نتایجی در نظریه‌ی اعداد تحلیلی

محمد علی کرمی

مقدمه

یکی از شاخه‌های ریاضیات، نظریه‌ی تحلیلی اعداد[1] است که در آن به کمک روش‌ها و ایده‌های آنالیز ریاضی به مسائل نظریه اعداد فکر می‌کنند. نظریه‌ی تحلیلی اعداد زمینه‌ای بسیار غنی در تحقیقات نظریه اعداد است و مسائل حل نشده‌ی زیادی در آن باقی‌مانده است که مهم‌ترین و معروف‌ترین آن‌ها حدس ریمان[2] درباره‌ی تابع زتا[3] (ζ) است.

در این بخش از ریاضیات به موارد زیادی از توابع، انتگرال‌ها، حدها و سری‌ها برخورد می‌کنیم که به نحوی به اعداد طبیعی یا صحیح و یا اعداد اول مربوط می‌شوند و رابطه‌های ریاضی جالبی پدید می‌آورند.

در این نوشتار سعی بر این داریم که شما را با ساده‌ترین قضیه‌های نظریه‌ی تحلیلی اعداد آشنا کنیم.

- اولین و ساده‌ترین مثال، بررسی رفتار تابع $f_\alpha(n) = \{n\alpha\}$ است. این مثال هم‌چنین از ساده‌ترین نمونه‌های سیستم‌های دینامیکی است.

فرض کنید می‌خواهیم بدانیم برای عدد حقیقی α، مقدار $\{n\alpha\}$ چگونه روی بازه‌ی $[0,1)$ تغییر می‌کند و رفتار آن چگونه است. ($\{x\}$ همان جزء اعشاری x است، مثلا $\{3/14\} = 0/14$، همواره $0 \le \{x\} < 1$) دقت کنید اگر α صحیح باشد، $\{n\alpha\} = 0$ و اگر $\alpha = \frac{p}{q}$ عددی گویا باشد $\{n\alpha\}$ فقط متناهی مقدار ممکن است به خود بگیرد که عبارتند از $\{0, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \dots, \frac{q-1}{q}\}$. بنابراین اگر α گویا باشد مجموعه‌ی مقادیر

$$\{\{n\alpha\} : n \in \mathbb{N}\}$$

متناهی است و روی دایره‌ی واحد (متناظر با $[0,1)$) n کمان به طول مساوی را مشخص می‌کنند.

اما در حالتی که α گنگ باشد چطور؟

در این حالت نشان می‌دهیم مجموعه‌ی مقادیر $\{n\alpha\}$ نامتناهی است. در واقع امکان ندارد m و nای طبیعی پیدا شوند که $m \neq n$ و $\{n\alpha\} = \{m\alpha\}$. زیرا در غیر این صورت

$$m\alpha - \lfloor m\alpha \rfloor = \{m\alpha\} = \{n\alpha\} = n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor$$

($\lfloor x \rfloor$ یعنی جزء صحیح x، همان بخش صحیح گرد شده‌ی عدد است. مثلا $\lfloor 3/14 \rfloor = 3$ و $\lfloor -0/9 \rfloor = -1$) بنابراین $\alpha = \frac{\lfloor m\alpha \rfloor - \lfloor n\alpha \rfloor}{m-n} \in \mathbb{Q}$ که با گنگ بودن α در تناقض است. پس $\{n\alpha\}$ همواره مقدار جدید می‌دهد و در نتیجه نامتناهی مقدار می‌پذیرد. حال نشان می‌دهیم این مقادیر در بازه‌ی $[0,1)$ چگال‌اند.

فرض کنید $\epsilon > 0$ دلخواه باشد و N را عددی طبیعی و به قدری بزرگ بگیرید که $\frac{1}{N} < \epsilon$. در این صورت دیدیم که اعداد $\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{(N+1)\alpha\}$ همگی متمایزند و در بازه‌ی $[0,1)$ قرار دارند. می‌توان $[0,1)$ را به N بخش مساوی $[0, \frac{1}{N}), \dots, [\frac{N-1}{N}, 1)$ افراز کرد و طبق اصل لانه کبوتری دوتا از اعداد $\{i\alpha\}$ در یک بازه قرار می‌گیرند. پس $1 \le i < j \le N+1$ و $0 \le t \le N-1$ای یافت می‌شود که

$$\{i\alpha\}, \{j\alpha\} \in [\frac{t}{N}, \frac{t+1}{N})$$

بنابراین

$$| \{i\alpha\} - \{j\alpha\} | < \frac{1}{N}$$
$$\Rightarrow 0 \le | (i-j)\alpha - (\lfloor i\alpha \rfloor - \lfloor j\alpha \rfloor) | < \frac{1}{N} < 1$$

