پاسخ مسأله‌ها

خشایار فیلُم

پاسخ ۱. قسمت الف: *طبق قضیه‌ی دوم سیلو، هر دو ۷-زیرگروه سیلو از G مزدوج هستند. پس تعداد ۷-زیرگروه‌های سیلوی G برابر است با تعداد مزدوج‌های P در G یعنی $[G:N_G(P)]=[G:N]$ (از نمادگذاری معمول استفاده می‌کنیم که در آن برای زیرگروه K از گروه H، نرمال‌ساز K در H به $N_H(K)$ نشان داده می‌شود.) و بنابراین $[G:N]=50$. برهان خلف: فرض کنید N در G ماکسیمال نباشد. پس زیرگروه M از G موجود است که*

$$N \lneq M \lneq G$$

۷-زیرگروه سیلوی P از گروه متناهی G مشمول در زیرگروه M از G است و لذا یک ۷-زیرگروه سیلو از آن خواهد بود. دوباره با به کار بردن قضیه‌ی دوم سیلو، هر دو ۷-زیرگروه سیلو از M مزدوجند و لذا تعدادشان برابر است با $[M:N_M(P)]$، عددی که باید به پیمانه‌ی ۷ همنهشت با یک باشد، چرا که بنابر قضیه‌ی سوم سیلو، تعداد ۷-زیرگروه‌های سیلوی M به پیمانه‌ی ۷ برابر یک است. از طرف دیگر با توجه به تعریف نرمال‌ساز: $N_M(P)=N_G(P)\cap M$ و بنابراین چون $N_G(P)=N\lneq M$: $N_M(P)=N$. پس

$$[M:N]\equiv 1 \mod 7$$

این در حالی است که $[M,N]\in\{2,5,10,25\}$، زیرا به دلیل $N\lneq M\lneq G$، $[M:N]$ باید مقسوم‌علیه‌ای نابدیهی از $[G:N]=50$ باشد. پس به تناقض رسیده‌ایم و قسمت اول مسأله حل شد.

قسمت ب: *$Q\lhd N$ و در نتیجه $N<N_G(Q)$. ولی از قسمت قبل، N در G ماکسیمال است پس یا $N_G(Q)=G$ یا اینکه $N_G(Q)=N$. اگر حالت اول رخ دهد که $Q\lhd G$ و حکم ثابت می‌شود. پس فرض کنید حالت دوم رخ دهد و $N_G(Q)=N$. Q یک ۵-زیرگروه از گروه متناهی G است و لذا بنابر قضیه‌ای: $[G:Q]\equiv[N_G(Q):Q] \mod 5$، که نتیجه می‌دهد: $[G:Q]\equiv[N:Q] \mod 5$. ولی چون Q یک ۵-زیرگروه سیلو از N بود: $5\nmid[N:Q]$ که با همنهشتی‌ای که حاصل شد در تناقض است، چرا که به دلیل $Q<N<G$، $[G:N]=50$ باید $[G:Q]$ را بشمارد.*

پاسخ ۲. *یک عنصر $\tilde{s}$ از S تثبیت کنید. برای هر عدد طبیعی k، نگاشت*

$$\begin{cases} S^{(k)}\to S^{(k+1)}\\ x\mapsto \tilde{s}x\end{cases}$$

با توجه به تعریف $S^{(k)}$ و $S^{(k+1)}$ در صورت مسأله به عنوان مجموعه‌ی عناصری از G که ضرب به ترتیب k و $k+1$ تا از اعضای S هستند، خوش‌تعریف و به دلیل برقرار بودن ویژگی حذف از چپ در گروه G، یک‌به‌یک است. پس $|S^{(k)}|\le|S^{(k+1)}|$. حال توجه کنید که:

$$0<|S=S^{(1)}|\le|S^{(2)}|\le\cdots\le|S^{(n)}|\le|G|=n$$

پس یا $|S^{(n)}|=n$ و به ناچار $S^{(n)}=G$ که در این حالت زیرگروه بودن $S^{(n)}$ بدیهی است یا اینکه اعداد $|S^{(1)}|\le\cdots\le|S^{(n)}|$ همگی در $\{1,\dots,n-1\}$ واقع‌اند و بنابراین به ازای $1\le k<n$ ای

$$|S^{(k)}|=|S^{(k+1)}|$$

نشان می‌دهیم که در حالت اخیر، باز هم $S^{(n)}$ زیرگروهی از G خواهد بود. گفتیم

$$\begin{cases} S^{(k)}\to S^{(k+1)}\\ x\mapsto \tilde{s}x\end{cases}$$

یک‌به‌یک است. پس چون $|S^{(k)}|=|S^{(k+1)}|<\infty$، پوشا هم خواهد بود، امری که ثابت می‌کند:

(*) *اگر $s_1,\dots,s_{k+1}\in S$، آن‌گاه $s'_1,\dots,s'_k\in S$ موجودند که $s_1\dots s_{k+1}=\tilde{s}s'_1\dots s'_k$. $(1\le k<n)$*

در ادامه نشان می‌دهیم که $S^{(n)}$ تحت ضرب بسته است: اگر $s_1,\dots,s_n$ و هم‌چنین $t_1,\dots,t_n$ به S تعلق داشته باشند، با n بار به کار بردن (*)، می‌توان $(s_1\dots s_n)(t_1\dots t_n)$ را که حاصل‌ضرب دو عنصر $S^{(n)}$ است، به ازای $r_1,\dots,r_n\in S$ مناسبی به صورت $\tilde{s}^n r_1\dots r_n$ نوشت. ولی گروه G، n عضوی بود و لذا در آن هر عنصر به توان n همانی است. پس:

$$(s_1\dots s_n)(t_1\dots t_n)=\tilde{s}^n r_1\dots r_n=r_1\dots r_n\in S^{(n)}$$

که اثبات بسته بودن زیرمجموعه‌ی $S^{(n)}$ از گروه G تحت ضرب را تکمیل می‌کند. در نهایت برای نشان دادن اینکه $S^{(n)}$ یک زیرگروه است، باید این را که همانی و وارون هر عنصر از $S^{(n)}$ را در بردارد هم نشان داد. مورد اول بدیهی است، زیرا $\tilde{s}\in S \Rightarrow e=\tilde{s}^n\in S^{(n)}$ (برای هر $g\in G$: $g^n=e$) و درباره‌ی دومی، توجه کنید که اگر $y\in S^{(n)}$، آن‌گاه به دلیل بسته بودن $S^{(n)}$ تحت ضرب (که در بالا ثابت شد) نگاشت

$$\begin{cases} S^{(n)}\to S^{(n)}\\ x\mapsto \tilde{y}x\end{cases}$$

از مجموعه‌ی متناهی $S^{(n)}$ به خودش خوش‌تعریف و هم‌چنین به دلیل ویژگی حذف از چپ، یک‌به‌یک خواهد بود. پس پوشا هم هست. علی‌الخصوص $e \in S^{(n)}$ در برد آن قرار دارد که معادل است با $y^{-1} \in S^{(n)}$.

پاسخ ۳. عنصر دلخواه $x \in R$ را تثبیت کنید. زیرمجموعه‌ی S از R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S=\{x^i(1+rx)|i\in\mathbb{N}\cup\{0\}, r\in R\}$$

که در آن x^0 برابر یک حلقه تعریف می‌شود. S یک $m.c.s$ (زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی) از R است. چرا که با قرار دادن $i=0$ و $r=0\in R$ در $x^i(1+rx)$ به سادگی دیده می‌شود که $1\in R$ را در بردارد و به علاوه تحت ضرب بسته است. زیرا:

$$(x^i(1+rx))(x^j(1+sx)) = x^{i+j}(1+(r+s+rsx)x)$$

ادعا می‌کنیم $0\in S$. در غیر این صورت باید $S\cap(0)=\emptyset$، امری که با توجه به $m.s.c$ بودن S، وجود ایده‌آل اول P از R را که S را قطع نمی‌کند نتیجه می‌دهد. ولی $x\in S$ و بنابراین $x\notin P$. ولی بنابر فرض مسأله P به دلیل اول بودن ماکسیمال هم هست و لذا $x\notin P$ نشان می‌دهد که $R=(x)+P$. این وجود $r\in R$ای را نتیجه می‌دهد که برای آن $1+rx\in P$ (چرا که بنابر $R=(x)+P$، می‌توان $1\in R$ را به صورت جمع مضربی از x و عنصری از P نوشت.) که با $P\cap S=\emptyset$ در تناقض است، زیرا بنابر تعریف $1+rx$ در S هم واقع است. پس ثابت کردیم که $0\in S$. این با توجه به تعریف S بدان معنی است که به ازای $a\in R$ و $k\in\mathbb{N}$ای: $x^k(1+ax)=0$.
حال $x+ax^2$ پوچ‌توان است زیرا:

$$(x+ax^2)^k = \underbrace{x^k(1+ax)}_{=0}(1+ax)^{k-1}=0$$

پاسخ ۴. هر ایده‌آل I از حلقه‌ی خارج‌قسمتی $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^n-1)}$ به ازای ایده‌آلی هم‌چون J از $\mathbb{Z}_2[x]$ با ویژگی $(x^n-1)\subset J$، به صورت $\frac{J}{(x^n-1)}$ قابل بیان است. ولی اگر $I=\frac{J}{(x^n-1)}$، آن‌گاه $I^2=\frac{J^2+(x^n-1)}{(x^n-1)}$ و بنابراین برای حل مسأله کافی است نشان داد که برای هر ایده‌آل J از $\mathbb{Z}_2[x]$ که x^n-1 را در برداشته باشد: $J=(x^n-1)+J^2$. ولی توجه کنید که $\mathbb{Z}_2$ یک میدان و لذا $\mathbb{Z}_2[x]$، یک $P.I.D.$ است. پس ایده‌آل J از $\mathbb{Z}_2[x]$ به ازای یک چندجمله‌ای $f(x)\in\mathbb{Z}_2[x]$ برابر $(f(x))$ خواهد بود و اینکه شامل ایده‌آل (x^n-1) باشد به معنای $f(x)|x^n-1$ در حلقه‌ی چندجمله‌ای $\mathbb{Z}_2[x]$ خواهد بود. حال باید نشان داد که $J=(x^n-1)+J^2$ یا معادلا $(f(x))=(x^n-1)+(f^2(x))$. اینکه سمت راست، سمت چپ را دربردارد، بدیهی است چرا که $f(x)$ عامل هردوی $f^2(x)$ و x^n-1 است. لذا تنها باید ثابت کنیم که در تساوی مذکور، سمت راست مشمول در سمت چپ است یا به عبارت دیگر می‌توان $f(x)$ را به صورت ترکیب خطی $f^2(x)$ و x^n-1 با ضرایب در $\mathbb{Z}_2[x]$ نوشت. اثبات این امر حل را تکمیل خواهد کرد. $f(x)$ عاملی از چندجمله‌ای x^n-1 است و بنابراین $g(x)\in\mathbb{Z}_2[x]$ موجود است که $f(x)g(x)=x^n-1$. دو چندجمله‌ای $f(x)$ و $g(x)$، هنگامی که به ضرب عناصر تحویل‌ناپذیر در $\mathbb{Z}_2[x]$ تجزیه شوند (توجه کنید که $\mathbb{Z}_2[x]$ یک $U.F.D$ است.) هیچ عامل تحویل‌ناپذیر مشترکی نخواهند داشت. چرا که در غیر این صورت اگر چندجمله‌ای $h(x)\in\mathbb{Z}_2[x]$ با درجه‌ی مثبت موجود باشد که $h(x)|f(x)$ و $h(x)|g(x)$، آن‌گاه $h^2(x)|f(x)g(x)=x^n-1$ و این امکان‌پذیر نیست چرا که نتیجه می‌دهد $h(x)|(x^n-1)'=nx^{n-1}=x^{n-1}$ که در تساوی آخر از این استفاده کردیم که به دلیل فرد بودن n، در میدان $\mathbb{Z}_2$، $n=1$. پس اگر $f(x)$ و $g(x)$ عامل تحویل‌ناپذیر مشترکی در $\mathbb{Z}_2[x]$ داشته باشند، آن‌گاه x^n-1 و x^{n-1} مقسوم‌علیه مشترکی مانند $h(x)$ با درجه‌ی مثبت دارند که تناقض است. چرا که تساوی $x(x^{n-1})-(x^n-1)=1$ نتیجه خواهد داد $h(x)|1$. پس نشان دادیم که $f(x)$ و $g(x)$ نسبت به هم اولند. اکنون $P.I.D.$ بودن $\mathbb{Z}_2[x]$ وجود عناصر $r(x),s(x)\in\mathbb{Z}_2[x]$ را که $r(x)f(x)+s(x)g(x)=1$ نتیجه می‌دهد. با ضرب طرفین در $f(x)$ و به کار بردن $f(x)g(x)=x^n-1$ خواهیم داشت:

$$r(x)f^2(x)+s(x)(x^n-1)=f(x)$$

که نشان می‌دهد $f(x)$ به صورت ترکیب خطی $f^2(x)$ و x^n-1 با ضرایب در $\mathbb{Z}_2[x]$ قابل بیان است.

