هندسه جبری چیست؟
دکتر امیر جعفری

هندسه‌ی جبری این شهرت را دارد که رشته‌ایست پیچیده، محرمانه و بسیار مجرد که طرفدارانش به طور سری در حال نقشه‌ریزی برای تصرف بقیه‌ی ریاضیات هستند و به نوعی این نکته آخر درست است.[1]

۱ مقدمه

هندسه جبری به عنوان تلفیقی از هندسه و جبر با معرفی دستگاه مختصات توسط دکارت و فرما در قرن هفدهم به طور مشخص به وجود آمد. استفاده از اعداد برای بیان خواص هندسی اشیاء که ما آن را امروزه امری کاملا طبیعی و بدیهی می‌گیریم، در واقع آن‌چنان بدیهی نیز نمی‌باشد. هرمان وایل ریاضی‌دان بزرگ آلمانی گفته است:

"معرفی عدد به عنوان مختصات یک عمل خشونت‌آمیز است."

اقلیدس در کتاب اصول خود وقتی خواص هندسی دایره را بررسی می‌کرد و یا تلاش می‌نمود تا اعداد گویای x و y با $x^2+y^2=1$ را پیدا کند، از این که این دو مساله به هم مربوطند بی‌اطلاع بود.

نوشتن دایره به صورت معادله‌ی $x^2+y^2=1$ مزایایی نیز دارد. مثلا دایره‌ی معمولی به مرکز مبدا و شعاع واحد، مجموعه جواب‌های معادله‌ی $x^2+y^2=1$ برای x و y حقیقی است. ولی به سادگی می‌توان در مورد جواب‌های معادله در اعداد گویا، یا یک میدان دلخواه و حتی در یک حلقه‌ی دلخواه مطالعه کرد و احتمالا شهود هندسی می‌تواند به بررسی این مسائل جبری کمک کند. با توجه به این‌که معادله‌ی $x^2+y^2=1$ ضرایب گویا دارد، نقاط دایره‌ی واحد برای $x,y\in\mathbb{R}$ مجهز به عمل گروه گالوای $Gal(\mathbb{R}/Q)$ خواهد بود: اگر $\sigma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک یکریختی میدان‌ها باشد، اگر (x,y) در معادله صدق کند آن‌گاه $(\sigma x,\sigma y)$ نیز صدق می‌کند.

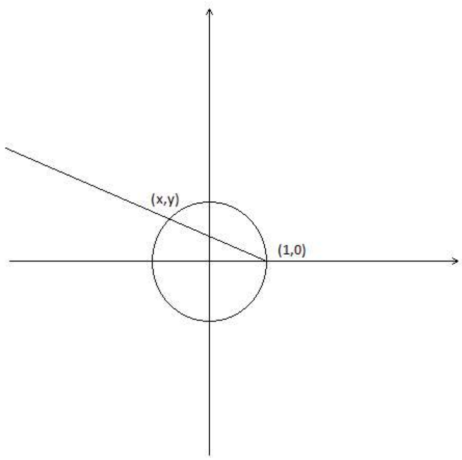
۲ پرمایش گویا

محاسبه‌ی همه‌ی نقاط گویای روی دایره‌ی $x^2+y^2=1$ به یونان باستان و دیوفانتوس باز می‌گردد. ایده‌ی او برای محاسبه این نقاط با استفاده از دستگاه مختصات به سادگی قابل بیان است. یک جواب بدیهی این معادله نقطه‌ی $(1,0)$ است. حال اگر (x,y) یک نقطه‌ی گویای دیگر باشد، شیب خط واصل بین این دو نقطه $\frac{y}{x-1}$ عددی گویا مانند t است، پس اگر به جای y در معادله $t(x-1)$ قرار داده شود:

$$x^2+t^2(x^2-2x+1)=1$$

$$(1+t^2)x^2-2t^2x+t^2-1=0$$

یک جواب این معادله $x=1$ است که متعلق به نقطه‌ی $(1,0)$ است، چون ضرب ریشه‌ها $\frac{t^2-1}{t^2+1}$ است، پس ریشه‌ی دیگر $x=\frac{t^2-1}{t^2+1}$ است و $y=t(x-1)=\frac{-2t}{t^2+1}$. پس $(\frac{t^2-1}{t^2+1},\frac{-2t}{t^2+1})$ همه‌ی نقاط گویای روی دایره را به جز $(1,0)$ به ما می‌دهد.