رابطه‌ی بالا نشان می‌دهد عدد حقیقی $(i-j)\alpha$ بسیار نزدیک یک عدد صحیح به نام $\lfloor i\alpha \rfloor - \lfloor j\alpha \rfloor$ است و به عبارت بهتر فاصله‌اش با آن از $\frac{1}{N}$ کمتر است. بنابراین جزء اعشاری $(i-j)\alpha$ یا $(j-i)\alpha$ (فرق چندانی نمی‌کند) یا بسیار نزدیک صفر است یا بسیار نزدیک ۱. به عبارت بهتر

$$0 \le \{(j-i)\alpha\} < \frac{1}{N} \quad \text{یا} \quad 1 - \frac{1}{N} < \{(j-i)\alpha\} < 1$$

قرار دهید $k = j - i$. در این صورت k عددی طبیعی است که $\{k\alpha\}$ در محدوده‌ی $[0, \epsilon) \cup (1-\epsilon, 1)$ است. حالا به سادگی می‌توان دید که نقاط $k\alpha, 2k\alpha, 3k\alpha, \dots$ روی دایره‌ی فرضی جزء اعشاری نقاطی ایجاد می‌کنند که فاصله‌ی دو نقطه‌ی متوالی

[1] Analytic Number Theory
[2] Riemann Hypothesis
[3] Zeta Function

از ϵ کمتر است. (دلیل آن نامساوی $\{x+y\} \leq \{x\}+\{y\}$ است.)

به این ترتیب با شروع از صفر اگر گام‌هایی به طول $k\alpha$ برداریم و فقط توجه خود را به جزء اعشاری قدم‌های خود معطوف کنیم میزان جابه‌جایی در هر گام از $\frac{۱}{N}$ (حالا یا ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد، بسته به این که $\{k\alpha\}$ نزدیک ۱ باشد یا نزدیک صفر) کمتر است. پس هر نقطه از $[۰,۱)$ در ϵ-همسایگی خود نقاطی به صورت $\{m \times k\alpha\}$ را می‌بیند، پس $\{n\alpha\}$ در بازه‌ی $[۰,۱)$ چگال است.

این حقیقت که $\{\{n\alpha\}\}_{n=۱}^{\infty}$ چگال است، کاربردهایی در تقریب زدن اعداد گنگ با اعداد گویا دارد.

- بررسی رفتار دنباله‌ی $\{\frac{\phi(n)}{n}\}_{n=۱}^{\infty}$ که در آن ϕ تابع فی اویلر[۴] است.

یکی از توابع مورد استفاده در نظریه‌ی اعداد، تابع فی اویلر است که $\phi(n)$ برابر با تعداد اعداد متعلق به $\{۱,\dots,n\}$ است که نسبت به n اول‌اند.

به کمک اصل شمول و عدم شمول[۵] در ترکیبیات ثابت می‌شود که اگر $n=p_۱^{\alpha_۱}\times\cdots\times p_k^{\alpha_k}$ تجزیه‌ی n به عوامل اول باشد، آن‌گاه:

$$\begin{aligned}\phi(n) =&(p_۱-۱)\times\cdots\times(p_k-۱)\\ &\times p_۱^{\alpha_۱-۱}\times\cdots\times p_k^{\alpha_k-۱}\\ &=n(۱-\frac{۱}{p_۱})\times\cdots\times(۱-\frac{۱}{p_k})\end{aligned}$$

