مجله‌ی ریاضی شریف
سال دوم، شماره چهارم

نگرشی دیگر بر مفهوم محاسبه

اوژن غنی‌زاده‌ی خوب

۱ مقدمه

در اوائل قرن بیستم، هیلبرت در انتظار دستگاه فرمالی برای بیان ریاضیات بود که در آن تمامی گزاره‌های درست قابل اثبات باشند، هیچ تناقضی در آن نباشد و به روش تصمیم‌گیری مشخصی برای تشخیص صحت هر گزاره‌ی داده شده مجهز باشد. متاسفانه در سال ۱۹۳۱ قضیه‌ی ناتمامیت اول گودل [۱] نشان داد که هر چهارچوب منطقی در صورتی که به اندازه‌ی کافی جامع باشد تا بتوان در آن قضایای حساب را بیان کرد، نمی‌تواند همزمان سازگار [۲] و کامل [۳] باشد، یعنی یا تمامی گزاره‌های درست در آن قابل اثبات نیستند و یا شامل تناقض است. [۴]

،بنابراین وجود بخش اول دستگاه ایده‌آل هیلبرت غیرممکن است. اما بخش دوم آن نیز چنین است؟ یعنی آیا می‌توان روشی برای تشخیص اثبات‌پذیری یک گزاره‌ی دلخواه ارائه کرد؟ جواب این سوال نیز چنان‌چه امروزه می‌دانیم منفی است. اولین اثبات این امر توسط آلونزو چرچ [۵] در سال ۱۹۳۵ مطرح شد، هر چند امروزه آن‌چه به عنوان جواب این سوال مطرح می‌شود مساله‌ی پایان‌پذیری [۶] است که منجر به اثبات امکان‌ناپذیری وجود چنین روشی می‌شود. این مساله و نتایج آن چند ماه بعد از انتشار کار چرچ توسط آلن تورینگ [۷] مطرح شد و به دلیل فراگیری آن بین کامپیوتردان‌ها، کار چرچ را به نوعی در سایه قرار داد. کار چرچ و تورینگ هر دو در راستای اثبات امکان‌ناپذیری وجود روشی برای محاسبه‌ی اثبات‌پذیری گزاره‌ای دلخواه است، بنابراین بیان آن‌ها بدون ارائه‌ی تعریفی فرمال از مفهوم محاسبه و محاسبه‌پذیری ممکن نیست. چرچ و تورینگ در حقیقت در متن مقالات خود به صورت مشخص اولین صورت‌های فرمال این مفاهیم را عرضه کردند. فرمال‌سازی‌هایی که با وجود تفاوت صوری یکسان بودنشان در سال ۱۹۳۶ توسط خود چرچ و تورینگ نشان داده‌شد [۲]. چنان‌چه گفته شد کارهای چرچ به نسبت کارهای تورینگ با وجود برخورداری از اهمیت یکسان بسیار کمتر شناخته‌شده‌است. در این مطلب به بیان مختصر کار چرچ و نگرش وی به مفهوم محاسبه و محاسبه‌پذیری می‌پردازیم.

[۱] Godel's First Incompleteness Theorem

[۲] Consistent

[۳] Complete

[۴] بیان ساده‌ی این قضیه به این شکل است: دستگاه منطقی s با شرایط مذکور را در نظر بگیرید. حال گزاره‌ی G را چنین تعریف کنید: $G \equiv s \nvdash G$ که در آن $s \vdash G$ به معنای اثبات پذیری G در s است. حال اگر s کامل باشد، یا G در آن اثبات می‌شود و یا رد، که هر دوی این حالات منجر به تناقض است.