این روش را می‌توان برای محاسبه‌ی تمام نقاط گویای روی خم $f(x,y)=0$ که f یک چندجمله‌ای درجه‌ی ۲ و با ضرایب گویا است، به کار برد. تنها نکته یافتن حداقل یک نقطه با مختصات گویا روی این خم است که لزوما وجود ندارد (مثلا $x^2+y^2=-1$ را در نظر بگیرید. مثال کمی مشکل‌تر $x^2+y^2=3$).

خط واصل بین نقطه‌ی گویای (x_0,y_0) و نقطه‌ی گویای دلخواه دیگر مانند (x,y) دارای شیب گویای $t=\frac{y-y_0}{x-x_0}$ است. با جایگذاری $y=t(x-x_0)+y_0$ در معادله $f(x,y)=0$ به یک معادله درجه ۲ برحسب x و ضرایب برحسب t می‌رسیم. یکی از ریشه‌ها x_0، عددی گویا است و چون حاصل‌ضرب ریشه‌ها برحسب عبارت گویایی از t قابل بیان است، ریشه‌ی دیگر نیز عبارتی گویا برحسب t می‌شود، یعنی $x=\phi(t)$ که ϕ خارج‌قسمت دو چندجمله‌ای است و مشابها $y=\psi(t)$ به دست می‌آید. با این روش تمام نقاط گویای روی $f(x,y)=0$ به جز نقطه‌ی (x_0,y_0) به دست می‌آید.

اگر $\mathbb{A}^1$ را خط یک بعدی (آفین) و X را جواب‌های معادله‌ی

[1] دیوید مامفورد

$f(x,y)=0$ در فضای دوبعدی $\mathbb{A}^2$ بگیریم، با این روش دو تابع:

$$F:\mathbb{A}^1\to X$$

$$t\mapsto(\phi(t),\psi(t))$$

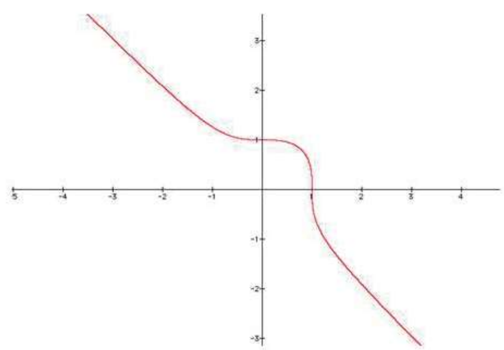
و

$$G:X\to\mathbb{A}^1$$

$$(x,y)\mapsto \frac{y-y_0}{x-x_0}$$

با استفاده از توابع گویا (خارج‌قسمت دو چندجمله‌ای) تعریف کرده‌ایم که روی همه‌ی نقاط به جز یک تعداد متناهی از نقاط تعریف شده‌اند. به طور فنی می‌گوییم X با $\mathbb{A}^1$ به طور دوگویا هم‌ارز[۲] است.

اگر جواب‌ها را در یک میدان بسته‌ی جبری، مثلا $\mathbb{C}$ در نظر بگیریم، شرط وجود حداقل یک جواب برای معادله‌ی $f(x,y)=0$ زائد خواهد بود و در واقع ثابت کرده‌ایم هر معادله‌ی درجه ۲ به طور دوگویا با $\mathbb{A}^1$ روی اعداد مختلط هم‌ارز است. ولی این حکم برای معادلات درجه بالاتر درست نیست. مثلا نشان می‌دهیم معادله‌ی $x^3+y^3=1$ (خم فرمایی) به طور دوگویا با $\mathbb{A}^1$ هم‌ارز نیست.