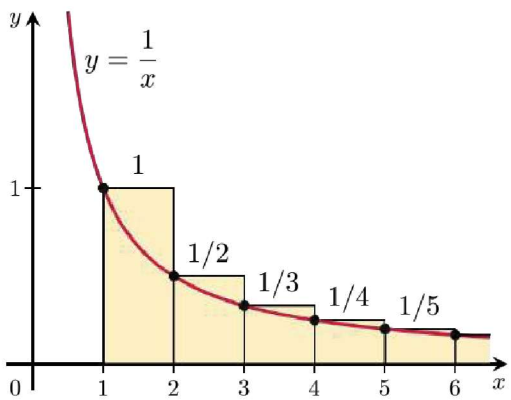
بنابراین $\frac{\phi(n)}{n}=\prod_{p|n\text{ و }p\text{ اول}}(۱-\frac{۱}{p})$. یکی از حقایق جالب درباره‌ی دنباله‌ی $\{\frac{\phi(n)}{n}\}_{n=۱}^{\infty}$ این است که این دنباله نیز در $[۰,۱]$ چگال است! برای اثبات این موضوع، به یک حقیقت دیگر در نظریه‌ی اعداد و آنالیز نیاز داریم. ابتدا مقدمه‌ای در این باب بیان می‌کنیم و سپس در انتهای نوشتار به اثبات چگال بودن $\frac{\phi(n)}{n}$ برمی‌گردیم.

- سری‌های خاص در نظریه اعداد

شاید ساده‌ترین سری نظریه اعدادی قابل بررسی، $\sum\frac{۱}{n}$ یا سری همساز[۶] باشد. این حقیقت معروفی است که سری موردنظر واگراست. واگرایی را می‌توان به چند روش تحقیق کرد. یک روش، دسته‌بندی جمله‌های سری به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}&\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴})+(\frac{۱}{۵}+\cdots+\frac{۱}{۸})\\ &+(\frac{۱}{۹}+\cdots+\frac{۱}{۱۶})+\cdots\\ &\geq\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+۲\times\frac{۱}{۴}+۴\times\frac{۱}{۸}+۸\times\frac{۱}{۱۶}+\cdots\\ &=۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+\cdots\end{aligned}$$

روش دیگر، مقایسه‌ی سری با انتگرال واگرای $\int_۱^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}$ است. در واقع طبق شکل



$$\begin{aligned}&\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\cdots\\ &\geq\int_۱^۲\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_۲^۳\frac{\mathrm{d}x}{x}+\cdots\\ &=\int_۱^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\log x\mid_۱^{\infty}=\infty\end{aligned}$$

سری همساز حالت خاص تابع زتای ریمان، $\zeta(s)$ برای حالت $s=۱$ است. تابع زتا، $\zeta(s)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^s}$ حتی برای sهای مختلط هم تعریف می‌شود و خواص تابع زتا و مکان صفرهای این تابع ارتباطی عمیق با چگونگی توزیع اعداد اول در بین اعداد طبیعی دارد. در حالتی که s حقیقی باشد، به کمک همان روش انتگرال می‌توان نشان داد که برای $s>۱$، $\zeta(s)$ همگراست و برای $s\leq۱$ واگراست.

اکنون می‌خواهیم یک زیرسری از سری همساز را بررسی کنیم. فرض کنید تنها اعداد اول را در نظر بگیریم. آیا $\sum_{p\text{ اول}}\frac{۱}{p}$ همگرا است؟ پاسخ دادن به این سوال چندان ساده نیست زیرا توزیع اعداد اول در بین اعداد طبیعی تا حد زیادی ناشناخته است و نمی‌توان

[۴] Euler’s Totient Function
[۵] Inclusion-Exclusion Principle
[۶] Harmonic Series

با روش‌های متداول مانند آزمون مقایسه‌ای، آزمون ریشه، آزمون نسبت، آزمون انتگرال و یا محاسبه‌ی مستقیم، $\sum_{p\ \text{اول}} \frac{1}{p}$ را به دست آورد. اما می‌توان ثابت کرد که $\sum_{p\ \text{اول}} \frac{1}{p} = \infty$. در واقع ثابت شده است که

$$\sum_{p \le n\ \text{و}\ p\ \text{اول}} \frac{1}{p} \sim \log\log(n) \Rightarrow \sum_{p\ \text{اول}} \frac{1}{p} = \infty$$

در حالی که به سادگی (با بررسی انتگرال $1/x$) می‌توان دید که

$$\sum_{k \le n} \frac{1}{k} \sim \log n$$

یعنی $\sum_{p\ \text{اول}} \frac{1}{p}$ خیلی کندتر از سری همساز به ∞ میل می‌کند.

