخیر سرباز می‌کند را می‌توان در اثر مستقل وگنر(Wagner) و فری(Fáry) دید.

قضیه. (وگنر.۱۹۳۶. فری. ۱۹۴۸). هر گراف مسطح نشاندن مسطح یال-مستقیم (یعنی نشاندن با یال‌هایی به شکل پاره خط) دارد.

در تداوم داستان اکتشاف قضیه‌ی کوراتفسکی، ماجرای[۸] کشف قضیه‌ی وگنر، در ۱۹۳۷، جالب به نظر می‌رسد.

قضیه ۸. (وگنر). *یک گراف مسطح است اگر و تنها اگر نه $K_{3,3}$ و نه K_5 را به عنوان کهاد نداشته باشد.*

اثبات. . اگر گراف G نامسطح باشد، بنا به قضیه‌ی کوراتفسکی دارای زیرتقسیمی از $K_{3,3}$ یا K_5 است. با انقباض همه‌ی یال‌های زیادی این زیرتقسیم نوعی، به کهادی از $K_{3,3}$ یا K_5 در گراف می‌رسیم. از طرف دیگر، اگر گراف H مسطح باشد، واضح است که هر دو گراف $H-e$ و H/e مسطح می‌شوند. پس هر کهاد گراف مسطح، مسطح می‌شود. □

در ۱۹۵۸، تات وارد صحنه شد، و از قضیه‌ای رونمایی کرد که از نگاه دیگری به محک تسطیح‌پذیری حکایت می‌کرد. تات مفهومی را به نام «پل[۹]» معرفی کرد.

تعریف ۹. *فرض کنید که H زیرگرافی از گراف G باشد. به دو نوع زیرگراف G ، H- پل می‌گویند:*

[۷]منظور از نشاندن محدب درصفحه، نشاندنی است که درون همه‌ی وجوه، به جز وجه بیرونی، و همچنین درون مکمل وجه بیرونی محدب باشند.

[۸]خیلی مبهم به یاد دارم که جایی خوانده ام که وگنر در هنگام تدریس قضیه‌ی کوراتفسکی به این نتیجه رسید. با این همه، هر چه جستجو کردم منبع خاطره‌ام را نیافتم.

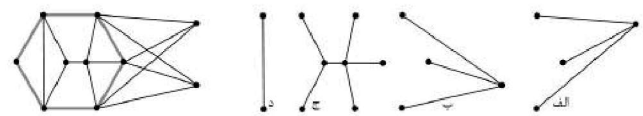
[۹]bridge

الف) *هر یک از مؤلفه‌های همبندی $G-V(H)$، همچون K، به همراه برش یالی $E(H,K)$*

ب) *هر یالی خارج از H که دو سرش در H باشند.*

تعریف ۱۰. *به رئوس مشترک یک H- پل و H، «رئوس پیوست[۱۰]» آن H- پل می‌گوییم.*

برای مثال برای گراف داده شده‌ی زیر، با زیر گراف دوری مشخص شده (دور شش‌تایی)، چهار پل وجود دارد.



تعریف ۱۱. *اگر C یک دور در گراف G باشد، می‌گوییم دو C- پل «هم پوشان[۱۱]» هستند اگر حداقل یکی از دو شرط زیر صادق باشند.*

الف) *حداقل سه تا رأس پیوست مشترک داشته باشند.*

ب) *رئوس متمایز a,b,c,d با حفظ ترتیب روی دور C یافت شوند که یکی در میان رئوس پیوست هر یک از این دو C- پل باشند. (در این حالت به طور خاص می‌گوییم «هم‌پوشان کج[۱۲]» هستند.)*

در مثال پیشین، «الف» و «ب»، «الف» و «ج»، و همچنین «ب» و «ج» هم‌پوشان هستند. از این سه جفت، تنها دو جفت اخیر هم‌پوشان کجند.