[۵] Alonzo Church

[۶] Halting Problem

[۷] Alan Turing

۲ تعاریف

مبنای کار چرچ ارائه‌ی تعریفی از مفهوم محاسبه‌پذیری موثر [۸] است. برای بیان این تعریف، وی از سه مفهوم فرمول خوش‌ساخت [۹] ، متغیر آزاد [۱۰] و متغیر وابسته [۱۱] استفاده می‌کند:

تعریف ۱.۲. *فهرستی شامل علائم* $\{,\},[,],(,),\lambda,$ *و مجموعه‌ای شمارا از علائم* $a, b, c, ...$ *که متغیر خوانده می‌شوند را در نظر بگیرید. به هر دنباله‌ی متناهی از علائم این فهرست* ***فرمول*** *اطلاق می‌شود. سه مفهوم* ***فرمول خوش‌ساخت*** *،* ***متغیر آزاد*** *و* ***متغیر وابسته*** *به شیوه‌ی استقرائی چنین تعریف می‌شوند: هر متغیر x به خودی خود فرمولی خوش‌ساخت است و x در این فرمول به عنوان متغیری آزاد ظاهر می‌شود؛ اگر فرمول‌های F و X فرمول‌هایی خوش‌ساخت باشند فرمول $\{F\}(X)$ نیز فرمولی خوش‌ساخت است و ظاهر شدن x در F یا X به عنوان متغیری آزاد (وابسته) به معنای ظاهر شدن آن در $\{F\}(X)$ به عنوان متغیری آزاد (وابسته) است؛ و اگر M فرمولی خوش‌ساخت باشد که x در آن به عنوان متغیری آزاد ظاهر می‌شود، آن‌گاه $\lambda x[M]$ نیز فرمولی خوش‌ساخت است که x در آن به عنوان متغیری وابسته ظاهر شده و هر متغیر دیگری مانند y که در M به عنوان متغیری آزاد (وابسته) ظاهر می‌شود در $\lambda x[M]$ نیز به عنوان متغیری آزاد (وابسته) ظاهر می‌شود [۱].*

تعریف ۱.۲ را امروزه با تعریف معادل ولی راحت‌تری و تحت

[۸] Effective Calculability

بطور کلی مفهوم محاسبه‌پذیری موثر بر مبنای مفهوم روش موثر محاسبه تعریف می‌شود. روش موثر محاسبه برای رده‌ی مشخصی از مسائل، روشی است که (۱) همواره جوابی ارائه دهد، (۲) هیچ‌گاه پاسخ غلط ارائه نکند، (۳) همواره در تعداد متناهی مرحله به پایان برسد و (۴) برای تمامی مسائل رده‌ی مورد بحث کارا باشد. در مورد کار چرچ، در حقیقت مفهوم محاسبه‌پذیری برای رده‌ای از مسائل نظریه‌ی اعداد مد نظر است که معادل پیدا کردن تابعی چون f از n متغیر صحیح $x_1, ..., x_n$ به ازای گزاره‌ی داده شده باشند بطوریکه در گزاره‌ی مذکور $x_1, ..., x_n$ به شکل متغیرهای آزاد ظاهر شده و $f(x_1, ..., x_n) = 2$ شرط لازم و کافی برای ارضا شدن گزاره‌ی مورد نظر باشد. [۱]

[۹] Well-Formed Formula

[۱۰] Free Variable

[۱۱] Bounded Variable

عنوان **عبارت لامبدا** [۱۲] چنین بیان می‌کنند:

تعریف ۲.۲. *فرض کنید V مجموعه‌ای شمارا از متغیرها باشد. آن‌گاه مجموعه‌ی عبارات لامبدا Λ و توابع $FV : \Lambda \to ۲^V$ و $BV : \Lambda \to ۲^V$ به شکل استقرایی چنین تعریف می‌شوند ([۳]):*

$$(۱)\quad x \in V \Rightarrow x \in \Lambda$$
$$FV(x) = \{x\}$$
$$BV(x) = \emptyset$$
$$(۲)\quad M, N \in \Lambda \Rightarrow (MN) \in \Lambda$$
$$FV(MN) = FV(M) \cup FV(N)$$
$$BV(MN) = BV(M) \cup BV(N)$$
$$(۳)\quad M \in \Lambda, x \in FV(M) \Rightarrow (\lambda x M) \in \Lambda$$
$$FV(\lambda x M) = FV(M) - \{x\}$$
$$BV(\lambda x M) = BV(M) \cup \{x\}$$

که این تعریف را می‌توان با قرارداد زیر ساده‌تر کرد:

قرارداد ۳.۲. *– علائم کوچک مانند $x, y, \ldots$ برای نشان دادن متغیرها و علائم بزرگ مانند $M, N, \ldots$ برای نشان دادن عبارات لامبدای دلخواه استفاده می‌شوند؛*

– عبارات لامبدا به فرم کلی $(\ldots((FM_۱)M_۲)\ldots M_n)$ را به طور خلاصه با $FM_۱M_۲\ldots M_n$ نمایش می‌دهیم؛

– عبارات لامبدا به فرم کلی $(\lambda x_۱(\lambda x_۲(\ldots(\lambda x_n M))\ldots))$ را با به طور خلاصه با $\lambda x_۱x_۲\ldots x_n.M$ نمایش می‌دهیم.

اما هدف از این تعاریف چیست؟ به مثال زیر دقت کنید:

مثال ۴.۲. *فرض کنید عباراتی چون $M \equiv x^۲ + ۳x + ۵$ و $N \equiv ۱ + ۱$ توسط عبارات لامبدایی قابل بیان باشند. اگر قاعده‌ی ۳ را روی M اجرا کنیم، حاصل عبارتی چون $\lambda x.M$ است که آن را به مثابه تابعی (بی‌نام) بر حسب x تلقی می‌کنیم. به همین دلیل، قاعده‌ی ۳ را معمولا قاعده‌ی انتزاع [۱۳] می‌نامند. حال فرض کنید قاعده‌ی ۲ را روی $\lambda x.M$ و N اجرا کنیم. عبارت حاصل را به مثابه اجرای تابع توصیف شده در $\lambda x.M$ روی عبارت N در نظر می‌گیریم. به همین دلیل قاعده‌ی ۲ را معمولا قاعده‌ی اجرا [۱۴] می‌نامند. بنابراین، اگر در حساب عادی عبارات $M' \equiv f(x) = x^۲ + ۳x + ۵$ و $N' \equiv ۱ + ۱$ را در نظر بگیریم، عبارت $\lambda x.M$ معادل لامبدای عبارت M' ؛ عبارت N معادل لامبدای عبارت N' و عبارت $(\lambda x.M)N$ معادل لامبدای عبارت $f(۱+۱)$ است.*

اما اگر قرار باشد چنین تناظری بین حساب عادی و حساب عبارات لامبدا برقرار باشد، باید عبارت لامبدایی معادل با $۲^۲ + ۳ * ۲ + ۵$ داشته‌باشیم و به تعبیری بتوان نوشت $(\lambda x.M)N = ۲^۲ + ۳ * ۲ + ۵$. با افزودن قواعدی بر عبارات لامبدا، چنین امری نیز میسر است. در حقیقت ترکیب عبارات لامبدا با این قواعد حسابی را به وجود می‌آورد که به **حساب لامبدا** [۱۵] معروف است و مبنای اصلی چهارچوب محاسباتی چرچ است.

۳ حساب لامبدا

تعریف ۱.۳. *مفهوم جاینشینی را به شکل زیر تعریف می‌کنیم (در این روابط $x \in FV(M)$ و $x \neq y$ مفروض است):*

$$x[x := N] = N$$
$$y[x := N] = y$$
$$(M_۱M_۲)[x := N] = (M_۱[x := N])(M_۲[x := N])$$
$$(\lambda y.M)[x := N] = \lambda y.M[x := N])$$

حال با استفاده از تعریف فوق می‌توانیم به بیان قاعده‌ی زیر که معروف به **قاعده‌ی اصلی** [۱۶] است ([۳]) بپردازیم:

$$(\lambda x.M)N = M[x := N]$$ [۱۷]

حال با استفاده از قاعده‌ی اصلی، با مفروضات مثال ۴.۲ لااقل خواهیم داشت: $(\lambda x.M)N = (۱+۱)^۲ + ۳ * (۱+۱) + ۵$ برای عملگر $=$ معرفی شده در قاعده‌ی اصلی، قواعد زیر را نیز مفروض داریم:

$$M = M$$
$$M = N \Rightarrow N = M$$
$$M = N, N = L \Rightarrow M = L$$
$$M = M' \Rightarrow MZ = M'Z$$
$$M = M' \Rightarrow ZM = ZM'$$
$$M = M' \Rightarrow \lambda x.M = \lambda x.M'$$