اگر $x^3+y^3=1$ با $\mathbb{A}^1$ به طور دوگویا هم‌ارز باشد، چندجمله‌ای‌های $a(t)$، $b(t)$ و $c(t)$ که دوبه‌دو نسبت به هم اولند و غیرثابت هستند یافت می‌شوند که $a(t)^3+b(t)^3=c(t)^3$. با مشتق‌گیری به دست می‌آید:

$$3a^2(t)a'(t)+3b^2(t)b'(t)=3c^2(t)c'(t)$$

بنابراین $a^2(t)=\frac{c^2(bc'-b'c)}{a'b-ab'}$. بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد $\deg a\geq \deg b\geq \deg c$ که با $a^2|bc'-b'c$ در تناقض است. همین استدلال برای $x^n+y^n=1$ به شرط آن‌که $n\geq 3$ باشد، نیز کار می‌کند.

[۲] birational equivalency

۳ قضیه بزو

این قضیه در حالت ساده می‌گوید:

> اگر $f(x,y)$ و $g(x,y)$ دوچندجمله‌ای از درجات n و m باشند که عامل مشترکی ندارند، آن‌گاه تعداد نقاط تلاقی $f(x,y)=0$ و $g(x,y)=0$ حداکثر $m.n$ است.

ضرایب و جواب‌ها در یک میدان دلخواه K در نظر گرفته می‌شود (برای سادگی فرض می‌کنیم K از مشخصه‌ی صفر است). در حالتی که $m=n=1$، این قضیه بیان‌گر این حقیقت ساده‌ی هندسی است، که دو خط راست همدیگر را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کنند، مگر آن‌که بر هم منطبق باشند، است. در حالت تباهیده که f حاصل‌ضرب n عامل درجه‌ی ۱ و g حاصل‌ضرب m عامل درجه ۱ باشد، نقاط تلاقی از برخورد یکی از n خط در f با یکی از m خط در g به دست می‌آیند و بنابراین حداکثر mn نقطه‌ی تلاقی وجود خواهد داشت.

اگر بخواهیم صورت دقیق‌تر قضیه‌ی بزو را بیان کنیم، نیاز به چند نکته داریم. اولا باید جواب‌ها را در فضایی بررسی کنیم که هر دو خط راست یا دقیقا در یک نقطه تلاقی داشته باشند و یا منطبق باشند. به بیان دیگر باید برای هر راستای خطوط موازی یک نقطه در بی‌نهایت به صفحه اضافه کنیم. این صفحه‌ی تعمیم یافته را صفحه‌ی تصویری یا $\mathbb{P}^2_K$ می‌نامند. نقاط این فضا، خطوط گذرا از مبدا در K^3 هستند. به طور دقیق‌تر نقاط این فضا کلاس‌های هم‌ارزی سه‌تایی‌های (x,y,z) هستند که هرسه همزمان صفر نباشند و:

$$(x,y,z)\sim(x',y',z')$$

$$\iff \exists\lambda\in K-\{0\}: x=\lambda x', y=\lambda y', z=\lambda z'$$

این کلاس‌های هم‌ارزی را به $[x:y:z]$ نشان می‌دهیم. اگر $z\neq 0$ آن‌گاه این نقاط را می‌توان با نقاط صفحه $(\frac{x}{z},\frac{y}{z})$ یکی کرد. اگر $z=0$ آن‌گاه نقاط $[x:y:0]$ همان نقاط بی‌نهایت برای هر راستای خطوط موازی خواهند بود. هر نقطه‌ی $[a:b:0]$ راستای موازی خطوط $ax+by=c$ را مشخص می‌کند. مشابها، می‌توان فضای تصویری n بعدی $\mathbb{P}^n$ را معرفی کرد و صفرهای مشترک چندجمله‌ای‌های همگن $f_i(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ را در $\mathbb{P}^n$ بررسی کرد. این مجموعه‌ها را واریته‌ی تصویری می‌نامند.