با بیش از کمی رندی، دسته‌های $K_{۳,۳}$ پشت پرده‌ی حالت «الف» دیده می‌شود، و دسته‌های $K_۵$، در حالت «ب».

با این مفاهیم، در دوره‌ی زمانی قریب ۳۵ سال، قضیه‌ی زیبای زیر به دست آمد:

قضیه ۱۲. (تات ۱۹۵۸ .توماسن ۱۹۸۰ .ویلیامسن (Williamson) ۱۹۹۳). *شرایط زیر معادلند:*

الف) *G نامسطح است.*

ب) *G حاوی دوری چون C است که اگر به هر یک از C- پل هایش یک رأس نظیر کنیم و هر دو C- پلی که هم‌پوشان هستند را با یالی مرتبط کنیم، گراف حاصل[۱۳] دوبخشی نمی‌شود.*

ج) *G حاوی دوری چون C است که اگر به هر یک از C- پل هایش یک رأس نظیر کنیم و هر دو C- پلی که هم‌پوشان کج هستند را با یالی مرتبط کنیم، گراف حاصل دوبخشی نمی‌شود.*

د) *G حاوی دوری چون C است که سه تا C- پل دارد که دو به دو هم‌پوشان کج هستند.*

درباره‌ی برهان باید گفت که به وضوح داریم: «د»←«ج»←«ب»←«الف». برهان (نا)متعارف «الف»←«د» از استقرایی هوشمندانه روی حداقل تعداد یال‌هایی است که باید از یک گراف کنده شوند، تا به زیرتقسیمی از $K_{۳,۳}$ یا $K_۵$ دست یابیم، بهره‌مند می‌گیرد؛ و یک بار خواندش می‌ارزد!

سه محک نخست نشأت گرفته از ادله‌ی متداول در نظریه‌ی گراف است، حال آنکه در جبهه‌ی اکتشاف محک‌های تسطیح ناپذیری از همان ابتدا (و به عبارت دقیق تر پس از هفت سال) پای جبر هم به میان آمده است.

تعریف ۱۳. *گراف G را درنظر می‌گیریم. به فضای تولید شده با همه‌ی زیرگراف‌های اویلری (زیرگراف‌های فراگیری که در آن درجه‌ی هر راس زوج است)، با عمل تفاضل متقارن، «فضای دوری» G می‌گوییم. می‌گوییم که G یک ۲-پایه دارد اگر که گردایه‌ای از گراف‌های زوج G موجود باشد که هر یال گراف دقیقاً در دوتای آنها ظاهر شود.*

قضیه ۱۴. (مک لین(MacLane)). *گراف ۲- همبند G مسطح است اگر و تنها اگر یک ۲- پایه داشته باشد.*

نکته‌ی حائز اهمیت، برهان متداول یک طرف قضیه این است که با درنظر گرفتن دورهای دو گراف خاص $K_{۳,۳}$ و $K_۵$، صدق این دو را در محک قضیه اثبات می‌کنیم. سپس به وضوح خواهیم دید که هر زیرتقسیم این دو گراف در محک داده شده صدق می‌کنند. در ادامه نشان می‌دهیم که اگر گرافی ۲-پایه داشته باشد، با حذف یال از آن گراف حاصل نیز ۲-پایه خواهد داشت. باقی سناریوی اثبات، فراخواندن قضیه‌ی کوراتفسکی است که نامسطح بودن آن را معادل داشتن زیرتقسیمی از $K_{۳,۳}$ یا $K_۵$ می‌داند. طرف دیگر حکم با نشاندن در صفحه و با به کارگیری فرمول اویلر قابل اثبات است.

در بازگویش تاریخ کشف محک‌های تسطیح می‌توان به قضایای (نه چندان مهمی) همچون قضیه‌ی فورنیر (Fournier) اشاره کرد.