[۱۲] Lambda Term

[۱۳] Abstraction

[۱۴] Application

[۱۵] Lambda Calculus

[۱۶] Principal Axiom

[۱۷] بیان خود چرچ از حساب لامبدا اندکی متفاوت است. به جای قواعد فوق، وی قواعد زیر را به عنوان قواعد حساب لامبدا معرفی می‌کند:
– جاینشینی y به جای x در $\lambda x.M$ به شکل $\lambda y.M[x := y]$ به شرطی که y در M ظاهر نشده‌باشد؛
– جاینشینی $(\lambda x.M)N$ به جای $M[x := N]$ به شرطی که متغیرهای وابسته‌ی M از x و متغیرهای آزاد N مجزا باشند؛
– جاینشینی $M[x := N]$ به جای $(\lambda x.M)N$ به شرطی که متغیرهای وابسته‌ی M از x و متغیرهای آزاد N مجزا باشند.

مثال ۲.۳. *در زیر نمونه‌هایی از عبارات لامبدا را می‌بینیم:*

- $I \equiv \lambda x.x$
- $J \equiv \lambda x.y$
- $K \equiv \lambda y.J$
- $True \equiv \lambda xy.x$
- $W \equiv (\lambda ixy.iyx)(\lambda xy.y)$

عبارت لامبدای I در حقیقت معادل تابع همانی است. عبارت لامبدای J معادل تابعی ثابت است که مقدار y همان مقدار ثابت آن است. عبارت لامبدای K معادل تابعی است مانند $f(c)$ که خروجی آن تابعی ثابت با مقدار ثابت c است. عبات $True$ تابعی است که دو متغیر را گرفته و متغیر اول را به عنوان خروجی برمی‌گرداند. دقت کنید که اگر $False$ را به شیوه‌ای مشابه چنین تعریف کنیم که دو متغیر را گرفته و دومی را به عنوان خروجی برمی‌گرداند، آن‌گاه عبارت سمت راست W همان عبارت $False$ است، بنابراین می‌توان چنین استنباط کرد که عبارت سمت چپ به نوعی معادل عملگر منطقی نقیض است. در حقیقت داریم:

$$\begin{aligned} W &\equiv (\lambda ixy.iyx)(\lambda xy.y) \\ &= \lambda xy.(\lambda xy.y)yx \\ &= \lambda xy.x \\ &\equiv True \end{aligned}$$

دقت کنید که چون $\equiv$ عملگری برای تعریف است، برهان فوق اثباتی بر گزاره‌ی $W = True$ است. اما اگر تعریف می‌کردیم $True \equiv \lambda ab.a$ آن‌گاه به مشکل برمی‌خوردیم، با این که تعریف متفاوتی ارائه نکرده‌ایم. برای حل این مشکل کافیست قانون زیر را به قوانینمان اضافه کنیم [۱۸] :

$$y \notin FV(M) \cup BV(M) \Rightarrow \lambda x.M = \lambda y.M[x := y]$$

اکنون، به نظر می‌رسد حساب لامبدا بسیاری شرایط مورد نیاز برای برقراری تناظری با حساب عادی را داراست. اما اگر بخواهیم روابط مثال ۴.۲ را در این حساب نمایش دهیم، هنوز ابزار مهمی را در اختیار نداریم: اعداد و عملگرهای آن‌ها را. حقیقت امر این است که در حساب لامبدا تعاریف مختلفی از اعداد و عملگرهای آن‌ها می‌توان ارائه داد که برای مقاصد مختلف کارآمد باشند. در انتهای این بخش اعداد و عملگرهای مطرح شده توسط خود چرچ را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۳.۳. *اعداد چرچ را می‌توان به صورت بازگشتی به شکل زیر تعریف کرد ([۳]) :*

$$C_0 \equiv \lambda fx.x$$

$$C_{n+1} \equiv \lambda fx.f(C_n fx)$$

معادلا، اگر n بار اجرای عبارت f روی عبارت x را با $f^n x$ نمایش دهیم، داریم:

$$C_n \equiv \lambda fx.f^n x$$

حال با استفاده از اعداد چرچ می‌توان عملگرهای اعداد صحیح را روی اعداد چرچ تعریف کرد. ابتدا لم زیر را داریم:

لم ۴.۳. *برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:*

$$(i) \quad (C_n x)^m y = x^{nm} y$$

$$(ii) \quad m > 0 \Rightarrow (C_n)^m x = C_{n^m} x$$

اثبات. (i) با استفاده از استقراء. برای $m = 0$ دو طرف رابطه برابر y خواهند بود. حال فرض کنیم حکم برای m برقرار باشد. داریم:

$$\begin{aligned} (C_n x)^{m+1} y &= (C_n x)((C_n x)^m y) \\ &= (C_n x)(x^{nm} y) \\ &= x^n (x^{nm} y) \\ &= x^{nm+n} y = x^{m(n+1)} y \end{aligned}$$

(ii) با استفاده از استقرا. برای $m = 1$ دو طرف برابر $C_n x$ خواهند بود. حال فرض کنید حکم برای m برقرار باشد. داریم:

$$\begin{aligned} (C_n)^{m+1} x &= C_n((C_n)^m x) \\ &= C_n(C_{n^m} x) \\ &= \lambda y.(C_{n^m} x)^n y \\ &= \lambda y.x^{n^m n} y \\ &= \lambda y.x^{n^{m+1}} y = C_{n^{m+1}} x \end{aligned}$$

□

حال با استفاده از این لم، قضیه‌ی زیر را داریم:

قضیه ۵.۳. *تعریف کنید:*

$$C_+ \equiv \lambda abfx.af(bfx)$$

$$C_* \equiv \lambda abf.a(bf)$$

$$C_{exp} \equiv \lambda ab.ba$$

آن‌گاه برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ خواهیم داشت:

$$(i) \quad C_+ C_n C_m = C_{n+m}$$

$$(ii) \quad C_* C_n C_m = C_{nm}$$

$$(iii) \quad C_{exp} C_n C_m = C_{n^m}$$

(با شرط $m > 0$ برای حکم (iii))

[۱۸] معادلا، می‌شد عملگر $\equiv$ را چنین تعریف کرد: می‌گوییم $M \equiv N$ اگر M و N با تغییر نام متغیرهای وابسته‌شان به یکدیگر تبدیل شوند [۳] .

اثبات. (i):

$$C_+C_nC_m = \lambda fx.C_nf(C_mfx)$$
$$= \lambda fx.f^n(f^mx) = \lambda fx.f^{n+m}x$$
$$= C_{n+m}$$

(ii):

$$C_*C_nC_m = \lambda fx.C_n(C_mf)x$$
$$= \lambda fx.(C_mf)^nx$$

اما بنا بر لم ۴.۳ داریم:

$$\lambda fx.(C_mf)^nx = \lambda fx.f^{nm}x$$
$$= C_{nm}$$

(iii):

$$C_{exp}C_nC_m = \lambda fx.C_m(C_n)fx$$
$$= \lambda fx.(C_n)^mfx$$

اما مجددا بنا بر لم ۴.۳ داریم:

$$\lambda fx.(C_n)^mfx = \lambda fx.C_{n^m}fx$$
$$= C_{n^m}$$

□

اثبات وجود سایر عملگرها از حوصله‌ی این بحث خارج است، هرچند در بخش بعد به طور غیر مستقیم وجود آن‌ها نیز اثبات خواهد شد.