پاسخ ۵. اگر $a\in S^1$ دلخواه و G_a پایدارساز a در عمل G بر S^1 باشد یعنی زیرگروه $\{g\in G|g.a=a\}$، آن‌گاه می‌دانیم که مدار a در عمل G یعنی $\{g.a|g\in G\}$، در تناظر یک‌به‌یک است با مجموعه‌ی همدسته‌های چپ زیرگروه G_a از G. پس چون مدار شامل a متناهی است: $[G:G_a]<\infty$ و لذا اگر برای یک $a\in S^1$ دلخواه، متناهی بودن G_a را نشان دهیم، متناهی بودن G نتیجه می‌شود. بدین منظور S^1 را دایره‌ی واحد در صفحه‌ی مختلط می‌گیریم: $S^1=\{z\in\mathbb{C}||z|=1\}$ و نشان می‌دهیم پایدارساز $1\in S^1$ -که آن را H می‌نامیم- متناهی است. چون در عمل G بر S^1 مدار هر نقطه متناهی است، این درباره‌ی عمل زیرگروه H از آن هم صادق است. پس اگر $g\in H$ دلخواه باشد، همیومورفیسم

$$\begin{cases} f:S^1\to S^1\\ f(x)=g.x\end{cases}$$

اولا $1\in S^1$ را ثابت نگه می‌دارد و ثانیا برای هر $x\in S^1$ زیرمجموعه‌ی $\{f^k(x)|k\in\mathbb{N}\}$ (منظور از f^k، $\overbrace{f\circ\cdots\circ f}^{k\text{مرتبه}}$ است.) متناهی است.

نشان خواهیم داد که همیومورفیسم $f : S^1 \to S^1$ باید همانی یا نگاشت $z \mapsto \bar{z}$ باشد. امری که در صورت اثبات، نشان می‌دهد پایدارساز H از $1 \in S^1$ متناهی است و بنابراین طبق آن‌چه که در بالا گفتیم، $|G| < \infty$ را به دست می‌دهد. پس توجه خود را به همیومورفیسم $f : S^1 \to S^1$ معطوف می‌کنیم. نگاشت

$$\begin{cases} p : \mathbb{R} \to S^1 \\ p(t) = e^{2\pi i t} \end{cases}$$

را نگاشت خارج قسمتی‌ای بگیرید که می‌توان از طریق آن S^1 را با فضای خارج‌قسمتی $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ یکی گرفت. با ترکیب آن با f، به نگاشت پیوسته‌ی $f \circ p : \mathbb{R} \to S^1$ می‌رسیم.به سادگی می‌توان دید که: تابع پیوسته‌ی $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ موجود است که $f \circ p = p \circ h$ [1] یا معادلا:

$$(*) \quad \forall t \in \mathbb{R} : f(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i h(t)}$$

ولی f، $1 \in S^1$ (توجه کنید که S^1 را دایره‌ی واحد در صفحه‌ی مختلط گرفتیم.) را به خودش می‌برد و لذا با قرار دادن $t = 0$ در $(*)$: $e^{2\pi i h(0)} \Rightarrow h(0) \in \mathbb{Z}$. بدیهی است که اگر تابع پیوسته‌ی $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با یک عدد صحیح جمع شود، تابع حاصل باز هم $(*)$ را برآورده می‌کند و لذا چون $h(0) \in \mathbb{Z}$، بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که $h(0) = 0$. با تبدیل t به $t+1$ در $(*)$، سمت چپ بدون تغییر می‌ماند و بنابراین $\forall t \in \mathbb{R} : h(t+1) - h(t) \in \mathbb{Z}$. پس عدد صحیح m موجود است که

$$(**) \quad \forall t \in \mathbb{R} : h(t+1) - h(t) = m$$

در واقع چون $h(0) = 0$، $(**)$ نشان می‌دهد که $h(1) = m \in \mathbb{Z}$. تحدید p به هر بازه‌ی به شکل $[t_0, t_0 + 1)$ نگاشتی یک‌به‌یک از آن بازه به S^1 به دست می‌دهد و حال با توجه به $(*)$، یک‌به‌یک بودن $f : S^1 \to S^1$ ایجاب می‌کند که تحدید تابع پیوسته‌ی $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ به هر بازه‌ی $[t_0, t_0 + 1)$ یک‌به‌یک شود، امری که تنها وقتی می‌تواند رخ دهد که h اکیدا یکنوا باشد. پس عدد صحیح $m = h(1)$ ناصفر است و به علاوه $|m| \geq 2$ هم رخ نمی‌دهد. چرا که در غیراین صورت با توجه به $h(0) = 0$، بنابر قضیه‌ی مقدار میانی $t_0 \in (0,1)$ای با $h(t_0) \in \{\pm 1\}$ موجود خواهد بود. پس از $(*)$، $f : S^1 \to S^1$، $e^{2\pi i t_0} \neq 1$ را هم علاوه بر $1 \in S^1$ به $1 \in S^1$ می‌برد که با یک‌به‌یک بودن f منافات دارد. پس $m = \pm 1$ و باید یکی از دو حالتی که در ادامه می‌آید برای تابع اکیدا یکنوای $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (که $h(0) = 0$) رخ دهد:

الف) یا $m = 1$ و در نتیجه h اکیدا صعودی است و $(**)$ تبدیل می‌شود به $\forall t \in \mathbb{R} : h(t+1) - h(t) = 1$

[1] این در واقع همان ترفیع fop از طریق نگاشت پوششی $p : \mathbb{R} \to S^1$ است.

ب) یا آن‌که $m = -1$، h اکیدا نزولی است و از $(**)$:
$\forall t \in \mathbb{R} : h(t+1) - h(t) = -1$

نشان می‌دهیم در حالت اول h همانی است و در حالت دوم نگاشت $h(t) = -t$ است. اثبات این، کار را تمام می‌کند. چرا که آن‌گاه از $(*)$، $f : S^1 \to S^1$ به ترتیب همانی یا $z \mapsto \bar{z}$ خواهد بود. ابتدا حالت (الف) را در نظر می‌گیریم: h، $[0,1]$ را به $[h(0), h(1)] = [0,1]$ می‌برد و کافی است نشان داد که بر این بازه همانی است (زیرا همواره $h(t+1) - h(t) = 1$). اگر این رخ ندهد، $t_0 \in (0,1)$ موجود خواهد بود که $h(t_0) \neq t_0$. پس یا $0 < t_0 < h(t_0) < 1$ یا اینکه $0 < h(t_0) < t_0 < 1$. پس با توجه به اکیدا صعودی بودن $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $h(0) = 0$ و $h(1) = 1$، به ترتیب خواهیم داشت $0 < t_0 < h(t_0) < h \circ h(t_0) < \cdots < 1$ یا $0 < \cdots < h \circ h(t_0) < h(t_0) < t_0 < 1$. در هر حال نتیجه می‌شود اعضای دنباله‌ی $\{h^n(t_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ (ترکیب n- باره‌ی h با خودش را به h^n نمایش داده‌ایم.) از عناصر بازه‌ی $(0,1)$ دوبه‌دو متمایزند. پس با توجه به اینکه تحدید $p : \mathbb{R} \to S^1$ به $(0,1)$ یک‌به‌یک است، اعضای دنباله‌ی $\{f^n(e^{2\pi i t_0}) = e^{2\pi i h^n(t_0)} = p(h^n(t_0))\}_{n \in \mathbb{N}}$ (در این‌جا دوباره $(*)$ را به کار بردیم.) از عناصر S^1 دوبه‌دو متمایزند. این تناقض است، زیرا گفتیم $\{f^k(x) | k \in \mathbb{N}\}$ برای هر $x \in S^1$ متناهی است. پس همانی بودن $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در حالت (الف) ثابت شد. حالت (ب) هم از آن نتیجه می‌شود. چرا که اگر $\tilde{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $\tilde{h}(t) = h(-t)$ تعریف شود، تابع پیوسته‌ای خواهد بود که در خواص (الف) صدق می‌کند: به دلیل اکیدا نزولی بودن h اکیدا صعودی است و $\forall t \in \mathbb{R} : \tilde{h}(t+1) - \tilde{h}(t) = 1$، زیرا $t \mapsto h(t+1) - h(t)$ متحد با -1 بود. حال کافی است همان استدلال (الف) را برای $\tilde{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و همیومورفیسم

$$\begin{cases} \tilde{f} : S^1 \to S^1 \\ \tilde{f}(z) = f(\bar{z}) \end{cases}$$

که به جای f قرار می‌گیرد (و ویژگی‌ای مشابه f دارد: $\{\tilde{f}^k(x) | k \in \mathbb{N}\}$ متناهی است.) به کار برد که نشان می‌دهد $\tilde{h}$ همانی و لذا h نگاشت $h(t) = -t$ است. این بررسی حالت (ب) را تکمیل می‌کند. پس نشان دادیم که در عمل G بر $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$، پایدارساز ۱ حداکثر دو عضوی است و این همان‌گونه که در بالا بیان شد، متناهی بودن G را به دست می‌دهد.