در این‌جا دو اثبات برای $\sum_{p\ \text{اول}} \frac{1}{p} = \infty$ می‌آوریم. اثبات اول آنالیزی است و به خواص تابع لگاریتمی برمی‌گردد و هم‌چنین از قضیه‌ی اساسی حساب (وجود تجزیه‌ی یکتا) بهره می‌گیرد. این اثبات از اویلر است. توجه کنید که به کمک قضایای تقریب تیلور[۷] می‌توان نشان داد که ثابت $C > 0$ وجود دارد که برای هر عدد اول p:

$$\frac{1}{p} > -C\log(1-\frac{1}{p})$$

بنابراین

$$\sum_{p\ \text{اول}} \frac{1}{p} > C\log\prod_{p\ \text{اول}} \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$$

اما

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p}} = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots$$

(زیرا $1 > \frac{1}{p} > 0$ در شعاع همگرایی سری $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ قرار دارد.)

حال توجه کنید

$$\begin{aligned}
&\prod_{p\ \text{اول}} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} \\
&= \prod_{p\ \text{اول}} (1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots) \\
&= \sum_{\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_k} \ge 1\ \text{و}\ \text{اول و متمایز}\ p_{i_1},\dots,p_{i_k}} \frac{1}{p_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \times \cdots \times p_{i_k}^{\alpha_{i_k}}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty
\end{aligned}$$

دقت کنید اگر حاصل‌ضرب بالا را بسط دهیم و به صورت مجموع درآوریم، طبق قضیه‌ی اساسی حساب[۸] برای هر عدد طبیعی n، یک و دقیقا یک جمله در حاصل‌جمع وجود دارد که با $\frac{1}{n}$ برابر است. بنابراین داریم:

$$\sum_{p\ \text{اول}} \frac{1}{p} > C\log\prod_{p\ \text{اول}} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = C\log\infty = \infty$$

اثبات دوم، اثباتی از طریق شمارش و ترکیبیات است که توسط پال اردوش، ریاضی‌دان برجسته‌ی مجارستانی ارائه شده است. پال اردوش[۹] در زمینه‌های ترکیبیات، نظریه گراف، نظریه اعداد، آنالیز، نظریه تقریب، نظریه مجموعه‌ها و نظریه احتمال کارهای زیادی انجام داد و بیشترین مقالات ریاضی را در بین تمام ریاضی‌دانان تاریخ منتشر کرد. او به طور خاص مسئله حل کن قهاری بوده است.

فرض کنید $\sum_{p\ \text{اول}} \frac{1}{p} < \infty$ همگرا باشد. در این صورت عدد طبیعی k وجود دارد که $\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2}$ که در آن p_i، i-امین عدد اول است. اعداد اول واقع در $\{p_1, \dots, p_k\}$ اعداد اول کوچک و سایر اعداد را که در $\{p_{k+1}, \dots\}$ واقعند، اعداد اول بزرگ باشند.

یک عدد طبیعی دلخواه N در نظر بگیرید و فرض کنید N_b تعداد اعداد طبیعی $n \le N$ باشد که بر لااقل یک عدد اول بزرگ بخش‌پذیرند. N_s را نیز تعداد اعداد طبیعی $n \le N$ بگیرید که تمام عوامل اول آن‌ها جزو اعداد اول کوچک‌اند. توجه کنید که $N_b + N_s = N$.

برای تخمین N_b، دقت کنید که $\lfloor \frac{N}{p_i} \rfloor$ برابر با تعداد اعدادی از $\{1, 2, \dots, N\}$ است که بر p_i بخش‌پذیرند. پس N_b حداکثر برابر است با

$$N_b \le \sum_{i=k+1}^{\infty} \lfloor \frac{N}{p_i} \rfloor \le N(\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_i}) < \frac{N}{2}$$