نکته‌ی دیگری که باید در بیان صورت دقیق قضیه‌ی بزو لحاظ کرد، این است: در حالتی که تلاقی f از درجه‌ی n با یک خط مدنظرمان باشد، باید یک معادله‌ی درجه‌ی n با یک متغیر را حل کنیم. این معادله دقیقا n جواب خواهد داشت اگر:

۱. میدان زمینه بسته‌ی جبری باشد مثلا $\mathbb{C}$.

۲. جواب‌ها را با احتساب تکرر آن‌ها بشماریم.

بنابراین صورت دقیق قضیه‌ی بزو با تغییر مفهوم تکرر از یک متغیر به دو متغیر قابل بیان خواهد بود:

قضیه ۱. *اگر $f(x,y,z)$ و $g(x,y,z)$ دو چندجمله‌ای همگن از درجات n و m باشند که عامل مشترکی نداشته باشند، آن‌گاه تعداد جواب‌های دستگاه $f=0, g=0$ در $\mathbb{P}^2_K$ (K: یک میدان بسته‌ی جبری) با احتساب تکرر دقیقا برابر $n.m$ خواهد بود.*

توضیح مختصری در مورد چگونگی شمردن تکرر برخورد دو خم می‌دهیم: فرض کنید $f(x,y,z)$ و $g(x,y,z)$ چندجمله‌ای‌های همگنی از درجات به ترتیب n و m باشند که هیچ عامل مشترکی ندارند. می‌خواهیم تکرر جواب $[a:b:c]\in\mathbb{P}^2_K$ از دستگاه $f=g=0$ را معرفی کنیم. با یک تغییر مختصات خطی در $\mathbb{P}^2_K$ در صورت لزوم، می‌توان فرض کرد که تمامی جواب‌های از این دست شرط $a\neq 0$ را برآورده می‌کنند. با در نظر گرفتن $f(x,y,z)$ و $g(x,y,z)$ به عنوان چندجمله‌ای‌هایی که از z و با ضرایب در $K[x,y]$، مبین[3] آن‌ها یک چندجمله‌ای همگن از درجه‌ی mn مانند $r(x,y)\in K[x,y]$ خواهد بود که متحد با صفر نیست، چرا که در غیر این صورت $f(x,y,z)$ و $g(x,y,z)$ در $K[x,y,z]$ عامل مشترک خواهند داشت. حال چندجمله‌ای $r_*(T)\in K[T]$ از درجه‌ی nm موجود است به قسمی که: $r(x,y)=x^{mn}r_*(\frac{y}{x})$. تکرر $[a:b:c]$ در تقاطع $f=0$ و $g=0$ را برابر تکرر ریشه‌ی $\frac{b}{a}$ از $r_*(T)$ می‌گیریم (توجه کنید که $a\neq 0$ بود و چون $f(a,b,c)=g(a,b,c)=0$، برای مبین f و g داریم $r(a,b)=0$ و از آن‌جا $r_*(\frac{b}{a})=0$.) و اکنون قضیه‌ی بزو به این حکم تقلیل می‌یابد که چندجمله‌ای درجه‌ی nm، $r_*(T)$ با ضرایب در میدان بسته‌ی جبری K، با حساب تکرر nm ریشه دارد که این هم بدیهی است.

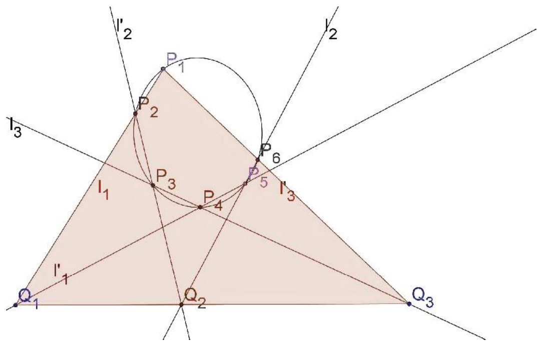
اکنون، قبل از آن‌که به اثبات قضیه‌ی بزو بپردازیم، دو کاربرد از آن را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲. (قضیه پاسکال) *فرض کنید $P_1,P_2,\dots,P_6$ نقاطی روی دایره (به ترتیب) باشند و Q_i نقطه‌ی تلاقی P_iP_{i+1} و $P_{i+3}P_{i+4}$ (با جایگشت دوری) باشد. آن‌گاه Q_1، Q_2 و Q_3 روی یک خط راست واقعند.*