پاسخ ۶. حکم را با استقرا بر n ثابت می‌کنیم. نامساوی داده شده در حالت $n = 1$ به $\forall \alpha \in (0, \pi) : \sin \alpha > 0$ تبدیل می‌شود که برقرار است. حال فرض کنید حکم برای $n-1$ درست باشد. به منظور اثبات

آن برای n، تابع f را با تعریف زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} f:[0,\pi]\to\mathbb{R}\\ f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\cdots+\frac{1}{n}\sin nx\end{cases}$$

f تابعی مشتق‌پذیر است و لذا اگر مینیمم مطلق f بر $[0,\pi]$ در c رخ دهد، $c\in\{0,\pi\}$ یا اینکه $c\in(0,\pi)$ و $f'(c)=0$. بنابراین صفرهای f' در $(0,\pi)$ را بررسی می‌کنیم: $f'(x)=\sum_{k=1}^{n}\cos kx$ بنابراین اگر $c\in(0,\pi)$ چنان باشد که $f'(c)=0$، آن‌گاه $\sum_{k=1}^{n}\cos kc=0$ و این را چون $\sin\frac{c}{2}\neq 0$ (به دلیل $c\in(0,\pi)$)، می‌توان این‌گونه نوشت:

$$\begin{aligned}
0&=\sum_{k=1}^{n}\cos kc\\
&=\frac{1}{2\sin\frac{c}{2}}\sum_{k=1}^{n}2\cos kc\sin\frac{c}{2}\\
&=\frac{1}{2\sin\frac{c}{2}}\sum_{k=1}^{n}\big(\sin(kc+\frac{c}{2})-\sin(kc-\frac{c}{2})\big)\\
&=\frac{1}{2\sin\frac{c}{2}}\sum_{k=1}^{n}\big(\sin\frac{(2k+1)c}{2}-\sin\frac{(2k-1)c}{2}\big)\\
&=\frac{2}{2\sin\frac{c}{2}}\big(\sin\frac{(2n+1)c}{2}-\sin\frac{c}{2}\big)
\end{aligned}$$

پس ریشه‌های f' در $(0,\pi)$ عبارتند از ریشه‌های معادله‌ی $\sin\frac{(2n+1)c}{2}=\sin\frac{c}{2}$ در همان بازه. تساوی اخیر دقیقا زمانی برقرار می‌گردد که $(n+1)c=\frac{(2n+1)c}{2}+\frac{c}{2}$ مضرب فردی از π یا $nc=\frac{(2n+1)c}{2}-\frac{c}{2}$ مضرب زوجی از π باشد. پس اگر قرار دهیم:

$$A=\big\{\frac{(2k+1)\pi}{n+1}\,|\,k\in\mathbb{Z},\frac{(2k+1)\pi}{n+1}\in(0,\pi)\big\}$$

$$B=\big\{\frac{2k'\pi}{n}\,|\,k'\in\mathbb{Z},\frac{2k'\pi}{n}\in(0,\pi)\big\}$$

نتیجه می‌شود که ریشه‌های f' در $(0,\pi)$ عبارتند از اعضای $A\cup B$. حال اگر نشان دهیم که مقادیری که f بر نقاط واقع در $A\cup B$ می‌گیرد مثبت‌اند، حل به اتمام می‌رسد. چرا که گفتیم مینیمم مطلق $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ یا در دو سر بازه رخ می‌دهد یا در $c\in(0,\pi)$هایی که $f'(c)=0$ یعنی همان نقاط واقع در $A\cup B$. پس چون $f(0)=f(\pi)=0$، اگر ثابت کنیم که f بر $A\cup B$ مثبت است، نتیجه می‌شود که مینیمم مطلق $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ برابر صفر است که در دو سر بازه رخ می‌دهد و لذا

$$\forall x\in(0,\pi): f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\cdots+\frac{1}{n}\sin nx>0$$

که همان حکم استقرا است. پس به بررسی مقدار f' در $c\in A\cup B$ می‌پردازیم: اگر $c\in B$، $c=\frac{2k'\pi}{n}\in(0,\pi)$ به ازای یک عدد صحیح k' و در این صورت خواهیم داشت: $\sin nc=\sin 2k'\pi=0$ و در نتیجه:

$$f(c)=\sin c+\frac{1}{2}\sin 2c+\cdots+\frac{1}{n-1}\sin(n-1)c$$

که بنابر فرض استقرا مثبت است. حال اگر $c\in A$، آن‌گاه به ازای $k\in\mathbb{Z}$ای $c=\frac{(2k+1)\pi}{n+1}\in(0,\pi)$. بنابراین باید $0\le 2k<n$ و در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\sin nc&=\sin(nc-2k\pi)\\
&=\sin\big(\frac{(2k+1)n\pi}{n+1}-2k\pi\big)\\
&=\sin\big(\frac{\overbrace{(n-2k)\pi}^{0\le 2k<n\ \text{زیرا}\ \in(0,\pi)}}{n+1}\big)>0
\end{aligned}$$

پس

$$f(c)-(\sin c+\frac{1}{2}\sin 2c+\cdots+\frac{1}{n-1}\sin(n-1)c)$$

$$=\frac{1}{n}\sin nc>0$$

و این در حالی است که از فرض استقرا

$$\sin c+\frac{1}{2}\sin 2c+\cdots+\frac{1}{n-1}\sin(n-1)c>0$$

که ثابت می‌کند در این حالت هم $f(c)>0$.

پاسخ ۷. تابع F را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(a)=\int_0^1\frac{\ln(ax+1)}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

پس $F:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر است و $F(1)$ همان عددی است که در پی آن هستیم. تلاش می‌کنیم با بررسی این تابع، انتگرال مطلوب را محاسبه کنیم. داریم:

$$F'(a)=\int_0^1\frac{\partial\big(\frac{\ln(ax+1)}{x^2+1}\big)}{\partial a}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x}{(ax+1)(x^2+1)}\mathrm{d}x$$

در ادامه با تجزیه به کسرهای جزئی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{(ax+1)(x^2+1)}\\
&=\frac{1}{a^2+1}\Big(\frac{x}{x^2+1}\Big)+\frac{a}{a^2+1}\Big(\frac{1}{x^2+1}\Big)-\frac{a}{a^2+1}\Big(\frac{1}{ax+1}\Big)
\end{aligned}$$

با قرار دادن در تساوی قبلی:

$$\begin{aligned}
F'(a) &= \\
&\int_0^1 \Big(\frac{1}{a^2+1}\big(\frac{x}{x^2+1}\big) + \frac{a}{a^2+1}\big(\frac{1}{x^2+1}\big) - \frac{a}{a^2+1}\big(\frac{1}{ax+1}\big)\Big)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a^2+1}\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x + \frac{a}{a^2+1}\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x \\
&- \frac{1}{a^2+1}\int_0^1 \frac{a}{ax+1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a^2+1}\big(\frac{1}{2}\ln(x^2+1)|_0^1\big) + \frac{a}{a^2+1}(\arctan x|_0^1) \\
&- \frac{1}{a^2+1}(\ln(ax+1)|_0^1) \\
&= \frac{\ln 2}{2(a^2+1)} + \frac{\pi a}{4(a^2+1)} - \frac{\ln a+1}{a^2+1}
\end{aligned}$$

از طرفی، به وضوح $F(0)=0$ و لذا $F(t)=\int_0^t F'(a)\mathrm{d}a$. اگر در سمت راست آن‌چه را که در بالا برای $F'(a)$ حاصل شد قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$F(t) = \int_0^t \frac{\ln 2}{2(a^2+a)}\mathrm{d}a + \int_0^t \frac{\pi a}{4(a^2+1)}\mathrm{d}a - \int_0^t \frac{\ln a+1}{a^2+1}\mathrm{d}a$$

اگر قرار دهیم $t=1$، این با توجه به $F(1)=\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}$ تبدیل می‌شود به:

$$\begin{aligned}
F(1) &= \int_0^1 \frac{\ln 2}{2(a^2+1)}\mathrm{d}a + \int_0^1 \frac{\pi a}{4(a^2+1)}\mathrm{d}a - F(1) \Rightarrow F(1) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\int_0^1 \frac{\ln 2}{2(a^2+1)}\mathrm{d}a + \int_0^1 \frac{\pi a}{4(a^2+1)}\mathrm{d}a\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{\ln 2}{2}(\arctan a|_{a=0}^1) + \frac{\pi}{4}\big(\frac{\ln(a^2+1)}{2}|_0^1\big)\Big) \\
&= \frac{\pi \ln 2}{8}
\end{aligned}$$

بنابراین انتگرال $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}$ برابر است با $\frac{\pi\ln 2}{8}$.

پاسخ ۸. ویژگی نخست ثابت می‌کند که تمامی توابع متعلق به $\mathcal{F}$ نامنفی‌اند و لذا $\forall f\in\mathcal{F}: \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge 0$. پس با انتخاب یک $\epsilon>0$ دلخواه، برای اثبات حکم مطلوب کافی است نشان داد که $f\in\mathcal{F}$ای موجود است که $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\epsilon$. برای هر $x\in[a,b]$ دلخواه، چون بنابر ویژگی دوم $\inf_{g\in\mathcal{F}} g(x)=0$، عضوی از $\mathcal{F}$ مانند تابع پیوسته‌ی $f_x:[a,b]\to\mathbb{R}$ موجود است که $f_x(x)<\frac{\epsilon}{b-a}$. به دلیل پیوستگی، همسایگی باز I_x حول نقطه‌ی x در بازه‌ی $[a,b]$ موجود است که برای هر $t\in I_x$ داریم: $f_x(t)<\frac{\epsilon}{b-a}$.
حال خانواده‌ی $\{I_x\}_{x\in[a,b]}$ از بازهای $[a,b]$، این بازه را می‌پوشاند و بنابراین به دلیل فشردگی $[a,b]$، متناهی‌تا از I_xها $[a,b]$ را می‌پوشانند: نقاط $x_1,\dots,x_n\in[a,b]$ موجودند که $[a,b]=I_{x_1}\cup\cdots\cup I_{x_n}$. پس چون برای هر $1\le i\le n$، مقدار تابع $f_{x_i}:[a,b]\to\mathbb{R}$ در نقاط I_{x_i} از $\frac{\epsilon}{b-a}$ کمتر بود، $f:=\min(f_1,\dots,f_n)$ که با استفاده‌ی مکرر از ویژگی دوم به $\mathcal{F}$ تعلق دارد، یک تابع پیوسته‌ی $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ خواهد بود که برای آن $\forall t\in[a,b]: f(t)<\frac{\epsilon}{b-a}$ و لذا $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\epsilon$. پس این همان عنصر مطلوب از $\mathcal{F}$ است.

پاسخ ۹. برهان خلف: برای هر $c\in(0,1)$ داریم $f(c)\neq\int_0^c f(x)\mathrm{d}x$. تابع $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(t)=e^{-t}\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$$

بنابراین $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر است و $g(0)=0$. حال فرض خلف نتیجه می‌دهد که $g(c)\neq 0$ برای هر $c\in(0,1]$. چرا که اگر این‌گونه نباشد باید $g'(t)=e^{-t}(f(t)-\int_0^t f(x)\mathrm{d}x)$ بنابر قضیه‌ی رول در نقطه‌ای از $(0,1)$ صفر شود که بنابر فرض خلف امکان‌پذیر نیست. پس $g(c)\neq 0$ برای هر $c\in(0,1]$ که علی‌الخصوص در $c=1$ نتیجه می‌دهد $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\neq 0$. بدون کاسته شدن از کلیت و با جایگزین کردن f با $-f$ در صورت لزوم، می‌توان فرض کرد که $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x>0$. حال توجه کنید که چون بنابر فرض خلف $f(c)\neq\int_0^c f(x)\mathrm{d}x$ برای هر $c\in(0,1)$، به دلیل پیوستگی یا باید $\forall t\in(0,1): f(t)>\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$ یا آن‌که $\forall t\in(0,1): f(t)<\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$. اولی رخ نمی‌دهد چرا که

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x > f(1)=0$$

لاجرم باید گزاره‌ی دوم صحیح باشد:

$$\forall t\in(0,1): f(t)<\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$$

ولی همان‌گونه که قبلا دیدیم $g'(t)=e^{-t}(f(t)-\int_0^t f(x)\mathrm{d}x)$ و بنابراین $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ که با $g(t)=e^{-t}\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$ داده می‌شد اکیدا نزولی است. اما این هم به تناقض منتهی می‌گردد، زیرا با توجه به $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x>0$: $g(1)=\frac{1}{e}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x>g(0)=0$. این حل را تکمیل می‌کند.