برای تخمین N_s چنین عمل کنید: هر عدد طبیعی $n \le N$ با عوامل اول کوچک را به صورت $n = a_n b_n^2$ بنویسید که a_n خالی از مربع[۱۰] است. این کار ممکن است زیرا اگر بگیرید:

$$n = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$$

$$a_n = p_1^{\alpha \mod 2} \times \cdots \times p_k^{\alpha \mod 2}$$

$$b_n = p_1^{\lfloor \frac{\alpha_1}{2} \rfloor} \times \cdots \times p_k^{\lfloor \frac{\alpha_k}{2} \rfloor}$$

[۷] Taylor's Approximation Theorems
[۸] Fundamental Theorem of Arithmatics
[۹] Paul Erdos
[۱۰] Square-Free

(به وضوح a_n خالی از مربع است یعنی بر هیچ عدد مربع کاملی غیر از یک بخش‌پذیر نیست.)

حالا تعداد اعداد به شکل $a_n b_n^{۲}$ حداکثر چقدر است؟ اولا $a_n = p_{۱}^{\epsilon_{۱}} \times \cdots \times p_k^{\epsilon_k}$ که $\epsilon_i \in \{۰,۱\}$ و هر ϵ_i دو حالت دارد پس a_n حداکثر ۲^k حالت دارد. حالا توجه کنید $۱ \le b_n^{۲} \le N$، بنابراین $۱ \le b_n \le \sqrt{N}$ و از آن‌جا که عددی صحیح است پس حداکثر $\lfloor \sqrt{N} \rfloor$ حالت دارد و در نتیجه

$$N_s \le ۲^k \sqrt{N}$$

بنابراین

$$N = N_b + N_s < \frac{N}{۲} + ۲^k \sqrt{N}$$

به سادگی می‌توان دید که با بزرگ گرفتن N نابرابری بالا به تناقض منجر می‌شود: مثلا قرار دهید $N = ۲^{۲k+۲}$.

احتمالا احساس کردید که اثبات بالا واقعا هوشمندانه و ابتکاری است! به ویژه ایده‌ی نمایش یک عدد به صورت ضرب یک مربع کامل در یک عدد خالی از مربع.

کمی هم راجع به اثبات اویلر توضیح دهیم. به راستی که رابطه‌ی

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n} = \prod_{\text{اول } p} \left(\frac{۱}{۱-\frac{۱}{p}}\right) \tag{۱}$$

و حالت کلی تر آن

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^s} = \prod_{\text{اول } p} \left(\frac{۱}{۱-\frac{۱}{p^s}}\right)$$

یکی از زیباترین تساوی‌های ریاضیات است. این رابطه پلی بین نظریه اعداد و آنالیز است. در یک طرف یک سری داریم که ما را به یاد انتگرال تابع $\frac{۱}{x}$ می‌اندازد و در طرف دیگر یک حاصل‌ضرب مربوط به اعداد اول و این دو عبارت به زیبایی به کمک قضیه اساسی حساب به یکدیگر مربوط می‌شوند. در واقع اتحاد (۱) به سادگی اثبات می‌کند که تعداد اعداد اول نامتناهی است زیرا سمت چپ واگراست، پس سمت راست نیز بی‌نهایت است و این ممکن نیست مگر اینکه تعداد عوامل حاصل‌ضرب نامتناهی باشد.

حکم قوی‌تری درباره‌ی سری $\sum_{\text{اول } p} \frac{۱}{p}$ درست است. می‌توان ثابت کرد که $\sum_{\text{اول } p, p \le n} \frac{۱}{p} > \log\log n - C$ که C عددی ثابت و مستقل از n است.

برای اثبات، فرض کنید n یک عدد طبیعی دلخواه باشد. همان‌طور که در اثبات دوم اشاره شد، هر عدد طبیعی $۱ \le i \le n$ به روشی یکتا (اثبات یکتایی چندان سخت نیست) به صورت ضرب یک عدد خالی از مربع و یک مربع کامل قابل نمایش است.

بنابراین:

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{i} \le \prod_{\text{اول } p, p \le n} (۱ + \frac{۱}{p}) \times (\sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k^{۲}})$$

زیرا در سمت راست تمام عبارت‌های به صورت $\frac{۱}{p_{۱}^{\alpha_{۱}} \times \cdots \times p_t^{\alpha_t} \times k^{۲}}$ ظاهر می‌شوند که در آن $۱ \le k \le n$، $p_{۱}, \ldots, p_t$ تمام اعداد اول کوچک‌تر یا مساوی n هستند و $\alpha_{۱}, \ldots, \alpha_t \in \{۰,۱\}$. این عبارت‌ها تمامی اعداد $\frac{۱}{i}$ را ($۱ \le i \le n$) می‌دهند، پس نابرابری درست است.

