مسأله
خشایار فیلُم

مسأله ۱. فرض کنید G یک گروه متناهی با دقیقا ۵۰، ۷-زیرگروه سیلو باشد. فرض کنید P یک ۷-زیرگروه سیلو از G باشد و $N = N_G(P)$ نرمال‌ساز آن در G.

الف) ثابت کنید N زیرگروهی ماکسیمال از G است.

ب) اگر N یک ۵-زیرگروه سیلو مانند Q داشته باشد و $Q \triangleleft N$، ثابت کنید $Q \triangleleft G$.

مسأله ۲. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ناتهی از گروه n عضوی G باشد. برای هر k تعریف می‌کنیم

$$S^{(k)} = \{\prod_{i=۱}^{k} s_i \mid s_i \in S\}$$

نشان دهید $S^{(n)}$ زیرگروهی از G است.

مسأله ۳. نشان دهید اگر R حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار باشد که هر ایده‌آل اول آن ماکسیمال است، آن‌گاه به ازای هر $x \in R$، $a \in R$ وجود دارد به قسمی که $x + ax^۲$ پوچ‌توان است.

مسأله ۴. فرض کنید n عددی فرد باشد. ثابت کنید برای هر ایده‌آل I از حلقه‌ی خارج‌قسمتی $\frac{\mathbb{Z}_۲[x]}{(x^n-۱)}$ داریم: $I^۲ = I$.

مسأله ۵. فرض کنید G زیرگروهی از گروه همیومورفیسم‌های $S^۱$ (دایره واحد) باشد با این ویژگی که مدار هر نقطه از $S^۱$ در عمل G متناهی است. نشان دهید G متناهی است.

مسأله ۶. ثابت کنید برای هر $\alpha \in (۰, \pi)$ و هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\sin\alpha + \frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha + \cdots + \frac{۱}{n}\sin n\alpha > ۰$$

مسأله ۷. حاصل انتگرال $\int_۰^۱ \frac{\ln(x+۱)}{x^۲+۱}\mathrm{d}x$ را بیابید.

مسأله ۸. فرض کنید $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از توابع پیوسته‌ی حقیقی بر بازه‌ی $[a,b]$ با ویژگی‌های زیر باشد:

- اگر $f, g \in \mathcal{F}$ آنگاه $۰ \leq \min(f,g) \in \mathcal{F}$.
- برای هر $x \in [a,b]$: $\inf_{g\in\mathcal{F}} g(x) = ۰$

نشان دهید که $\inf_{g\in\mathcal{F}} \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = ۰$.

مسأله ۹. $f : [۰,۱] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته است و $f(۱) = ۰$. ثابت کنید $c \in (۰,۱)$ وجود دارد که $f(c) = \int_۰^c f(x)\mathrm{d}x$.

مسأله ۱۰. $h : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ را تابعی مشتق‌پذیر با مشتقات پاره‌ای پیوسته بگیرید که به ازای ثابت‌های مناسبی هم‌چون a, b، در معادله‌ی زیر صدق می‌کند:

$$h(x,y) = a\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) + b\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)$$

نشان دهید h در صورت کران‌دار بودن باید متحد با صفر باشد.

مسأله ۱۱. ثابت کنید عملگر خطی کران‌دار و خودتوان T بر فضای هیلبرت $(H, <,>)$، خودالحاق است اگر و تنها اگر $||T|| \in \{۰,۱\}$. (بنابر تعریف، خودتوان بودن عملگر T یعنی $T^۲ = T$ که در آن منظور از $T^۲$ عملگر $T \circ T$ است.)

مسأله ۱۲. فرض کنید $p(z)$ یک چندجمله‌ای درجه n با ضرایب مختلط باشد که تمامی ریشه‌هایش در گوی باز واحد واقع‌اند. قرار دهید

$$p^*(z) = z^n \overline{p(\frac{۱}{\bar{z}})}$$

که آن نیز همانند $p(z)$ یک چندجمله‌ای درجه‌ی n از z است. نشان دهید تمامی ریشه‌های چندجمله‌ای $p(z) + p^*(z)$ در گوی بسته‌ی واحد واقعند.

مسأله ۱۳. فرض کنید $S_۰$ زیرمجموعه‌ای متناهی از اعداد طبیعی باشد. زیرمجموعه‌های متناهی $S_۱, S_۲, \ldots$ از اعداد طبیعی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

عدد صحیح a در $S_{n+۱}$ است اگر و تنها اگر دقیقا یکی از a یا $a-۱$ در S_n باشد.