پاسخ ۱۰. معادله‌ای که در صورت مسأله داده شده، اطلاعاتی درباره‌ی چگونگی رفتار تابع حاصل از تحدید h به خطوطی در صفحه که موازی بردار (a,b) هستند به دست می‌دهد: فرض کنید $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ دلخواه باشد و تابع

$$\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(t)=h(x_0+at,y_0+bt) \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. به کمک قاعده‌ی زنجیره‌ای و معادله‌ای که h در آن صدق می‌کند:

$$\begin{aligned}
f'(t) &= a\frac{\partial h}{\partial x}(x_0+at,y_0+bt)+b\frac{\partial h}{\partial y}(x_0+at,y_0+bt) \\
&= h(x_0+at,y_0+bt)=f(t)
\end{aligned}$$

پس $f(t)=f(0)e^t$. بنابراین اگر $f(0)=h(x_0,y_0)\neq 0$:

$$\lim_{t\to+\infty}|h(x_0+at,y_0+bt)|=\lim_{t\to+\infty}|f(t)|=+\infty$$

که با کران‌دار بودن h در تناقض است. پس مقدار h در نقطه‌ی (x_0,y_0) که به دلخواه انتخاب شده بود صفر است و این حل را تکمیل می‌کند.

پاسخ ۱۱. ابتدا توجه کنید که اگر $T:H\to H$ خودتوان باشد، یعنی $T^2=T$، آن‌گاه $\|T\|\in\{0\}\cup[1,\infty)$. چرا که

$$\|T\|=\|T^2\|\le\|T\|^2\Rightarrow\|T\|.(\|T\|-1)\ge 0$$

پس برای حل یک طرف مسأله، کافی است نشان دهیم که اگر این عملگر خودالحاق هم باشد، آن‌گاه همواره $|Tx|\le|x|$. چرا که در این صورت برقرار بودن این، باید $\|T\|\le 1$ که به همراه آن‌چه که در بالا بیان شد، نتیجه می‌دهد که نرم عملگر T صفر یا یک است. به منظور اثبات $|Tx|\le|x|$، توجه کنید که هر $x\in H$ دلخواه را می‌توان به شکل $x=Tx+(x-Tx)$ نوشت و در سمت راست تساوی، بردارهای ظاهر شده بر هم عمودند. زیرا:

$$<Tx,x>\overbrace{=}^{\text{از } T^2=T}<T(Tx),x>\overbrace{=}^{\text{زیرا } T \text{ خودالحاق است}}<Tx,Tx>$$

$$\Rightarrow<Tx,x-Tx>=0$$

بنابراین $x=Tx+(x-Tx)$ نتیجه می‌دهد که:

$$|x|^2=|Tx|^2+|x-Tx|^2$$

که آن هم $|Tx|\le|x|$ را به دست می‌دهد. برای حل طرف دیگر مسأله باید نشان داد که اگر $T:H\to H$ خودتوان باشد و $\|T\|\in\{0,1\}$، آن‌گاه T خودالحاق هم خواهد بود. صفر بودن نرم عملگر T به معنای $T\equiv 0$ است که در آن حالت حکم بدیهی است. پس فرض کنید $\|T\|=1$. عملگر T^* را الحاقی T و $x\in H$ را دلخواه بگیرید. داریم:

$$(x-Tx)-T^*x=(x-T^*x)-Tx$$

در طرفین این تساوی بردارهای ظاهر شده متعامدند:

$$\begin{cases}<x-Tx,T^*x>=<x,T^*x>-<Tx,T^*x>\\ \overbrace{=}^{\text{استفاده از تعریف الحاقی}}<Tx,x>-<T(Tx),x>\overbrace{=}^{\text{از } T^2=T}0\\ <x-T^*x,Tx>=<x,Tx>-<T^*x,Tx>\\ \underbrace{=}_{\text{استفاده از تعریف الحاقی}}<x,Tx>-<x,T(Tx)>\underbrace{=}_{\text{از } T^2=T}0\end{cases}$$

پس با محاسبه‌ی نرم دوطرف تساوی

$$(x-Tx)-T^*x=(x-T^*x)-Tx$$

گزاره‌ی زیر را خواهیم داشت:

$$\forall x\in H:|x-Tx|^2+|T^*x|^2=|x-T^*x|^2+|Tx|^2$$

اکنون به جای x را با Tx جایگزین می‌کنیم و با استفاده‌ی مجدد از خودتوان بودن T، خواهیم داشت:

$$|T^*(Tx)|^2=|Tx-T^*(Tx)|^2+|Tx|^2$$

ولی می‌دانیم که نرم هر عملگری با الحاقی‌اش برابر است و بنابراین همانند T برای T^* هم $\|T^*\|=1$ که نشان می‌دهد در تساوی اخیر: $|T^*(Tx)|\le|Tx|$ و با توجه به تساوی مذکور، این تنها وقتی می‌تواند برقرار باشد که جمله‌ی $|Tx-T^*(Tx)|^2$ صفر شود. پس $Tx=T^*(Tx)$ و در نتیجه $T=T^*\circ T$. ولی $T^*\circ T$ عملگری خودالحاق بر فضای هیلبرت H است و بنابراین T هم باید چنین باشد.

پاسخ ۱۲. با توجه با مفروضات مسأله، می‌توان چندجمله‌ای $p(z)$ را این‌گونه نوشت:

$$p(z)=A\prod_{i=1}^{n}(z-\alpha_i)\quad A\neq 0,\forall 1\le i\le n:|\alpha_i|<1$$

بنابراین $p^*(z)$ برابر خواهد بود با:

$$p(z)=A\prod_{i=1}^{n}(z-\alpha_i)$$

$$\Rightarrow\overline{p(\frac{1}{\bar z})}=\overline{A\prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{\bar z}-\alpha_i)}=\bar A\prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{z}-\bar\alpha_i)$$

$$\Rightarrow p^*(z)=z^n\overline{p(\frac{1}{\bar z})}=\bar A\prod_{i=1}^{n}(1-z\bar\alpha_i)$$

پس چندجمله‌ای‌های $p(z)$ و $p^*(z)$ به صورت به ترتیب $A\prod_{i=1}^{n}(z-\alpha_i)$ و $\bar A\prod_{i=1}^{n}(1-z\bar\alpha_i)$ تجزیه شدند. حال نکته‌ی ساده‌ی زیر نتیجه می‌دهد که $|p^*(z)|<|p(z)|$ هرگاه $|z|>1$:

$(*)$ اگر هر دو عدد مختلط z و α چنان باشند که $1<|z|$ و $1>|\alpha|$، آن‌گاه $|1-\bar\alpha z|<|z-\alpha|$.

برای دیدن دلیل درستی $(*)$، داریم:

$$\begin{aligned}&|z-\alpha|^2-|1-\bar\alpha z|^2\\ &=(|z|^2+|\alpha|^2-2Re(z\bar\alpha))-(1+|\bar\alpha z|^2-2Re(\bar\alpha z))\\ &=|z|^2+|\alpha|^2-1-|z|^2.|\alpha|^2\\ &=-(|z|^2-1)(|\alpha|^2-1)\ge 0\end{aligned}$$

به کار بردن $(*)$ و با توجه به تجزیه‌هایی که برای $p(z)$ و $p^*(z)$ ارائه گردید، نشان می‌دهد که:

$$(**)\forall z\in\mathbb{C}:|z|>1\Rightarrow|p^*(z)|<|p(z)|$$

حال $\epsilon>0$ را دلخواه بگیرید. از $(**)$، دو چندجمله‌ای $p(z)$ و $p^*(z)$ بر خم $|z|=1+\epsilon$ نامساوی $|p^*(z)|<|p(z)|$ را برآورده می‌کنند و لذا از قضیه‌ی روشه تعداد ریشه‌های $p(z)$ و $p(z)+p^*(z)$

با حساب تکرر در گوی باز $\{z\in\mathbb{C}||z|<۱+\epsilon\}$ یکی است. ولی از فرض مسأله، تمامی n ریشه‌ی $p(z)$ با حساب تکرر، در گوی باز واحد واقعند. پس $p(z)+p^*(z)$ که یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n است ($p(z)$ و $p^*(z)$ هر دو از درجه‌ی n بودند.) با حساب تکرر در $\{z\in\mathbb{C}||z|<۱+\epsilon\}$، n ریشه دارد. امری که نتیجه می‌دهد این چندجمله‌ای خارج گوی باز به شعاع $۱+\epsilon$ حول مبدا ریشه ندارد. پس با توجه به دلخواه بودن $\epsilon>۰$، باید تمامی ریشه‌های $p(z)+p^*(z)$ در گوی بسته‌ی واحد واقع شوند.

پاسخ ۱۳. برای زیرمجموعه‌ی دلخواه A از $\mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم:

$$f(A)=\{a+۱|a\in A\}$$

لذا $x-۱\in A \iff x\in f(A)$. پس طبق روش ساختن $S_{n+۱}$ از روی S_n در صورت مسأله، عدد طبیعی دلخواه x به $S_{n+۱}$ تعلق دارد، اگر و تنها اگر در دقیقا یکی از S_n و $f(S_n)$ واقع باشد. پس $S_{n+۱}=S_n\Delta f(S_n)$ که در آن Δ نمایانگر تفاضل متقارن دو زیرمجموعه از اعداد طبیعی است.به سادگی می‌توان تحقیق کرد که $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (مجموعه‌ی تمامی زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$) با عمل Δ یک گروه آبلی تشکیل می‌دهد که عنصر همانی در آن $\emptyset$، مرتبه‌ی سایر عناصر دو و $f:(\mathcal{P}(\mathbb{N}),\Delta)\to(\mathcal{P}(\mathbb{N}),\Delta)$ در این ساختار گروهی یک همریختی است: $f(A\Delta B)=f(A)\Delta f(B)$. به کمک این موارد، با استقرا نشان خواهیم داد که:

$$\forall n,k\geq ۰; S_{n+۲^k}=S_n\Delta f^{۲^k}(S_n)$$

که در آن منظور از f^i، $\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{i\text{مرتبه}}$ است. $S_{n+۲^k}=S_n\Delta f^{۲^k}(S_n)$ را با استقرا بر $k\geq ۰$ ثابت می‌کنیم: این در حالت $k=۰$ همان $S_{n+۱}=S_n\Delta f(S_n)$ است که در بالا بیان شد و با فرض درستی $\forall n: S_{n+۲^k}=S_n\Delta f^{۲^k}(S_n)$ داریم:

$$\begin{aligned}&\forall A,B\subset\mathbb{N}: f(A\Delta B)=f(A)\Delta f(B)\\ &\Rightarrow f^{۲^k}(S_{n+۲^k})=f^{۲^k}(S_n\Delta f^{۲^k}(S_n))\\ &=f^{۲^k}(S_n)\Delta f^{۲^{k+۱}}(S_n)\end{aligned}$$

حال از فرض استقرا

$$S_{n+۲^k}=S_n\Delta f^{۲^k}(S_n)$$

و

$$S_{n+۲^{k+۱}}=S_{n+۲^k}\Delta f^{۲^k}(S_{n+۲^k})$$

با ترکیب این موارد

$$\begin{aligned}S_{n+۲^{k+۱}}&=S_{n+۲^k}\Delta f^{۲^k}(S_{n+۲^k})\\ &=(S_n\Delta f^{۲^k}(S_n))\Delta(f^{۲^k}(S_n)\Delta f^{۲^{k+۱}}(S_n))\\ &=(S_n\Delta f^{۲^{k+۱}}(S_n)\Delta\big(\overbrace{f^{۲^k}(S_n)\Delta f^{۲^k}(S_n)}^{=\emptyset}\big)\\ &=S_n\Delta f^{۲^{k+۱}}(S_n)\end{aligned}$$

که تساوی مطلوب را به دست می‌دهد. در نتیجه برای هر $k\geq ۰$: $S_{۲^k}=S_۰\Delta f^{۲^k}(S_۰)$. طبق تعریف f: $f^{۲^k}(S_۰)=\{۲^k+a|a\in S_۰\}$ و بنابراین به دلیل متناهی بودن $S_۰$، اگر k به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد: $S_۰\cap f^{۲^k}(S_۰)=\emptyset$ و لذا در بالا تفاضل متقارن به اجتماع تبدیل می‌گردد:

$$S_{۲^k}=S_۰\cup f^{۲^k}(S_۰)=S_۰\cup\{۲^k+a|a\in S_۰\}$$

برای kهای به اندازه‌ی کافی بزرگ. این حکم خواسته شده را ثابت می‌کند.