اکنون توجه کنید بنابر قضیه‌ی معروفی سری $\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{۱}{k^{۲}}$ همگراست و در واقع

$$\frac{\pi^{۲}}{۶} = \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{۱}{k^{۲}} > \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k^{۲}}$$

$\frac{\pi^{۲}}{۶}$ را به اختصار با D نشان می‌دهیم. سپس با گرفتن $\log$ از دو طرف به دست می‌آوریم:

$$\log (\sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{i}) \le \sum_{p \le n} \log (۱ + \frac{۱}{p}) + \log D$$

حالا توجه کنید که نامساوی $۱ + x \le e^x$، ($x > ۰$) نتیجه می‌دهد (از دو طرف $\log$ بگیرید)

$$\log (۱ + \frac{۱}{p}) \le \frac{۱}{p}$$

و در ضمن از طریق تخمین انتگرال تابع $\frac{۱}{x}$ می‌توان نشان داد:

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{i} > \int_{۱}^{n+۱} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log (n+۱)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \log\log (n+۱) &< \log (\sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{i}) \\ &\le \log D + \sum_{\text{اول } p, p \le n} \log (۱ + \frac{۱}{p}) \\ &\le \log D + \sum_{\text{اول } p, p \le n} \frac{۱}{p} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\sum_{p \le n} \frac{۱}{p} \ge \log\log (n+۱) - \log \frac{\pi^{۲}}{۶}$$

حالا بدیهی است که سری $\sum_{\text{اول } p} \frac{۱}{p}$ واگراست زیرا $\log\log n \to \infty$ وقتی $n \to \infty$.

حالا که با حقیقت $\sum_{\text{اول } p} \frac{۱}{p} = \infty$ آشنا شدیم، به بررسی دنباله‌ی $\{\frac{\phi(n)}{n} = \prod_{\text{اول } p, p|n} (۱ - \frac{۱}{p})\}_{n=۱}^{\infty}$ برمی‌گردیم.

می‌خواهیم ثابت کنیم $\{\frac{\phi(n)}{n}\}_{n=۱}^{\infty}$ در $[۰,۱]$ چگال است. توجه کنید:

$$\log \prod_{\text{اول } p}(۱-\frac{۱}{p}) = \sum_{\text{اول } p} \log(۱-\frac{۱}{p})$$
$$\leq -\sum_{\text{اول } p}\frac{۱}{p} = -\infty$$

(طبق نامساوی $۱-x \leq e^{-x}$ داریم $\log(۱-\frac{۱}{p}) \leq -\frac{۱}{p}$)

بنابراین $\prod_{\text{اول } p}(۱-\frac{۱}{p}) = ۰$. (چون این حاصل‌ضرب یا صفر است و یا مثبت است و حتما همگراست، چون نزولی و همواره نامنفی است.) این نتیجه می‌دهد که برای هر N، $\prod_{p\geq N \text{ و } \text{اول } p}(۱-\frac{۱}{p}) = ۰$. در غیر این‌صورت اگر به ازای یک N، $\prod_{p\geq N \text{ و } \text{اول } p}(۱-\frac{۱}{p}) > \epsilon$، و $p_۱,\ldots,p_t$ اعداد اول کوچک‌تر از N باشند،

$$۰ = \prod_{p}(۱-\frac{۱}{p}) = \prod_{i=۱}^{t}(۱-\frac{۱}{p_i}) \times \prod_{p\geq N \text{ و } \text{اول } p}(۱-\frac{۱}{p})$$
$$> \epsilon\prod_{i=۱}^{t}(۱-\frac{۱}{p_i}) > ۰$$

حالا $\epsilon > ۰$ دلخواهی در نظر بگیرید و $x \in [۰,۱]$ را دلخواه بگیرید.

از آن‌جا که تعداد اعداد اول نامتناهی است، N را می‌توان چنان بزرگ گرفت که برای هر عدد اول $p \geq N$، $۱-\frac{۱}{p} > ۱-\epsilon$.