l_1، l_2 و l_3 را خطوط P_1P_2، P_5P_6 و P_3P_4 و مشابها l'_1، l'_2 و l'_3 را خطوط مقابل P_4P_5، P_2P_3 و P_1P_6 بنامید. برای هر λ معادله‌ی درجه۳:

$$(*) l_1l_2l_3+\lambda l'_1l'_2l'_3$$

[3] resultant



از نقاط $P_1,\dots,P_6$ و Q_1,Q_2,Q_3 می‌گذرد. نقطه‌ی هفتم P_7 را روی دایره متمایز از ۶ نقطه‌ی اول انتخاب کنید و λ را طوری انتخاب کنید که از این نقطه‌ی ۷ام بگذرد. در این صورت معادله‌ی دایره (یک معادله درجه ۲) و معادله‌ی درجه ۳ $(*)$ در هفت نقطه اشتراک دارند و بنابر قضیه‌ی بزو باید عامل مشترکی داشته باشند. بنابراین معادله‌ی $(*)$ به صورت حاصل‌ضربی از معادله‌ی دایره و یک معادله‌ی درجه یک (یک خط) می‌باشد. چون نقاط Q_1,Q_2,Q_3 روی دایره نیستند، پس همگی در این معادله درجه یک صدق می‌کنند و بنابراین روی یک خط راست هستند.

۴ شرکت‌پذیری جمع در یک خم بیضوی

منظور از یک خم بیضوی، معادله‌ای به شکل زیر است:

$$y^2=x^3+ax+b$$

که a و b در میدان زمینه‌ی K قرار دارند و خم ناتکین است. این معادل با این است که معادله‌ی $x^3+ax+b=0$ ریشه‌ی مکرر نداشته باشد و یا معادلا $4a^3+27b^2$ ناصفر باشد. بهتر است این خم را در فضای تصویری $\mathbb{P}^2(K)$ در نظر بگیریم که در واقع در این صورت یک نقطه در بی‌نهایت به این خم اضافه می‌شود و معادله‌ی آن به طور همگن شده به صورت زیر در می‌آید:

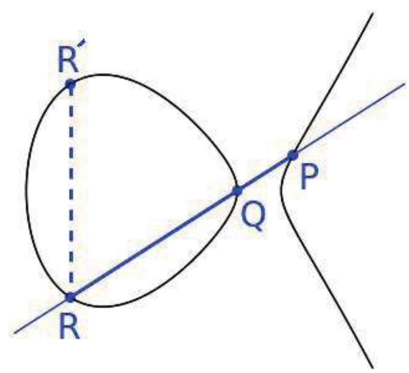
$$y^2z=x^3+axz^2+bz^3 \qquad (1)$$

فضای تصویری $\mathbb{P}^n$ کلاس هم‌ارزی $n+1$تایی‌های مرتب $(x_0,x_1,\dots,x_n)$ است که همگی با هم صفر نیستند. دو نقطه‌ی $(x_0,x_1,\dots,x_n)$ و $(y_0,y_1,\dots,y_n)$ هم‌ارز هستند هرگاه مضربی از یکدیگر باشند. بنابراین هر چندجمله‌ای همگن و یا یک خانواده از چندجمله‌ای‌های همگن از $n+1$ متغیر می‌تواند یک زیرمجموعه متشکل از صفرهای مشترک آن‌ها از $\mathbb{P}^n$ تعریف کند که به این گونه زیرمجموعه‌ها، واریته‌های تصویری می‌گوییم. $\mathbb{P}^n$ اجتماع زیرمجموعه‌هایی که هر کدام با فضای آفین یکریختند می‌باشد. به

طور دقیق‌تر اگر $x_i \neq 0$، آن‌گاه می‌توان بر x_i تقسیم کرد و نقطه‌ای از $\mathbb{A}^n$ یافت.