پاسخ ۱۴. ایده‌ی حل مسأله آن است که به دنبال رابطه‌ای بازگشتی باشیم که $x_{n+۲}$ را به صورت ترکیب خطی x_n و $x_{n+۱}$ با ضرایب ثابت بیان کند. بررسی چندجمله‌ی ابتدایی، نامزدی برای چنین رابطه‌ی بازگشتی‌ای ارائه می‌دهد: $x_۲=۲۶$ و $x_۳=۱۳۶$ را می‌توان به صورت به ترتیب $۶x_۱-۴x_۰=۶\times۵-۴\times۱$ و $۶x_۲-۴x_۱=۶\times۲۶-۴\times۵$ نوشت. بررسی جمله‌ی $x_۴=۷۱۲$ هم احتمال برقراری چنین نظمی را تقویت می‌کند: $۶x_۳-۴x_۲=۶\times۱۳۶-۴\times۲۶=۷۱۲$. پس حدس می‌زنیم که $\forall n\geq ۰: x_{n+۲}=۶x_{n+۱}-۴x_n$. اگر این برقرار باشد، x_n باید به ازای ضرایب مناسب α,β با $x_n=\alpha(۳+\sqrt{۵})^n+\beta(۳-\sqrt{۵})^n$ داده شود (توجه کنید که $۳\pm\sqrt{۵}$ ریشه‌های معادله‌ی $\lambda^۲-۶\lambda+۴=۰$ هستند.) و با توجه به $x_۰=۱$ و $x_۱=۵$، با حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول به سادگی می‌توان دید که $\alpha=\frac{۵+۲\sqrt{۵}}{۱۰}$ و $\beta=\frac{۵-۲\sqrt{۵}}{۱۰}$. پس می‌توانیم حدس خود درباره‌ی این دنباله را این‌گونه بنویسیم:

$$\forall n\geq ۰: x_n=\frac{۵+۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۳+\sqrt{۵})^n+\frac{۵-۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۳-\sqrt{۵})^n$$

که در ادامه آن را با استقرا بر $n\geq ۰$ ثابت می‌کنیم و این مسئله را حل خواهد کرد:

$$x_{۲۰۰۷}=\frac{۵+۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۳+\sqrt{۵})^{۲۰۰۷}+\frac{۵-۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۳-\sqrt{۵})^{۲۰۰۷}$$

با توجه به روش انتخاب α و β در بالا، فرمول مذکور برای $x_۰$ و $x_۱$ برقرار است و تنها کافی است با فرض صحت آن برای x_n نشان داد که $x_{n+۱}$ هم با این فرمول داده می‌شود. با توجه به رابطه‌ی بازگشتی

داده شده در صورت مسأله داریم:

$$x_{n+۱} = ۳x_n + \lfloor\sqrt{۵}x_n\rfloor = \lfloor(۳+\sqrt{۵})x_n\rfloor$$
$$= \lfloor(۳+\sqrt{۵})\Big(\frac{۵+۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۳+\sqrt{۵})^n + \frac{۵-۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۳-\sqrt{۵})^n\Big)\rfloor$$
$$= \lfloor\frac{۵+۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۳+\sqrt{۵})^{n+۱} + \frac{۵-۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۳+\sqrt{۵})(۳-\sqrt{۵})^n\rfloor$$
$$= \lfloor\overbrace{\frac{۵+۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۳+\sqrt{۵})^{n+۱} + \frac{۵-۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۳-\sqrt{۵})^{n+۱}}^{\in\mathbb{Z}}$$
$$+ \frac{۵-۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۲\sqrt{۵})(۳-\sqrt{۵})^n\rfloor$$
$$= \frac{۵+۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۳+\sqrt{۵})^{n+۱} + \frac{۵-۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۳-\sqrt{۵})^{n+۱}$$
$$+ \lfloor\overbrace{(\sqrt{۵}-۲)(۳-\sqrt{۵})^n}^{\in(۰,۱)}\rfloor$$
$$= \frac{۵+۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۳+\sqrt{۵})^{n+۱} + \frac{۵-۲\sqrt{۵}}{۱۰}(۳-\sqrt{۵})^{n+۱}$$

که حکم استقرا را ثابت می‌کند.

پاسخ ۱۵. نشان می‌دهیم چنین تابعی وجود دارد. $\mathcal{P}(N)$ را مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ می‌گیریم و تعریف می‌کنیم:

$$S := \{A\in\mathcal{P}(N) | \forall k\in\mathbb{N} : |A\cap\{۲k-۱,۲k\}| = ۱\}$$

تابع $\phi : S\to\mathcal{P}(\mathbb{N})$ را با ضابطه‌ی $\phi(A)=\{k\in\mathbb{N}|۲k-۱\in A\}$ در نظر بگیرید. این تابع یک‌به‌یک و پوشاست. زیرا به سادگی می‌توان تحقیق کرد که

$$\begin{cases}\phi' : \mathcal{P}(\mathbb{N})\to S\\ \phi'(X) = \{۲k-۱|k\in X\}\cup\{۲k|k\in\mathbb{N}-X\}\end{cases}$$

وارون آن است. بنابراین $\phi : S\to\mathcal{P}(\mathbb{N})$ یک‌به‌یک و پوشاست، امری که ثابت می‌کند کاردینال S با $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ و لذا مجموعه‌ی اعداد حقیقی یکی است (چرا که می‌دانیم کاردینال مجموعه‌ی تمامی زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ یا همان $\mathcal{P}(\mathbb{N})$، با کاردینال $\mathbb{R}$ یکی است.) و بنابراین یک تابع یک‌به‌یک و پوشای $\psi:\mathbb{R}\to S$ موجود است. برای هر $x\in\mathbb{R}$، زیرمجموعه‌ی $\psi(x)$ از $\mathbb{N}$ را به A_x نمایش می‌دهیم. پس با توجه به یک‌به‌یک بودن ψ، $\{A_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ است که برای هر $x\in\mathbb{R}$، $A_x\in S$ و به علاوه $A_x\neq A_y$ هرگاه $x\neq y$ دو عدد حقیقی باشند. پس اگر $y\neq x$، باید $A_x\not\subseteq A_y$. چرا که در غیر این صورت اگر $A_x\subset A_y$، برای هر $k\in\mathbb{N}$ باید $A_x\cap\{۲k-۱,۲k\}\subset A_y\cap\{۲k-۱,۲k\}$. ولی $A_x, A_y\in S$ و بنابراین از تعریف S، در شمول اخیر دو مجموعه‌ی ظاهر شده تک عضوی‌اند و در نتیجه باید مساوی باشند. پس اگر $A_x\subset A_y$، آن‌گاه $A_x\cap\{۲k-۱,۲k\} = A_y\cap\{۲k-۱,۲k\}$ برای هر $k\in\mathbb{N}$ و لذا دو مجموعه‌ی A_x و A_y از اعداد طبیعی برابرند در حالی که گفتیم این با توجه به $y\neq x$ نمی‌تواند رخ دهد. پس در خانواده‌ی $\{A_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ از زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی، هیچ عضوی شامل دیگری نیست و در نتیجه $A_x - A_y\neq\emptyset$ برای هر دو عدد حقیقی متمایز x و y. پس اصل انتخاب وجود یک تابع $g:\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲|x\neq y\}\to\mathbb{N}$ را نتیجه می‌دهد، با این ویژگی که $g(x,y)\in A_x - A_y$. حال تابع مطلوب $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{N}$ را به کمک g این‌گونه می‌سازیم:

$$\begin{cases}f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{N}\\ f(x,y) = \begin{cases}g(x,y)+۱ & x\neq y \text{ اگر }\\ ۱ & \text{در غیر این صورت}\end{cases}\end{cases}$$

در نهایت برقراری ویژگی موردنظر را برای این تابع تحقیق می‌کنیم: از تعریف فوق و با توجه به اینکه مقادیر g مثبت بودند، $f(x,y)\geq ۱$ با تساوی دقیقا در حالتی که $x=y$. پس در اثبات

$$f(x,y)=f(y,z)\Rightarrow x=y=z$$

می‌توان فرض کرد که $y\neq x$ و $z\neq y$. ولی در چنین حالتی، $f(x,y)=f(y,z)$ یعنی $g(x,y)=g(y,z)$ که امکان‌پذیر نیست. چرا که از خواص g، $g(x,y)$ و $g(y,z)$ به زیرمجموعه‌های به ترتیب A_x-A_y و A_y-A_z از $\mathbb{N}$ تعلق دارند که زیرمجموعه‌هایی مجزایند. پس $f(x,y)=f(y,z)$ تنها می‌تواند در حالتی رخ دهد که $x=y$ و $y=z$.

پاسخ ۱۶. قرار دهید $\omega = e^{\frac{۲\pi i}{۳}}$. حال داریم:

$$\begin{cases}(\omega A+B)(\omega^۲A+B) = \overbrace{\overbrace{\omega^۳}^{=۱}A^۲+B^۲}^{=AB}+\omega AB+\omega^۲BA\\ = \overbrace{(۱+\omega)}^{=-\omega^۲}AB+\omega^۲BA = \omega^۲(BA-AB)\\ (\omega^۲A+B)(\omega A+B) = \overbrace{\overbrace{\omega^۳}^{=۱}A^۲+B^۲}^{=AB}+\omega^۲AB+\omega BA\\ = \overbrace{(۱+\omega^۲)}^{=-\omega}AB+\omega BA = \omega(BA-AB)\end{cases}$$

بنابراین باید دترمینان سمت راست این دو تساوی یکسان باشد که نتیجه می‌دهد:

$$\det(\omega^۲(BA-AB)) = \det(\omega(BA-AB))$$
$$\Rightarrow \omega^{۲n}\det(BA-AB) = \omega^n\det(BA-AB)$$
$$\xrightarrow{AB-BA \text{ وارون‌پذیر}} \omega^{۲n}=\omega^n$$

که با توجه به $\omega = e^{\frac{۲\pi i}{۳}}$ تنها وقتی می‌تواند رخ دهد که $۳|n$.