۴ محاسبه‌پذیری

محاسبه‌پذیری خود مفهومی است که در زمان چرچ به شکل حال وجود نداشت، در نتیجه چرچ حساب لامبدا را به طور مستقیم برای حل مساله‌ی اثبات‌پذیری به کار می‌برد. امروزه اما این مفاهیم در قالب صورت‌هایی دیگر بسیار شناخته‌شده‌است، و ما در این مقاله برای بیان ارتباط حساب لامبدا با مفهوم محاسبه‌پذیری تناظر آن با کلاس توابع بازگشتی [۱۹] را نشان می‌دهیم. برای یاد آوری، توابع بازگشتی به کوچک‌ترین کلاس توابع عددی اطلاق می‌شود که شامل توابع اولیه[۲۰] باشند و تحت ترکیب [۲۱] ، بازگشت اولیه [۲۲] و کمینه‌سازی [۲۳] بسته باشند. [۲۴]

برای نشان دادن تناظر مذکور، از مفهومی به نام λ-تعریف‌پذیری[۲۵] استفاده می‌کنیم:

تعریف ۱.۴. *فرض کنید برای هر عدد $n \in \mathbb{N}$ عبارات لامبدای متمایزی به شکل D_n وجود داشته‌باشد. با در نظر گرفتن این اعداد، می‌گوییم تابع $\phi : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ تابعی λ-تعریف‌پذیر است اگر عبارت لامبدایی مانند Φ وجود داشته‌باشد که برای هر $x_1, ..., x_m \in \mathbb{N}$ داشته‌باشیم:*

$$D_{\phi(x_1,...,x_n)} = \Phi D_{x_1}...D_{x_n}$$

با استفاده از تعریف ۱.۴ ، برای نشان دادن وسع محاسباتی حساب لامبدا، کافیست نشان دهیم تمامی توابع بازگشتی λ-تعریف‌پذیرند. با وجود این که برای این کار می‌توان از اعداد چرچ نیز استفاده کرد، برای راحتی از تعریف دیگری از اعداد استفاده می‌کنیم که در سال ۱۹۷۶ توسط برندرگت [۲۶] ([۳]) ارائه شد.

تعریف ۲.۴. *برای $M, N \in \Lambda$ زوج مرتب $[M, N]$ را چنین تعریف می‌کنیم:*

$$[M, N] \equiv \lambda z.zMN$$

دقت کنید که با تعاریف مثال ۲.۳ از عبارات $True$ و $False$ داریم:

$$[M, N]True = M$$
$$[M, N]False = N$$

تعریف ۳.۴. *برای هر $n \in \mathbb{N}$ عبارت $\ulcorner n \urcorner$ به شکل استقرائی چنین تعریف می‌شود:*

$$\ulcorner 0 \urcorner \equiv I$$
$$\ulcorner n+1 \urcorner \equiv [False, \ulcorner n \urcorner]$$

تعریف ۴.۴. *توابع S^+ ، P^- ، و $Zero$ چنین تعریف می‌شوند:*

$$S^+ \equiv \lambda x.[False, x]$$
$$P^- \equiv \lambda x.xFalse$$
$$Zero \equiv \lambda x.xTrue$$

---

[۱۹] Recursive Functions

[۲۰] Initial Functions

[۲۱] Composition

[۲۲] Primitive Recursion

[۲۳] Minimalization

[۲۴] برای یاد آوری بیشتر، توابع اولیه به سه تابع زیر اطلاق می‌شود:

$$U_i^n(x_1, ..., x_n) = x_i, (1 <= i <= n)$$
$$S^+(n) = n + 1$$
$$Z(n) = 0$$

به علاوه می‌گوییم کلاس $\mathcal{A}$ از توابع عددی:

– تحت عمل ترکیب بسته است اگر $\chi, \psi_1, ..., \psi_m \in \mathcal{A}$ نتیجه دهد هر تابع $\varphi = \chi(\psi_1(\vec{n}), ..., \psi_m(\vec{n}))$ نیز در $\mathcal{A}$ است؛

– تحت عمل بازگشت اولیه بسته است اگر $\chi, \psi \in \mathcal{A}$ نتیجه دهد هر تابع φ تعریف شده به شکل

$$\varphi(0, \vec{n}) = \chi(\vec{n})$$
$$\varphi(k+1, \vec{n}) = \psi(\varphi(k, \vec{n}), k, \vec{n})$$

نیز در $\mathcal{A}$ است؛

– تحت عمل کمینه‌سازی بسته است اگر $\chi \in \mathcal{A}$ و $\forall \vec{n} \exists m \chi(\vec{n}, m) = 0$ نتیجه دهند هر تابع به شکل $\varphi(\vec{n}) = \mu m[\chi(\vec{n}, m) = 0]$ نیز در $\mathcal{A}$ قرار دارد.