اگر P و Q دو نقطه از خم بیضوی ۱ باشند، آن‌گاه خط واصل بین P و Q این خم را دقیقا در یک نقطه‌ی دیگر R قطع می‌کند. دلیل این امر این است که اگر معادله‌ی پارامتری خط واصل بین P و Q را در معادله جایگزین کنیم، یک معادله درجه ۳ برحسب پارامتر به دست می‌آید که دو جواب آن در K است. پس جواب سوم آن نیز در K خواهد بود. اگر R' را قرینه R نسبت به محور xها بگیرید (در واقع R' نقطه‌ی تلاقی خط واصل بین R و نقطه‌ی بی‌نهایت O با خم بیضوی است) تعریف می‌کنیم:

$$P \oplus Q = R'$$



به سادگی می‌توان تحقیق کرد که این یک عمل جابه‌جایی است که دارای عضو خنثی O است و $R \oplus R' = O$. تنها اصل نابدیهی در گروه‌ها برای این عمل شرکت‌پذیری آن است یعنی:

$$(P \oplus Q) \oplus T = P \oplus (Q \oplus T)$$

این حکم به سادگی از لم زیر که خود نتیجه‌ای از قضیه‌ی بزو است، نتیجه می‌شود:

لم ۳. *اگر ۸ نقطه در $\mathbb{P}^2$ داده شده باشند که هیچ چهارتایی روی یک خط راست و هیچ هفت‌تایی روی یک خم مخروطی (درجه ۲) قرار نداشته باشند آن‌گاه می‌توان یک نقطه‌ی نهمی یافت که هر خم بیضوی (درجه ۳) که از این ۸ نقطه می‌گذرد، از این نقطه‌ی نهم نیز بگذرد.*

طرحی از اثبات: یک معادله درجه ۳ همگن مانند $F(x_0, x_1, x_2)$ از ۱۰ ضریب تشکیل شده است. بنابراین اینکه این خم از ۸ نقطه بگذرد هنوز دو درجه آزادی روی F می‌گذارد، یعنی می‌توان دو خم مکعبی F_1 و F_2 یافت به قسمی که همه‌ی خم‌های دیگر از این دست به شکل $\alpha F_1 + \beta F_2$ باشند. حال بنابر قضیه‌ی بزو F_1 و F_2 یکدیگر را در ۹ نقطه قطع می‌کنند که ۸ نقطه‌ی آن از قبل داده شده است و این نقطه‌ی آخر جواب مساله است.

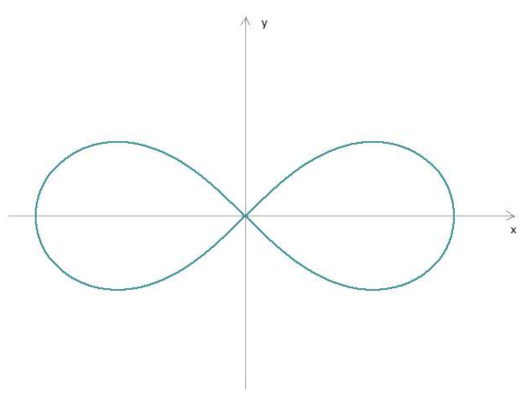
۵ انتگرال‌های جبری و رویه‌های ریمانی

شاید به نظر عجیب بیاید ولی یکی دیگر از منابع الهام برای هندسه جبری، حساب دیفرانسیل و انتگرال بوده است. از آغاز تعریف انتگرال توسط نیوتن و لایب‌نیتز، محاسبه‌ی انتگرال‌های توابع به طور صریح یکی از مشغله‌های ریاضیدانان بوده است. اگر