پاسخ ۱۷. قسمت الف) $A\in M_n(\mathbb{C})$ را دلخواه بگیرید. بدیهی است که با مزدوج کردن A بعد زیرفضای $C(A)$ تغییر نمی‌کند، زیرا

$C(PAP^{-1}) = \{PBP^{-1} | B \in C(A)\}$ و بنابراین بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که A در فرم ژردان خود است:

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix}_{n\times n}$$

که در آن برای هر $1 \le i \le k$، J_i یک بلوک ژردان $m_i \times m_i$ متناظر مقدار ویژه‌ی λ_i از A است:

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0\cdots & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}_{m_i\times m_i}$$

و طبعا باید $m_1 + \cdots + m_k = n$. توجه کنید که اگر برای هر $1 \le i \le k$، $B_i \in M_{m_i}(\mathbb{C})$ با J_i جابه‌جا شود، آن‌گاه ماتریس

$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_k \end{bmatrix}_{n\times n}$$

به $C(A)$ تعلق خواهد داشت و لذا می‌توان $\oplus_{i=1}^{k} C(J_i)$ را –که در آن $C(J_i)$ در $M_{m_i}(\mathbb{C})$ در نظر گرفته شده و زیرفضای ماتریس‌های $m_i \times m_i$ای است که با J_i جابه‌جا می‌شوند– به عنوان زیرفضایی از $C(A)$ در نظر گرفت. پس $\dim_{\mathbb{C}} C(A) \ge \sum_{i=1}^{k} \dim_{\mathbb{C}} C(J_i)$. ولی زیرفضای $C(J_i)$ از $M_{m_i}(\mathbb{C})$ حداقل m_i–بعدی است. چرا که J_i با ماتریس‌های $I_{m_i}, J_i, \ldots, (J_i)^{m_i-1}$ جابه‌جا می‌شود که عناصری مستقل خطی از $M_{m_i}(\mathbb{C})$ هستند. چرا که در صورت وابستگی خطی آن‌ها، باید J_i در یک چندجمله‌ای ناصفر از درجه‌ی کمتر از m_i صدق کند در حالی که J_i بلوک ژردان $m_i \times m_i$ متناظر $\lambda_i \in \mathbb{C}$ است و لذا چندجمله‌ای مینیمال آن برابر است با $(x - \lambda_i)^{m_i} \in \mathbb{C}[x]$. پس $\forall 1 \le i \le k : \dim_{\mathbb{C}} C(J_i) \ge m_i$ و اکنون نامساوی‌ای که در بالا ذکر شد نتیجه می‌دهد که $\dim_{\mathbb{C}} C(A) \ge \sum_{i=1}^{k} m_i = n$. پس نشان دادیم که برای یک $A \in M_n(\mathbb{C})$ دلخواه: $\dim_{\mathbb{C}} C(A) \ge n$ و تنها مطلبی که در حل قسمت (الف) باقی می‌ماند، ارائه‌ی $A \in M_n(\mathbb{C})$ای است که برای آن بعد $C(A)$ دقیقا n باشد. بدین منظور توجه کنید که اگر

$$D := \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_k \end{bmatrix}_{n\times n}$$

ماتریسی قطری با درایه‌های دوبه‌دو متمایز در امتداد قطر باشد، آن‌گاه زیرفضای عناصری از $M_n(\mathbb{C})$ که با آن جابه‌جا می‌شوند، زیرفضای ماتریس‌های قطری خواهد بود. چرا که برای یک ماتریس $n \times n$ دلخواه مانند $B = [b_{ij}]_{1\le i,j\le n}$، به سادگی می‌توان دید که:

$$\begin{aligned} DB - BD &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} [b_{ij}]_{1\le i,j\le n} \\ &\quad - [b_{ij}]_{1\le i,j\le n} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \\ &= [(\alpha_i - \alpha_j) b_{ij}]_{1\le i,j\le n} \end{aligned}$$

و لذا به دلیل دوبه‌دو متمایز بودن $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$،

$$DB = BD \iff [(\alpha_i - \alpha_j) b_{ij}]_{1\le i,j\le n} = 0$$

منوط است به آن‌که $b_{ij} = 0$ هرگاه $i \neq j$ یا معادلاً B قطری باشد. پس $C(D)$ زیرفضای متشکل از ماتریس‌های قطری در $M_n(\mathbb{C})$ و لذا n بعدی است.

قسمت ب) دوباره مشابه قسمت قبل، A را در فرم ژردان می‌گیریم:

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix}_{n\times n}$$

و با همان نمادگذاری‌های قبلی کار می‌کنیم: J_i بلوک ژردان $m_i \times m_i$ با مقدار ویژه‌ی λ_i از A در امتداد قطر است و $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$. در حل قسمت (الف) گفتیم که می‌توان جمع مستقیم زیرفضاهای

$$1 \le i \le k, C(J_i) = \{B \in M_{m_i}(\mathbb{C}) | J_i B = B J_i\}$$

را –که دیدیم فضایی n بعدی است– از طریق نگاشت

$$\begin{cases} \oplus_{i=1}^{k} C(J_i) \to C(A) \\ (B_i)_{1\le i\le k} \mapsto \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_k \end{bmatrix} \end{cases}$$

در $C(A)$ نشاند. بنابراین در این حالت که $C(A)$، n–بعدی است، این نگاشت باید یکریختی باشد. امری که به ویژه ثابت می‌کند هر ماتریسی که با

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix}$$

جابه‌جا شود، باید در چنین نمایش بلوکی‌ای قطری باشد: بلوک‌های به ترتیب $m_1 \times m_1$ و ... و $m_k \times m_k$ در امتداد قطر و سایر درایه‌ها صفر. ولی اگر دو تا از $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ مساوی باشند، $C(A)$ عضوی

خواهد داشت که این نمایش بلوکی‌ای از آن درایه‌های ناصفری خارج بلوک‌های در امتداد قطر هم دارد: فرض کنید که مثلا $\lambda_1=\lambda_2$ یعنی ماتریس‌های مقدماتی ژردان J_1 و J_2 متناظر یک مقدار ویژه باشند و J_2 بزرگ‌تر باشد، یعنی $m_1\le m_2$ (فرضی که از کلیت نمی‌کاهد زیرا با مزدوج کردن در صورت لزوم، می‌توان بلوک‌های ژردان را در امتداد قطر جایگشت داد). آن‌گاه عنصر زیر از $M_n(\mathbb{C})$ (که مشابه

$$A=\begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & J_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix}$$

بلوک‌بندی شده) به $C(A)$ تعلق دارد:

$$X:=\begin{bmatrix} 0 & Y & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$ که در آن $\rightsquigarrow Y=[I_{m_1}|0]_{m_1\times m_2}$

در واقع برای دیدن این‌که X یا A جابه‌جا می‌گردد، تنها کافی است به زیرماتریس $(m_1+m_2)\times(m_1+m_2)$ واقع در گوشه‌ی بالا و چپ توجه کرد که در آن‌جا داریم:

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0\\ 0 & J_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & Y\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & J_1Y\\ 0 & 0\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix} 0 & Y\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_1 & 0\\ 0 & J_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & YJ_2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

و این دو حاصل‌ضرب برابرند، زیرا $\lambda_2=\lambda_1$ بود و اکنون اگر J را ماتریس مقدماتی ژردان

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{m_1\times m_1}$$

بگیریم که متناظر مقدار ویژه‌ی صفر است، به سادگی می‌توان تحقیق کرد:

$$\begin{cases} J_1Y=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \lambda_1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_1 \end{bmatrix}_{m_1\times m_1} [I_{m_1}|0]_{m_1\times m_2}\\ \qquad =\lambda_1Y+[J|0]_{m_1\times m_2}\\ YJ_2=[I_{m_1}|0]_{m_1\times m_2}\begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}_{m_2\times m_2}\\ \qquad =\lambda_2Y+[J|0]_{m_1\times m_2} \end{cases}$$

پس نشان دادیم که اگر برای ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} J_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix}$$

- که در فرم ژردان خود در نظر گرفته شده- بلوک‌های ژردان ظاهر شده در امتداد قطر متناظر مقدار ویژه‌های دوبه‌دو متمایز نباشند، آن‌گاه $C(A)$ عضوی خارج از زیرفضای n- بعدی $\oplus_{i=1}^{k}C(J_i)$ از خود دربردارد و لذا بعدی بیشتر از n دارد که با روش انتخاب A در تناقض است. پس $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ دوبه‌دو متمایزند. حال توجه کنید که چندجمله‌ای ویژه و هم‌چنین مینیمال هر J_i - که بلوک ژردان $m_i\times m_i$ متناظر مقدار ویژه‌ی λ_i بود- برابر $(x-\lambda_i)^{m_i}$ است. حال با توجه به نمایش بلوکی فوق، چندجمله‌ای‌های ویژه و مینیمال A به ترتیب ضرب چندجمله‌ای‌های ویژه‌ی ماتریس‌های $J_1,\dots J_k$ و ک.م.م چندجمله‌ای‌های مینیمال ماتریس‌های $J_1,\dots J_k$ هستند. ولی در این‌جا ک.م.م چندجمله‌ای‌های $(x-\lambda_i)^{m_i}$، $1\le i\le k$ به دلیل دوبه‌دو متمایز بودن $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ بر $\prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{m_i}$ منطبق است و این بنابر بالا یکسان بودن چندجمله‌ای‌های ویژه و مینیمال A را به دست می‌دهد.

پاسخ ۱۸. نشان می‌دهیم که پاسخ 2^k است. ابتدا توجه کنید که اگر زیرفضای k- بعدی V از $\mathbb{R}^n$ برابر اشتراک ابرصفحه‌های $x_i=0$ در $\mathbb{R}^n$ برای $k<i\le n$ در نظر گرفته شود، آن‌گاه

$$V\cap Z=$$

$$\{(x_1,\dots,x_n)|\forall 1\le i\le k: x_i\in\{0,1\},\forall k<i\le n: x_i=0\}$$