قضیه ۱۵. (فورنیر). *یک گراف نامسطح است اگر و تنها اگر حاوی سه دور با یال مشترک e باشد، به طوری که هیچ یالی در یکی از دورها، یال واصل بین دو رأس غیرمتوالی در دورهای دیگر نباشد. و*

[۱۰] Vertices of attachment
[۱۱] overlap
[۱۲] Skew-overlap
[۱۳] این گراف را با $O(G,C)$ نشان می‌دهند.

اگر یکی از این دورها، همچون C، را منقبض کنیم، تصویر دو دور دیگر در یک بلوک[۱۴] G/C ظاهر شوند.

در برهان یابی برای صحت این قضیه، فقط با کمی مداقه، نیز نقش قضیه‌ی کوراتفسکی ظاهر می‌شود.

گاهی محکی با ظاهربی پیچیده رونمایی شده است که که در باطن آن اوراد کوراتفسکی خوانده می‌شود. اوج این تمثیل را می‌توان در قضیه‌ی کولین دو وردیر (Colin de Verdière) دید؛ که از تابعی عجیب به نام μ کمک گرفته می‌شود. درپیچیدگی این قضیه همین بس که حتی برای آشنایی با تعریف μ باید شکیبایی داشت!

تعریف ۱۶. *اگر G گرافی همبند با رئوس $v_1, \ldots, v_n$ باشد، همه‌ی ماتریس‌های متقارن همچون M_{nn} را چنین در نظر می‌گیریم که:*

الف) *اگر $i \neq j$ و v_i همسایه‌ی v_j باشد، در این صورت $m_{ij} < 0$.*

ب) *اگر $i \neq j$ و v_i همسایه‌ی v_j نباشد، در این صورت $m_{ij} = 0$.*

ج) *M دقیقاً یک مقدار ویژه‌ی منفی (با تکرر ۱) داشته باشد.*

د) *ماتریس متقارن ناصفری همچون $X_{n\times n}$ یافت نشود به طوری که $MX = 0$ و $x_{ij} = 0$ هرجایی که $i = j$ یا $v_iv_j \in E(G)$.*

اکنون $\mu(G)$ را بزرگترین رتبه‌ی فضای پوچی بین همه‌ی Mها می‌گیریم.

کولین دو وردیر با ایده‌هایی از هندسه‌ی دیفرانسیل ثابت کرد که اگر H کهاد گراف G باشد، آنگاه $\mu(H) \leq \mu(G)$. سپس محاسبه کرد که $\mu(K_{3,3}) = \mu(K_5) = 4$.

اکنون تنها یک فراخوانی قضیه‌ی کوراتفسکی نیاز است:

قضیه ۱۷. (کولین دو وردیر. ۱۹۹۰). *گراف همبند G مسطح است اگر و فقط اگر $\mu(G) \leq 3$.*

در امتدادی ظاهراً متفاوت از خط سیر تفکر کوراتفسکی‌وار، ویتنی(Whitney) با دیدی متفاوت حرکت می‌کرد. ویتنی از ایده‌ی دوگان هندسی گراف کمک گرفت و نوعی دوگان ظاهراً متفاوت ارائه کرد.

تعریف ۱۸. *گراف (چندگانه‌ی) G را در نظر بگیرید. می‌گوییم که گراف (چندگانه‌ی) H دوگان ترکیبیاتی G است اگر که تابع یک به یک $\phi : E(G) \to E(H)$ وجود داشته باشد، به طوری که تصویر هر دور G تحت این تابع برش مینیمالی در H شود.*

[۱۴] زیرگراف ۲-همبند ماکسیمال

قضیه ۱۹. (ویتنی). *یک گراف ۲-همبند (چندگانه) مسطح است اگر و تنها اگر دوگان ترکیبیاتی داشته باشد.*

قضیه‌ی ویتنی سه سال پس از قضیه‌ی کوراتفسکی رونمایی شد و در آن زمان (و حتی تا سی سال بعد) ردی از قضیه‌ی کوراتفسکی در آن دیده نمی‌شد. با این همه در ۱۹۷۱، پرسنس (Parsons) نشان داد که محک‌های مبتنی بر دوگان‌سازی[15] قابل تحویل به قضیه‌ی کوراتفسکی هستند.