$$f(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$$

یک تابع گویا از t باشد (یعنی P و Q دو چندجمله‌ای باشند) آن‌گاه ریاضیدانان قرن ۱۷ و اوایل قرن ۱۸ می‌دانستند چگونه $\int f(t)\mathrm{d}t$ را با استفاده از روش تفکیک کسرها برحسب چندجمله‌ای‌ها و توابع لگاریتمی محاسبه کنند. بنابراین اگر x و y در معادله‌ای درجه ۲ صدق کنند، با روشی که در آغاز این مقاله به آن اشاره شد، چون می‌توان x و y را برحسب یک پارامتر گویا از t نوشت، پس انتگرال‌های از نوع $\int f(x,y)\mathrm{d}x$ قابل محاسبه خواهند بود. بررسی خواص انتگرال‌هایی از این جنس ولی برای وقتی که رابطه‌ی بین x و y از درجه بیشتر از ۲ است به خاطر محاسباتی از قبل، محیط بیضی و دیگر خم‌ها (مانند لمنیسکات) توسط ریاضیدانانی از قبیل برنولی، فاگتانو و اویلر، لاگرانژ، لژاندر و در نهایت آبل بررسی شد، که آبل در واقع جوابی کامل و جامع برای این مساله یافت.

یاکوب برنولی در سال ۱۶۹۴ به بررسی محاسبه محیط لمنیسکات –خمی که توسط معادله‌ی $(x^2+y^2) = x^2 - y^2$ داده می‌شود– پرداخت. این خم نمودار زیر را دارد:



یک محاسبه‌ی ساده برای محاسبه‌ی این محیط به محاسبه‌ی انتگرالی به شکل

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$$

منجر می‌شود. در سال ۱۷۱۸، فاگتانو موفق شد که فرمول زیر را

برای انتگرال ثابت کند:

$$2\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^{\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$$

اویلر با معادله این اثر فاگنانو موفق به تعمیم این فرمول شد. این اثر اویلر در ۱۷۶۸ چاپ شد:

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^{g(x,y)} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$$

که $g(x,y)$ به طور صریح به صورت

$$g(x,y) = \frac{x\sqrt{1-y^4}+y\sqrt{1-x^4}}{1+x^2y^2}$$

قابل محاسبه است. شاید جالب باشد که ارتباط این فرمول با جمع نقاط در یک خم بیضوی مطرح شود. معادله‌ی $y^2 = 1-x^4$ هرچند به شکل یک معادله مکعبی نیست ولی با یک تبدیل متغیر می‌تواند به آن تبدیل می‌شود: (راهنمایی: بگیرید $X = \frac{1}{x-1}$ و $Y = \frac{y}{(x-1)^2}$) بنابراین معادله‌ی $y^2 = 1-x^4$ یک خم بیضوی است که می‌توان نقاط آن‌را به یک گروه آبلی تبدیل کرد. ۱-فرم دیفرانسیل $\frac{\mathrm{d}x}{y}$ (که همان $\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$ است) تحت عمل این گروه ناوردا است. (چرا؟)

حال می‌توان محاسبه کرد که:

$$(x,\sqrt{1-x^4}) \oplus (y,\sqrt{1-y^4}) = (g(x,y),\sqrt{1-g(x,y)^4})$$

پس:

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{y} + \int_0^y \frac{\mathrm{d}x}{y} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{y} + \int_x^{x\oplus y} \frac{\mathrm{d}x}{y} = \int_0^{g(x,y)} \frac{\mathrm{d}x}{y}$$

توجه کنید که این فرمول‌ها (یعنی فرمول فاگنانو و اویلر) مشابه فرمول‌های مثلثاتی:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$\begin{aligned}\sin(\theta_1+\theta_2) &= \sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1\\ &= \sin\theta_1\sqrt{1-\sin^2\theta_2} + \sin\theta_2\sqrt{1-\sin^2\theta_2}\end{aligned}$$

است چرا که اگر $x = \sin\theta$ آن‌گاه $\theta = \arcsin x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ پس فرمول‌های بالا تبدیل می‌شوند به

$$2\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{2x\sqrt{1-x^2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

بنابراین طبیعی است که به جای انتگرال‌هایی از نوع $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$ وارون آن‌ها بررسی شود. (sin تابعی بهتر از arcsin است حداقل sin تابعی متناوب است!)