که 2^k عضو دارد. پس برای اثبات ادعای خود تنها کافی است نشان دهیم که $|V\cap Z|\le 2^k$ برای یک زیرفضای k- بعدی از $\mathbb{R}^n$. با جمع زدن بردارهای n- تایی به پیمانه‌ی دو، Z یک فضای برداری n- بعدی بر میدان دو عضوی $\mathbb{Z}_2$ می‌شود. اگر $|V\cap Z|>2^k$، آن‌گاه زیرفضایی از فضای برداری n- بعدی Z بر میدان $\mathbb{Z}_2$ که زیرمجموعه‌ی $V\cap Z$ از Z تولید می‌کند، بیش از 2^k عضو خواهد داشت و بنابراین باید بعد آن بر $\mathbb{Z}_2$ بیش از k باشد، چرا که یک فضای برداری k- بعدی بر میدان $\mathbb{Z}_2$ دقیقا 2^k عضو دارد. بنابراین اگر $|V\cap Z|\le 2^k$ برقرار نشود، زیرمجموعه‌ی $V\cap Z$ از فضای برداری Z باید $k+1$ عنصر مستقل خطی بر $\mathbb{Z}_2$ را دربرداشته باشد که آن‌ها را به $v_1,\dots,v_{k+1}$ نمایش می‌دهیم که بردارهایی از زیرفضای V از $\mathbb{R}^n$ با مولفه‌های متعلق به $\{0,1\}$اند. حال نشان خواهیم داد که این عناصر از V بر $\mathbb{R}$ هم مستقل خطی‌اند: اگر اعداد حقیقی $a_1,\dots,a_{k+1}$ چنان باشند که در $\mathbb{R}^n$:

$$a_1v_1+\cdots+a_{k+1}v_{k+1}=0$$

و حداقل یکی از a_iها غیرصفر باشد، آن‌گاه چون درایه‌های بردارهای $v_1,\dots,v_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ گویا هستند، می‌توان $a_1,\dots,a_{k+1}$ را (که حداقل یکی از آن‌ها ناصفر بود) از میان اعداد گویا انتخاب کرد (در واقع از این نکته‌ی ساده استفاده می‌کنیم که اگر E/F یک توسیع میدانی باشد، زیرمجموعه‌ای از عناصر فضای برداری E^n با مولفه‌های در F، اگر بر میدان E وابسته‌ی خطی باشند، بر میدان F هم وابسته‌ی خطی‌اند.) و لذا به تساوی $a_1v_1+\cdots+a_{k+1}v_{k+1}=0$ در $\mathbb{R}^n$ می‌رسیم که در آن a_iها گویا و حداقل یکی از آن‌ها ناصفر است. پس با ضرب طرفین تساوی در عدد صحیح مناسبی، بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان a_iها را در بالا صحیح گرفت. چون همه‌ی اعداد صحیح $a_1,\dots,a_{k+1}$ صفر نیستند، با تقسیم آن‌ها بر توان مناسبی از ۲، می‌توان فرض کرد که حداقل یکی از آن‌ها فرد است. حال در $a_1v_1+\cdots+a_{k+1}v_{k+1}=0$ با در نظر گرفتن ضرایب به پیمانه‌ی دو، به تساوی

$$(a_1 \mod 2)v_1+\cdots+(a_{k+1} \mod 2)v_{k+1}=0$$

در فضای برداری $Z=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_i\in\{0,1\}\}$ می‌رسیم که در آن‌ها حداقل یکی از ضرایب $a_i \mod 2$ واقع در میدان $\mathbb{Z}_2$، ناصفر است، چرا که حداقل یکی از اعداد صحیح $a_1,\dots,a_{k+1}$ فرد بود. پس عناصر $v_1,\dots,v_{k+1}$ از فضای برداری Z بر میدان $\mathbb{Z}_2$، وابسته‌ی خطی‌اند که با روش انتخاب آن‌ها منافات دارد و این استقلال خطی بردارهای $v_1,\dots,v_{k+1}$ در فضای برداری $\mathbb{R}^n$ را نتیجه می‌دهد. ولی این بردارها همگی در زیرفضای k-بعدی V از $\mathbb{R}^n$ واقع بودند و بنابراین فرض $|V\cap Z|>2^k$ به تناقض می‌رسد.

پاسخ ۱۹. قسمت الف) بنابر تعریف:

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j)j}$$

که در آن S_n گروه جایگشت‌ها مجموعه‌ی $\{1,\dots,n\}$ و sgn نمایانگر علامت یک جایگشت است. چون در مجموع فوق تمامی $a_{\sigma(j)j}$ها نامنفی‌اند و $sgn(\sigma)\in\{0,1\}$:

$$|\det A|=|\sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j)j}|\le\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j)j}$$

$$\overbrace{\le}^{\text{زیرا } a_{ij} \text{ نامنفی‌اند.}}\sum_{f:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}}\prod_{j=1}^n a_{f(j)j}=\prod_{j=1}^n(\sum_{i=1}^n a_{ij})$$

برای هر $1\le j\le n$، $c_j:=\sum_{i=1}^n a_{ij}$ را جمع درایه‌های ستون jاُم می‌گیریم. پس فرض مسأله را درباره‌ی مجموع تمامی درایه‌های A، می‌توان به صورت $\sum_{j=1}^n c_j=n$ نوشت و البته توجه کنید که به دلیل نامنفی بودن درایه‌های A، c_jها همگی نامنفی‌اند. بنابر روش تعریف c_jها، نامساوی حاصل در بالا نشان می‌دهد $|\det A|\le\prod_{j=1}^n c_j$ و حال از نامساوی میانگین حسابی-هندسی:

$$|\det A|\le\prod_{j=1}^n c_j\le\big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n c_j\big)^n=1$$

قسمت ب) اگر $|\det A|=1$، باید در نامساوی میانگین حسابی-هندسی‌ای که در بالا به کار رفت تساوی برقرار شود: $\prod_{j=1}^n c_j=\big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n c_j\big)^n$ که می‌دانیم تنها وقتی رخ می‌دهد که c_jها برابر باشند. ولی $\sum_{j=1}^n c_j$ برابر n بود و لذا $c_1=\cdots=c_n=1$، یعنی جمع درایه‌های هر ستون از A یک است. حال $\lambda\in\mathbb{C}$ را یک مقدار ویژه‌ی دلخواه از A بگیرید. پس بردار $X=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^n-\{0\}$ موجود است که $AX=\lambda X$. این با در نظر گرفتن درایه‌ی iاُم طرفین، نشان می‌دهد که $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j=\lambda x_i$. با اعمال نامساوی مثلث و استفاده از نامنفی بودن a_{ij}ها:

$$|\lambda||x_i|=|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j|\le\sum_{j=1}^n a_{ij}|x_j|$$

پس نشان دادیم که:

$$\forall 1\le i\le n:|\lambda||x_i|\le\sum_{j=1}^n a_{ij}|x_j|$$

با جمع زدن تمامی این نامساوی‌ها:

$$|\lambda|(\sum_{i=1}^n|x_i|)=\sum_{i=1}^n|\lambda||x_i|\le\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^n a_{ij}|x_j|)$$

$$=\sum_{j=1}^n(\overbrace{\sum_{i=1}^n a_{ij}}^{\text{جمع درایه‌های ستون } j \text{اُم} =1})|x_j|=\sum_{j=1}^n|x_j|$$

در بالا می‌توان $\sum_{i=1}^n|x_i|>0$ را از طرفین نامساوی حذف کرد. چرا که $X=(x_1,\dots,x_n)$ عضوی ناصفر از $\mathbb{C}^n$ بود و با حذف آن، به $|\lambda|\le 1$ می‌رسیم. پس اگر $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ را تمامی مقادیر ویژه‌ی ماتریس A (که $n\times n$ بود) بگیریم که در آن هر مقدار ویژه به تعداد تکررش نوشته شده، آن‌گاه از آن‌چه در بالا ثابت گردید، نرم هیچ‌یک از $\lambda_1,\dots,\lambda_n$، از یک تجاوز نمی‌کند. از طرف دیگر، $\det A=\lambda_1\dots\lambda_n$ نرمی برابر یک دارد و لذا باید در همه‌ی نامساوی‌های $\forall 1\le i\le n:|\lambda_i|\le 1$ تساوی برقرار گردد که نشان می‌دهد نرم هر مقدار ویژه از A برابر یک است.

پاسخ ۲۰. قسمت الف) ابتدا توجه کنید که $f(I_n)=1$ و $f(O_{n\times n})=0$ (در این راه‌حل، منظور از I_n ماتریس همانی $n\times n$ و منظور از $O_{k\times l}$ ماتریس $k\times l$ با درایه‌های صفر است). چرا که با به کار بردن ویژگی مفروض برای f:

$$f(I_n)=f(I_nI_n)=(f(I_n))^2\Rightarrow f(I_n)\in\{0,1\}$$

$$f(O_{n\times n}) = f(O_{n\times n}O_{n\times n}) = (f(O_{n\times n}))^{۲}$$

$$\Rightarrow f(O_{n\times n}) \in \{۰,۱\}$$

اگر $f(I_n) = ۰$، آن‌گاه برای هر $A \in M_n(\mathbb{R})$:

$$f(A) = f(AI_n) = f(A)f(I_n) = ۰$$

و لذا $f \equiv ۰$ و اگر هم $f(O_{n\times n}) = ۱$، آن‌گاه برای هر $A \in M_n(\mathbb{R})$:

$$۱ = f(O_{n\times n}) = f(AO_{n\times n}) = f(A)f(O_{n\times n}) = f(A)$$

و لذا $f \equiv ۱$ که هیچ‌یک از این دو حالت بنابر فرض مسأله رخ نمی‌دهد و بنابراین $f(I_n) = ۱$ و $f(O_{n\times n}) = ۰$ نتیجه می‌شوند. به کمک این، یک سمت حکم به سادگی حاصل می‌گردد: اگر ماتریس A متعلق به $M_n(\mathbb{R})$ وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $۱ = f(I_n) = f(AA^{-۱}) = f(A)f(A^{-۱})$ و بنابراین $f(A)$ نمی‌تواند صفر باشد. حال برای تکمیل کار، باید عکس این را هم ثابت کنیم: اگر $f(A) \neq ۰$ آن‌گاه A وارون‌پذیر است. بدین منظور از برهان خلف استفاده می‌کنیم: فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})$ با $\det A = ۰$ چنان باشد که $f(A) \neq ۰$. می‌توان چنین Aای را به قسمی برگزید که $k := rank(A) < n$ حداقل مقدار ممکن باشد. به دلیل آن‌که ثابت کردیم $f(O_{n\times n}) = ۰$، A ماتریس صفر نیست و لذا k یک عدد طبیعی است. قضیه‌ای استاندارد در جبرخطی حکم می‌کند که ماتریس‌های وارون‌پذیر $P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$ موجودند که

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_k & O_{k\times(n-k)} \\ O_{(n-k)\times k} & O_{(n-k)\times(n-k)} \end{bmatrix}$$

با f گرفتن از طرفین و استفاده از ضربی بودن f:

$$f(P)f(A)f(Q) = f\Big(\begin{bmatrix} I_k & O_{k\times(n-k)} \\ O_{(n-k)\times k} & O_{(n-k)\times(n-k)} \end{bmatrix} \Big)$$

که در این تساوی، اعداد $f(P)$ و $f(Q)$ به دلیل وارون‌پذیر بودن P و Q، بنابر طرف دیگر حکم که ثابت شد، ناصفرند. پس

$$f\Big(\begin{bmatrix} I_k & O_{k\times(n-k)} \\ O_{(n-k)\times k} & O_{(n-k)\times(n-k)} \end{bmatrix} \Big) \neq ۰$$

این نشان می‌دهد که مقدار f بر هر ماتریس رتبه‌ی k ناصفر است. چرا که به کار بردن مجدد همان قضیه ثابت می‌کند که هر عنصر رتبه‌ی k از $M_n(\mathbb{R})$ مانند B را می‌توان به ازای $P', Q' \in GL_n(\mathbb{R})$ مناسبی به صورت

$$P' \begin{bmatrix} I_k & O_{k\times(n-k)} \\ O_{(n-k)\times k} & O_{(n-k)\times(n-k)} \end{bmatrix} Q'$$

نوشت و حال با تکرار همان استدلال فوق، $f(B)$ برابر ضرب

$$f\Big(\begin{bmatrix} I_k & O_{k\times(n-k)} \\ O_{(n-k)\times k} & O_{(n-k)\times(n-k)} \end{bmatrix} \Big) \neq ۰$$

خواهد بود در $f(P'), f(Q')$ که به دلیل وارون‌پذیر بودن P' و Q' ناصفرند. این علی‌الخصوص نتیجه می‌دهد که

$$f\Big(\begin{bmatrix} O_{(n-k)\times(n-k)} & O_{k\times(n-k)} \\ O_{k\times(n-k)} & I_k \end{bmatrix} \Big) \neq ۰$$

ولی توجه کنید که ضرب دو ماتریس

$$\begin{bmatrix} I_k & O_{k\times(n-k)} \\ O_{(n-k)\times k} & O_{(n-k)\times(n-k)} \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix} O_{(n-k)\times(n-k)} & O_{k\times(n-k)} \\ O_{k\times(n-k)} & I_k \end{bmatrix}$$