[... تا اینجا انتظار بر این می‌رود که خواننده گمان برده باشد که پرده‌ی آخر این مقاله به اینجا ختم می‌شود که همه‌ی محک‌های تسطیح‌پذیری واگویه‌ای درشت یا ظریف از قضیه‌ی بنام کوراتفسکی هستند.]

پرده آخر اشاره به تلاش ریاضی‌دان گمنامی ($\neq$ بنام،) به نام اشنیدر(Schnyder) دارد که به نتیجه‌ای غریب دست یافت.[16]

تعریف. فرض کنید که $P = (X, <)$ یک ترتیب جزئی(با تعریف خاص و دارای ویژگی‌های تراگذری، پادتقارنی و نابازتابی[17]) باشد. چنین ترتیبی را خطی می‌گوییم اگر هر دو عضوی با هم قابل مقایسه باشند.

در ۱۹۴۱، داشنیک(Dushnik) و میلر(Miller) بُعد یک رابطه‌ی ترتیب $P = (X, <)$ را به صورت کمترین تعداد ترتیب‌های خطی که از اشتراکشان بتوان $<$ را ساخت، تعریف کردند.این بعد را با $\dim P$ نشان می‌دهیم. کار حیرت آوری که اشنیدر کرد این بود که X را مجموعه‌ای با اعضای یال‌ها و رئوس گراف G گرفت و از رابطه‌ی ترتیب جزئی مضحکی[18] کمک گرفت: «اگر رأس v سر یال e باشد، داریم: $v <_G e$».

قضیه ۲۰. (اشنیدر. ۱۹۸۹). *گراف G مسطح است اگر و فقط اگر $\dim P_G \leq 3$. به علاوه، برای هر نمایش ۳-بعدی این رابطه با ترتیب‌های خطی، به صورت $<_1, <_2, <_3$، به طوری که $<_G = <_1 \cap <_2 \cap <_3$، یک نشاندن مسطح یال-مستقیم G با دستور زیر وجود دارد:*

$$V(G) \to \mathbb{R}^2, v \mapsto (v_1, v_2)$$

به طوری که $v <_1 u$ و $v <_2 u$ اگر و تنها اگر $v_1 < u_1$ و $v_2 < u_2$.

[15] محک ویتنی آبستن چندین محک تسطیح‌پذیری دیگر نیز بوده است؛ همچون محک جَگِر(Jaeger) و یا محک روزنشیهل (Rosenstiehl).

[16] همین قدر بدانید که این ریاضی‌دان تا کنون دو مقاله نوشته است؛ یکی در ۱۹۸۹ با سایتشن(citation) ۴۸!! درباره‌ی سایتشن دیگری که در سال ۱۹۹۵ نگاشته است چه حدسی می‌زنید؟

[17] transitive, asymmetric and irreflexive

[18] اگر بر تخصیص واژه‌ی «مضحک» تردیدی دارید، سعی کنید تا صدق رابطه‌ی ترتیب جزئی بودن $<_G$ را بررسی کنید!

صرفاً جهت خالی نبودن پایان این عریضه، برهان یک طرف قضیه را شرح می‌دهیم.