در واقع گاوس در دفترچه‌ی خود فرمولی مبنی بر محاسبه‌ی دوره‌ی تناوب وارون تابع $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$ دارد. او ثابت کرد اگر $sl(x)$ این تابع باشد (sl برای سینوس لمنیسکاتی) آن‌گاه

$$sl(x+\omega) = sl(x+i\omega) = sl(x)$$

که $\omega = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$ (توجه کنید که $2\pi = 4\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ دوره تناوب sin است.)

آبل جوان از ۱۸۲۶ تا ۱۸۲۹ تحقیقاتی بسیار عمیق درباره‌ی انتگرال‌هایی از نوع فوق که امروزه به آن‌ها انتگرال‌های آبلی می‌گوییم انجام داد. متاسفانه این اثر که در ۱۸۲۶ به آکادمی فرانسه فرستاده شده بود به علت بی‌توجهی ریاضیدانان آن زمان، سال‌ها بعد از مرگ آبل در سال ۱۸۴۱ به چاپ رسید. ژاکوبی در نامه‌ای به لژاندر به تاریخ ۱۹ مارس ۱۸۲۹ می‌نویسد:

" چه اکتشاف بزرگی، تعمیم آبل از انتگرال اویلر! هرگز من چیزی به این زیبایی ندیده‌ام! اما چگونه است که این کشف که به احتمال زیاد بزرگترین کشف در ریاضیات این قرن است و به آکادمی شما سال‌ها قبل فرستاده شده است، از دید شما و همکارانتان دور مانده است؟ "

بگذارید قبل از این که فرمول آبل را بیان کنیم به مثالی از آن بپردازیم.

اگر بخواهیم فرمول‌هایی مانند اویلر و فاگنانو برای انتگرال‌های مشابهی مانند $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^6}}$ بیابیم، می‌توان ثابت کرد در حالت کلی نمی‌توان انتظار داشت که:

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^6}} + \int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^6}} = \int_0^{g(x,y)} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^6}}$$

اما چیزی که آبل ثابت کرد، این بود که در حد یک تعداد عامل مقدماتی (یعنی توابعی گویا، جبری و یا لگاریتمی) هر جمع متناهی

$$\int_0^{x_1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^6}} + \cdots + \int_0^{x_m} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^6}}$$

را می‌توان به صورت جمع دو انتگرال $\int_0^{g_1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^6}} + \int_0^{g_2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^6}}$ که g_1 و g_2 توابعی جبری از $x_1,\ldots,x_m$ هستند، نوشت. حال می‌توان فرمول کلی را بیان کرد.

قضیه ۴. (قضیه آبل) *برای انتگرال* $\int f(x,y)\mathrm{d}x$ *که* x *و* y *در یک رابطه‌ی جبری* $P(x,y)=0$ *صدق کند، می‌توان عدد صحیح* g *که تنها به* P *بستگی دارد را یافت که هر انتگرال به فرم*

$$\int_0^{x_1} f(x,y)\mathrm{d}x + \cdots + \int_0^{x_m} f(x,y)\mathrm{d}x$$

را می‌توان به شکل حداکثر g *انتگرال (البته دوباره در حد یک تعداد عامل مقدماتی)*

$$\int_0^{z_1} f(x,y)\mathrm{d}x + \cdots + \int_0^{z_g} f(x,y)\mathrm{d}x$$

نوشت که z_iها توابعی جبری از $x_1, \dots, x_m$ هستند.

بعدها ریمان عدد g را به صورت گونای خم جبری (یا همان رویه‌ی ریمانی) که معادله $P(x,y) = 0$ تعریف می‌کند، تعبیر کرد. در واقع اگر این معادله را در $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (البته با اغماض! چرا که ممکن است در متناهی نقطه تکینگی داشته باشد) در نظر بگیریم، شکلی مانند زیر خواهد بود:

که تعداد سوراخ‌ها، همان گونا است!