(که $n \times n$ و از رتبه‌ی kاند)، رتبه‌ای کمتر از k خواهد داشت. زیرا اگر $k > \frac{n}{۲}$:

$$\begin{bmatrix} I_k & O_{k\times(n-k)} \\ O_{(n-k)\times k} & O_{(n-k)\times(n-k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_{(n-k)\times(n-k)} & O_{(n-k)\times k} \\ O_{k\times(n-k)} & I_k \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c} O_{n\times(n-k)} & \begin{array}{c} O_{(n-k)\times(۲k-n)} \\ I_{۲k-n} \\ O_{(n-k)\times(۲k-n)} \end{array} & O_{n\times(n-k)} \end{array} \right]$$

و در حالت $k \leq \frac{n}{۲}$ این حاصل‌ضرب صفر خواهد بود. پس رتبه‌ی حاصل‌ضرب

$$\begin{bmatrix} I_k & O_{k\times(n-k)} \\ O_{(n-k)\times k} & O_{(n-k)\times(n-k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_{(n-k)\times(n-k)} & O_{(n-k)\times k} \\ O_{k\times(n-k)} & I_k \end{bmatrix}$$

یا صفر است یا $۲k - n$، و لذا با توجه به $۰ < k < n$ از k کمتر است. پس از روش انتخاب k، باید مقدار f بر حاصل‌ضرب فوق صفر باشد که چون

$$f\Big(\begin{bmatrix} I_k & O_{k\times(n-k)} \\ O_{(n-k)\times k} & O_{(n-k)\times(n-k)} \end{bmatrix} \Big) \neq ۰$$

و

$$f\Big(\begin{bmatrix} O_{(n-k)\times(n-k)} & O_{(n-k)\times k} \\ O_{k\times(n-k)} & I_k \end{bmatrix} \Big) \neq ۰$$

به دلیل ضربی بودن f رخ نخواهد داد. تناقض حاصله نشان می‌دهد که اگر $f(A) \neq ۰$، آن‌گاه A وارون‌پذیر است.

قسمت ب) $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ را با خواص قسمت (الف) و هم‌چنین مشتق‌پذیر در نقطه‌ی $I_n \in M_n(\mathbb{R})$ بگیرید. هر دو ضابطه‌ای که برای f که در صورت مساله بیان شده‌اند، بر باز $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{A \mid \det A > ۰\}$ از $M_n(\mathbb{R})$ متشکل از ماتریس‌های با دترمینان مثبت، به صورت $A \mapsto |\det A|^\lambda$ به ازای یک $\lambda \neq ۰$ داده می‌شوند. پس ابتدا نشان می‌دهیم که اگر تحدید f به باز $GL_n^+(\mathbb{R})$ از $M_n(\mathbb{R})$ (که مولفه‌ی همبندی $GL_n(\mathbb{R})$ حول I_n است.) به صورت $A \mapsto |\det A|^\lambda$ باشد، آن‌گاه $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ یکی از دو مورد بیان شده در قسمت (ب) خواهد بود. از قسمت (الف)،

f بر ماتریس‌های وارون‌ناپذیر صفر است و بنابراین مقدار آن را بر ماتریس‌های با دترمینان منفی بررسی می‌کنیم. ماتریس قطری

$$R := \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

با دترمینان منفی یک را در نظر بگیرید. فرض کنید A ماتریسی $n\times n$ با $\det A < 0$ باشد. پس $RA \in GL_n^+(\mathbb{R})$ و با توجه به این که ضابطه‌ی f بر $GL_n^+(\mathbb{R})$ را می‌دانیم:

$$f(R)f(A) = f(RA) = |\det(RA)|^\lambda = |\det A|^\lambda$$
$$\Rightarrow f(A) = \frac{|\det(A)|^\lambda}{f(R)}$$

ولی $R^2 = I_n$ و بنابراین چون در قسمت (الف) نشان دادیم که $f(I_n) = 1$:

$$(f(R))^2 = f(R^2) = f(I_n) = 1 \Rightarrow f(R) \in \{\pm 1\}$$

پس از بالا، $f(A) = |\det(A)|^\lambda$ یا $f(A) = -|\det(A)|^\lambda$ برای هر ماتریس A با دترمینان منفی، بسته به این که به ترتیب $f(R) = 1$ یا $f(R) = -1$ که ضابطه‌ی $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ را (که بر ماتریس‌های با دترمینان صفر، صفر می‌شد.) به صورت به ترتیب $f(A) = |\det A|^\lambda$ یا

$$f(A) = \begin{cases} |\det A|^\lambda & \det A > 0 \\ 0 & \det A = 0 \\ -|\det A|^\lambda & \det A < 0 \end{cases}$$
$$= sgn(\det A).|\det A|^\lambda$$

به دست می‌دهد. پس توجه خود را به تحدید f به باز $GL_n^+(\mathbb{R})$ از فضای برداری $M_n(\mathbb{R})$ معطوف می‌کنیم که بنابر (الف) با مقادیر در $\mathbb{R} - \{0\}$ خواهد بود و مساله تقلیل می‌یابد به اثبات این امر که هر همریختی گروهی $f : GL_n^+(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R} - \{0\}, \times)$ که در I_n مشتق‌پذیر باشد، به ازای یک عدد حقیقی λ، با ضابطه‌ی $A \mapsto |\det A|^\lambda = (\det A)^\lambda$ داده می‌شود که البته در حالت موردنظر ما، چون بنابر فرض $f \not\equiv 1$، λ ناصفر خواهد بود. پس یک همریختی $f : GL_n^+(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R} - \{0\}, \times)$ را مشابه بالا در نظر بگیرید. مشتق آن در I_n یک نگاشت خطی $\mathrm{D}f(I_n) : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ است. ادعا می‌کنیم که $\mathrm{D}f(I_n)(AB) = \mathrm{D}f(I_n)(BA)$ برای هر $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. کافی است این را با فرض وارون‌پذیر بودن B ثابت کنیم. چرا که به ازای $\mu \in \mathbb{R}$ای $B - \mu I_n$ وارون‌پذیر است و به دلیل خطی بودن، $\mathrm{D}f(I_n)(A(B - \mu I_n)) = \mathrm{D}f(I_n)((B - \mu I_n)A)$ تساوی $\mathrm{D}f(I_n)(AB) = \mathrm{D}f(I_n)(BA)$ را نتیجه می‌دهد. $t \mapsto e^{tAB}$ و $t \mapsto e^{tBA}$ خم‌های هموارِ در باز $GL_n^+(\mathbb{R})$ از فضای برداری $M_n(\mathbb{R})$ هستند که در $t = 0$ از نقطه‌ی I_n با بردارهای مماس به ترتیب AB و BA می‌گذرند و لذا از قاعده‌ی زنجیره‌ای:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t \mapsto f(e^{tAB}))|_{t=0} = \mathrm{D}f(I_n)(AB)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t \mapsto f(e^{tBA}))|_{t=0} = \mathrm{D}f(I_n)(BA)$$

این با توجه به

$$\begin{aligned} f(e^{tAB}) &= f(e^{B^{-1}(tBA)B}) \\ &= f(B^{-1}(e^{tBA})B) \\ &= f(B^{-1})f(e^{tBA})f(B) \\ &= f(e^{tBA})\overbrace{f(B^{-1}B)}^{=f(I_n)=1} \end{aligned}$$

تساوی $\mathrm{D}f(I_n)(AB) = \mathrm{D}f(I_n)(BA)$ برای هر $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ را نتیجه می‌دهد. بنابر حکم ساده‌ای از جبرخطی، چنین تابعکی بر $M_n(\mathbb{R})$ باید مضربی از تریس باشد: عدد حقیقی λ موجود است به قسمی که

$$(*) \forall A \in M_n(\mathbb{R}) : \mathrm{D}f(I_n)(A) = \lambda tr(A)$$

ولی به جز $f : GL_n^+(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R} - \{0\}, \times)$، یک همریختی دیگر $GL_n^+(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R} - \{0\}, \times)$ هم که در همانی مشتق‌پذیر باشد و تابعک خطی حاصل از مشتق آن در همانی با $A \mapsto \lambda tr(A)$ داده شود موجود است و آن $A \mapsto (\det A)^\lambda$ است. چرا که می‌دانیم مشتق تابع هموار $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ در I_n برابر است با تابعک $tr : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. پس نسبت این دو یعنی $A \mapsto \frac{f(A)}{(\det A)^\lambda}$، یک همریختی دیگر $g : GL_n^+(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R} - \{0\}, \times)$ خواهد بود که در I_n مشتق‌پذیر و مشتق آن در این نقطه صفر است. زیرا با مشتق‌گیری از

$$\begin{cases} g : GL_n^+(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto f(A)(\det A)^{-\lambda} \end{cases}$$

در I_n:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}g(I_n)(A) = & \overbrace{\mathrm{D}f(I_n)(A)}^{=\lambda tr(A)\ \text{از}\ (*)}(\det I_n)^{-\lambda} \\ & - \lambda \overbrace{f(I_n)}^{\text{از حل قسمت (الف)}\ =1} (\det I_n)^{-\lambda-1} \overbrace{\mathrm{D}(\det)(I_n)}^{=tr:M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}}(A) \\ = & \, 0 \end{aligned}$$

پس به منظور اثبات $\forall A \in GL_n^+(\mathbb{R}) : f(A) = (\det A)^\lambda$ که حل را تکمیل خواهد کرد، کافی است نشان دهیم هر همریختی گروهی $g : GL_n^+(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R} - \{0\}, \times)$ که در نقطه‌ی متناظر ماتریس همانی مشتق‌پذیر و با مشتق صفر باشد، نگاشت ثابت با مقدار یک خواهد بود. بدین منظور توجه کنید که مشتق‌پذیری g در

I_n و $Dg(I_n) = 0$، نشان می‌دهد که $g : GL_n^+(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R} - \{0\}, \times)$ در سایر نقاط هم مشتق‌پذیر با مشتق صفر است، چرا که برای $A \in GL_n^+(\mathbb{R})$ دلخواه، g را به دلیل همریختی بودن می‌توان به شکل $X \mapsto g(A)g(A^{-1}X)$ نوشت و آن‌گاه مشتق‌پذیری g در I_n مشتق‌پذیری $X \mapsto g(A^{-1}X)$ در $X = A$ را نتیجه می‌دهد و لذا g با ضابطه‌ی $X \mapsto g(A)g(A^{-1}X)$ در A مشتق‌پذیر و مشتق آن در A به کمک قاعده‌ی زنجیره‌ای برابر است با

$$\begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ X \mapsto g(A)Dg(I_n)(A^{-1}X) \end{cases}$$

که به دلیل $Dg(I_n) \equiv 0$ صفر است. پس g تابعی حقیقی مقدار بر باز همبند $GL_n^+(\mathbb{R})$ از فضای برداری $M_n(\mathbb{R})$ است که مشتق آن در هر نقطه صفر است و لذا متحد است با $g(I_n) = 1$ ($g : GL_n^+(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R} - \{0\}, \times)$ همریختی است و لذا ماتریس همانی را به یک می‌برد.) که همان چیزی است که در پی اثبات آن بودیم.[2]

---

[2] اگر بپذیریم که زیرگروه مشتق $GL_n(\mathbb{R})$ برابر است $SL_n(\mathbb{R})$، می‌توان راه‌حل کوتاه‌تری برای این مسأله ارائه کرد.