حالا $N \leq q_۱ < q_۲ < q_۳ < \cdots$ را دنباله‌ی تمامی اعداد اول بزرگ‌تر یا مساوی N بگیرید و دنباله‌ی $a_i = \prod_{j=۱}^{i}(۱-\frac{۱}{q_j})$ را در نظر بگیرید. واضح است که $۰ < a_i < ۱$ و a_iها نزولی اکیداند و در ضمن

$$\lim_{i\to\infty} a_i = \prod_{j=۱}^{\infty}(۱-\frac{۱}{q_j}) = \prod_{q\geq N \text{ و } \text{اول } q}(۱-\frac{۱}{q}) = ۰$$

هم‌چنین

$$|۱-a_۱| = |\frac{۱}{q_۱}| < \epsilon$$

و برای هر i،

$$|a_i - a_{i+۱}| = |a_i(۱-\frac{a_{i+۱}}{a_i})|$$
$$= |a_i(۱-(۱-\frac{۱}{q_{i+۱}}))| \leq \epsilon$$

و از آن‌جا که حد a_iها صفر است، tای وجود دارد که $|a_t| < \epsilon$. بنابراین اگر $a_۱,\ldots,a_t$ را روی بازه‌ی $[۰,۱]$ علامت بزنیم، فاصله‌ی $a_۱$ با ۱ بسیار اندک (کمتر از ϵ) است و فاصله‌ی a_t با صفر نیز بسیار اندک (کمتر از ϵ) است و در ضمن برای هر i، فاصله‌ی a_i و $a_{i+۱}$ بسیار اندک (کمتر از ϵ) است.

حال بنابر بالا بازه‌هایی $[۰,a_t], [a_t,a_{t-۱}], \ldots, [a_۲,a_۱], [a_۱,۱]$ به طول کمتر از ϵ هستند که کل بازه‌ی $[۰,۱]$ را می‌پوشانند. پس یکی از a_jها در ϵ-همسایگی $x \in [۰,۱]$ می‌افتد. اما a_j چیزی نیست جز عددی به صورت

$$a_j = \prod_{i=۱}^{j}(۱-\frac{۱}{q_i})$$

که q_iها اعداد اول متمایزند. بنابراین اگر قرار دهید

$$n = q_۱ \times \cdots \times q_s$$

داریم

$$\frac{\phi(n)}{n} = a_j$$

پس $\{\frac{\phi(n)}{n}\}_{n=۱}^{\infty}$ مقادیری به دلخواه نزدیک x می‌گیرد یعنی $\{\frac{\phi(n)}{n}\}_{n=۱}^{\infty}$ در $[۰,۱]$ چگال است.

سوال جالب: آیا توزیع $\{\frac{\phi(n)}{n}\}_{n=۱}^{\infty}$ در $[۰,۱]$ یکنواخت است؟ اصلا توزیع $\{\frac{\phi(n)}{n}\}_{n=۱}^{\infty}$ در $[۰,۱]$ چیست؟ به عبارت دقیق‌تر آیا یک تابع چگالی احتمال مانند P روی $[۰,۱]$ وجود دارد که برای هر بازه‌ی $(\alpha,\beta) \subset [۰,۱]$،

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\#\{n : \frac{\phi(n)}{n} \in (\alpha,\beta) \text{ و } ۱\leq n\leq m\}}{m}$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} P(u)\mathrm{d}u$$

(در این‌جا $\#A$ همان تعداد اعضای مجموعه‌ی A است.)

اگر پاسخ این سوال را پیدا کردید می‌توانید راه‌حل خود را یا تنها ایده‌ی خود را با ما در میان بگذارید.

(mathsimpleideas@gmail.com)

مراجع

[1] Martin Aigner, Gunter M. Ziegler, Proofs from the Book, Springer

[2] P. Erdos, Uber die Reihe $\sum_{p \text{ prime}} \frac{1}{p}$, Mathematica, Zutphen B7 (1938),1-2

[3] L. Euler, Introduction in Analysisin Infinitorum, Tomas Primus, Lausanne 1748, Opera Omnia, Ser. 1, Vol 90.

[4] Wikipedia, Divergence of the sum of the reciprocals of the Prime Numbers