(برهان خلف) فرض می‌کنیم که $\dim P_G \le ۳$، ولی G مسطح نباشد و بنابراین می‌توان $<_G = <_۱ \cap <_۲ \cap <_۳$ را به کار بست. برای هر $v \in V(G)$ و $i = ۱,۲$، قرار می‌دهیم: $v_i = ۲^{t_i}$ که t_i مرتبه‌ی v نسبت به $<_i$ است. هم‌چنین قرار می‌دهیم: $f(v) = (v_۱, v_۲)$. اکنون کافی است که نشان دهیم f را می‌توان به نشاندن مسطح یال-مستقیم G گسترش داد؛ یعنی اگر uv و $u'v'$ دو یال نامتقاطع G باشند، $\overline{f(u)f(v)} \cap \overline{f(u')f(v')} = \emptyset$[19]. اگر دست بر قضا $\overline{f(u)f(v)}$ بخشی از $\overline{f(v)f(w)}$ شود، آن‌گاه یا u از درجه‌ی یک است، و یا u به هر دو راس v و w متصل است. در این حالت(ها) کافی است $f(u)$ را کمی جابه‌جا کنیم! پس فرض می‌کنیم که دو پاره خط $\overline{f(u)f(v)}$ و $\overline{f(u')f(v')}$ در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.

u را بزرگترین نسبت به $<_۱$ در بین $\{u, v, u', v'\}$ می‌گیریم. چون $<_G = <_۱ \cap <_۲ \cap <_۳$ و $<_۱$، $<_۲$ و $<_۳$، هر سه روی X_G خطی هستند، پس برای انتخابی مناسب و نه لزوماً متمایز از $i, j, k \in \{۱,۲,۳\}$ داریم:

$$uv <_k v', uv <_j u', u'v' <_i v$$

چون $uv <_k u$ و $uv <_j u$، و با توجه به ویژگی $<_۱$-ماکزیمم نسبی بودن u، درمی‌یابیم که $j, k \neq ۱$. با در نظر گرفتن

$$\overline{f(u)f(v)} \cap \overline{f(u')f(v')} \neq \emptyset$$

سخت نیست که استدلال کنیم که $i \neq ۱$ (زیرا در غیر این صورت $u' <_۱ v$ به $v' <_۱ v$). هم‌چنین می‌توان نشان داد که $i \neq j, k$. بنابراین تنها دو حالت قابل بحث باقی می‌ماند:

الف) $i = ۳$ و $j, k = ۲$.

به راحتی عدم وقوع این حالت اثبات می‌شود.

ب) $i = ۲$ و $j, k = ۳$.

در این حالت داریم $u'v' <_۲ v$. این امر موجب وقوع $v'_۲ < v_۲$ و $u'_۲ < v_۲$ می‌شود. اکنون از رابطه‌ی

$$\overline{f(u)f(v)} \cap \overline{f(u')f(v')} \neq \emptyset$$

به درستی $u <_۲ v$ می‌رسیم.

بیایید تا اینجا را این طور خلاصه کنیم:

$$v'_۱ < u_۱, u'_۱ < u_۱, v'_۲ < v_۲, u'_۲ < v_۲, u_۲ < v_۲, v_۱ < u_۱$$

چون دو یال همدیگر را قطع می‌کنند، یکی از $f(u')$ و یا $f(v')$ باید در مثلث به رئوس $f(u)$، $f(v)$ و $(u_۱, v_۲)$ بیفتد. مثلاً فرض کنیم که $f(u')$ بیفتد. در این صورت از شهود مقدماتی هندسی درمی‌یابیم که: $u_۱ < u'_۱ < \frac{u_۱}{۲}$ یا $v_۲ < u'_۲ < \frac{v_۲}{۲}$؛ که هر دو منجر به تناقض با تعریف f می‌شوند.

[19] در اینجا منظور از $\overline{AB}$، پاره خط واصل بین دو نقطه‌ی A و B است.

مسأله (ای از روی کنجکاوی). تا اینجا که یک طرف ادعا ثابت شد، اثری از قضیه‌ی کوراتفسکی دیده نشد! آیا پشت پرده‌ی اثبات طرف دیگر، این قضیه ظاهر می‌شود؟ چه «بله» و چه «خیر»، اگر متواضعانه‌تر پرسیده شود «آیا اثباتی بر مبنای قضیه‌ی کوراتفسکی برای همین طرف قضیه‌ی اشنیدرِ که ثابت شد، می‌توان یافت»؟!