نشان دهید نامتناهی عدد طبیعی N وجود دارد با این ویژگی که

$$S_N = S_۰ \cup \{N + a \mid a \in S_۰\}$$

مسأله ۱۴. قرار دهید $x_۰ = ۱$ و برای هر $n \geq ۰$، $x_{n+۱}$ را به روش استقرایی و با ضابطه‌ی $x_{n+۱} = ۳x_n + \lfloor\sqrt{۵}x_n\rfloor$ از x_n بسازید. چندجمله‌ی ابتدایی این دنباله این‌گونه خواهند بود:

$$x_۱ = ۵, x_۲ = ۲۶, x_۳ = ۱۳۶, x_۴ = ۷۱۲$$

فرمولی بسته برای $x_{۲۰۰۷}$ بیابید.

مسأله ۱۵. تعیین کنید که آیا تابع دو متغیره‌ی $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{N}$ با این خاصیت که تساوی $f(x,y) = f(y,z)$ برای اعداد حقیقی x، y و z نتیجه بدهد که $x = y = z$ وجود دارد یا خیر؟

مسأله ۱۶. A و B دو ماتریس $n \times n$ با درایه‌های حقیقی هستند و

$$A^۲ + B^۲ = AB$$

ثابت کنید اگر $AB - BA$ وارون‌پذیر باشد آن‌گاه $۳ \mid n$.

مسأله ۱۷. $M_n(\mathbb{C})$ را فضای برداری ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های مختلط بگیرید و برای هر عضو A از آن، $C(A)$ را زیرفضای
$$\{B \in M_n(\mathbb{C}) \mid AB = BA\}$$
متشکل از ماتریس‌هایی بگیرید که با A جابه‌جا می‌شوند.

الف) ثابت کنید $\min_{A\in M_n(\mathbb{C})}(\dim_{\mathbb{C}} C(A)) = n$.

ب) فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{C})$ چنان باشد که $C(A)$، n-بعدی شود. نشان دهید چندجمله‌ای‌های مشخصه و مینیمال A برابرند.

مسأله ۱۸. قرار دهید
$$Z = \{(x_۱, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall ۱ \leq i \leq n : x_i \in \{۰, ۱\}\}$$
فرض کنید $۰ \leq k \leq n$ داده شده باشد. حداکثر مقدار ممکن برای تعداد اعضای $Z \cap V$ را وقتی که V میان زیرفضاهای k-بعدی $\mathbb{R}^n$ تغییر می‌کند بیابید.

مسأله ۱۹. فرض کنید $A = [a_{ij}]_{۱\leq i,j\leq n}$ یک ماتریس $n \times n$ باشد که همه‌ی درایه‌های آن نامنفی‌اند و علاوه بر این:
$$\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} a_{ij} = n$$

الف) ثابت کنید $|\det A| \leq ۱$.

ب) اگر $|\det A| = ۱$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ یک مقدار ویژه‌ی دلخواه از A باشد، نشان دهید $|\lambda| = ۱$.

مسأله ۲۰. $M_n(\mathbb{R})$ را فضای برداری ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های حقیقی بگیرید. فرض کنید $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ دارای این خاصیت باشد که برای هر $A, B \in M_n(\mathbb{R})$: $f(AB) = f(A)f(B)$ و f متحدا برابر صفر یا یک نیست.

الف) نشان دهید ماتریس A وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر $f(A) \neq ۰$.

ب) ثابت کنید اگر علاوه بر این شرایط، $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ در نقطه‌ی متناظر ماتریس همانی مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه به ازای یک عدد حقیقی $\lambda \neq ۰$، ضابطه‌ی f به یکی از صورت‌های زیر خواهد بود:
$$\begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto |\det A|^{\lambda} \end{cases}$$
$$\begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto sgn(\det A).|\det A|^{\lambda} \end{cases}$$
که در آن sgn نماد تابع علامت است.(راهنمایی: می‌توانید از این حکم جبرخطی استفاده کنید: اگر $g : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ تابعکی خطی باشد با این ویژگی که همواره $g(AB) = g(BA)$، آن‌گاه g مضربی از تابعک تریس خواهد بود.)