صرف نظر از سیر تاریخی مرور شده، بحث نشاندن گراف‌های مسطح هنوز مسائل سترگی دارد که چندان تکان نخورده اند. از این نمونه با اشاره به یک حدس، این بحث (ِ پایان ناپذیر!) را خاتمه می‌دهیم.

حدس. هربرت(Harborth). آیا هر گراف مسطح دارای نشاندن مسطح یال-مستقیمی است که هر یالش طول صحیح داشته باشد؟

مراجع

[1] D. Archdeacon, C. P. Bonnington, C. H. C. Little, Cycles, cocycles and diagonals: A characterization of planar graphs, in "Planar Graphs", Ed. W. T. Trotter, DIM ACS Series Vol. 9, Amer. Math. Soc, Providence, R. I.,1993, pp. 1-3.

[2] D. Archdeacon, J. Širáň, Characterizing planarity using theta graphs, J. Graph Theory 27 (1998) 17-20.

[3] Y. Colin de Verdière, Sur un nouvel invariant des graphes et un critère de planarité, J. Combin. Theory Ser B 50 (1990) 11-21.

[4] B. Dushnik, E. W. Miller, Partially ordered sets, Amer. J. Math 63 (1941)600-610.

[5] I. Fáry, On straight representations of planar graphs, Acta Sci. Math. Szeged 11 (1948) 229-233.

[6] projective plane, Graph Theory (1994)

[7] J. C. Fournier, Une relation de separation entre co-circuits d'un matroide, J. Combin. Theory Ser. B 16 (1974) 181-190.

[8] H. de Fraysseix, P. Rosenstiehl, A depth-first-search characterization of planarity, Ann. Discrete Math. 13 (1982) 75-80.

[9] H. de Fraysseix, P. Rosenstiehl, A characterization of planar graphs by Tremaux orders, Combinatorica 5 (1985) 127-135.

[10] O. Frink, P. A. Smith, Abstract 179, Bull. Amer. Math. Soc. 36 (1930) 214.

[11] D. A. Holton, C. H. C. Little, A new characterization of planar graphs, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977) 137-138.

[12] F. Jaeger, Interval matroids and graphs, Discrete Math. 27 (1979) 331-336.

[13] K. Kuratowski, Sur le probleme des courbes gauches en topologie, Fund. Math. 15 (1930) 271-283.

[14] B. Mohar, C. Thomassen, Graphs on Surfaces, The John Hopjins University Press (2001)

[15] S. MacLane, A combinatorial condition for planar graphs, Fund. Math. 28 (1937) 22-32.

[16] T. D. Parsons, On planar graphs, Amer. Math. Monthly 78 (1971) 176-178.

[17] P. Rosenstiehl, Caractérisation des graphes planaires par une diagonal algébrique, Сотр. Rend. Acad. Sci. Paris Ser. A 283 (1976) 417-419.

[18] S. K. Stein, Convex maps, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951) 464-466.

[19] W. Schnyder, Planar graphs and poset dimension, Order 5 (1989) 323-343. Theory (1997)

[20] C. Thomassen, Planarity and duality of finite and infinite graphs, J. Combin. Theory Ser. B 29 (1980) 244-271.

[21] W. T. Tutte, Matroids and graphs, Trans. Amer. Math. Soc. 88 (1958) 144-174.

[22] W. T. Tutte, Convex representations of graphs, Proc. London Math. Soc. 10 (1960) 304-320.

[23] K. Wagner, Bemerkungen zum Vierfarbenproblem, Jber. Deutsch. math. Verein. 46 (1936) 26-32.

[24] K. Wagner, Uber eine Eigenschaft der ebenen Komplexe, Math. Ann. 114 (1937) 570-590.

[25] D. West, Introduction to Graph Theory, second edition,(2002)

[26] H. Whitney, Planar graphs, Fund. Math. 21 (1933) 73-84.

[27] S. G. Williamson, Canonical forms for cycles in bridge graphs, Linear Multilin. Algebra 34 (1993) 301-341.