[۲۵] λ-definability

[۲۶] Barendregt

دقت کنید که بوضوح داریم:

$$S^{+}\ulcorner n\urcorner = \ulcorner n+۱\urcorner$$

$$P^{-}\ulcorner n+۱\urcorner = \ulcorner n\urcorner$$

$$Zero\ulcorner ۰\urcorner = True$$

$$Zero\ulcorner n+۱\urcorner = False$$

برای ادامه‌ی کار، نیاز داریم که قادر به حل معادلاتی بازگشتی به شکل $X = f(X)$ باشیم که $f(X)$ عبارت لامبدایی شامل X است. برای مثال، فرض کنید که تابع جمع را با استفاده از بازگشت اولیه روی تابع S^+ چنین تعریف کنیم:

$$Add(۰, n) = n$$

$$Add(m+۱, n) = S^{+}(Add(m, n))$$

عبارت لامبدای معادل این تابع در حقیقت جواب معادله‌ی

$$Add\ x\ y = (Zero\ x)y(S^{+}(Add(P^{-}x)y))$$

خواهد بود. خوش‌بختانه قضیه زیر که به **قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت** [۲۷] معروف است، چنین ابزاری را در اختیار ما قرار می‌دهد:

قضیه ۵.۴. *برای هر عبارت لامبدای F، عبارت لامبدایی چون X وجود دارد بطوریکه $FX = X$*

اثبات. تعریف کنید:

$$W \equiv \lambda x.F(xx)$$

و

$$X \equiv WW$$

داریم:

$$\begin{aligned} X &= WW \\ &= (\lambda x.F(xx))W \\ &= F(WW) = F(X) \end{aligned}$$

□

دقت کنید که با به کار بردن قاعده‌ی انتزاع روی X تعریف شده در برهان فوق، به عملگر Θ معروف به عملگر نقطه‌ی ثابت [۲۸] می‌رسیم:

$$\Theta \equiv \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$$

که برای هر عبارت لامبدای دلخواه F داریم:

$$F(\Theta F) = \Theta F$$

[۲۷] Fixedpoint Theorem

[۲۸] Fixedpoint Combinator

در ادامه ابتدا نشان خواهیم داد که توابع اولیه λ-تعریف‌پذیرند و سپس ثابت می‌کنیم توابع λ-تعریف‌پذیر نسبت به ترکیب، بازگشت اولیه و کمینه‌سازی بسته‌اند. چون مجموعه‌ی توابع بازگشتی کوچک‌ترین مجموعه شامل توابع اولیه است که نسبت به این سه عمل بسته است، بنابراین حتما زیرمجموعه‌ی توابع λ-تعریف‌پذیر خواهد بود و حکم مورد نظر ما ثابت می‌شود.

لم ۶.۴. *با در نظر گرفتن اعداد تعریف ۳.۴، توابع اولیه λ-تعریف‌پذیرند.*

اثبات. تعریف کنید:

$$U_i^n = \lambda x_۱...x_n.x_i$$

$$S^{+} = \lambda x.[False, x]$$

$$Z = \lambda x.\ulcorner ۰\urcorner$$

□

لم ۷.۴. *توابع λ-تعریف‌پذیر تحت ترکیب بسته‌اند.*

اثبات. فرض کنید توابع $\chi, \psi_۱, ..., \psi_m$ توابعی λ-تعریف‌پذیر بوده و با عبارات لامبدای $G, H_۱, ..., H_m$ نمایش داده‌شوند. آن‌گاه هر تابع

$$\varphi(\vec{n}) = \chi(\psi_۱(\vec{n}), ..., \psi_m(\vec{n}))$$

نیز با عبارت لامبدای

$$F \equiv \lambda\vec{x}.G(H_۱\vec{x})...(H_m\vec{x})$$

معادل می‌شود. □

لم ۸.۴. *توابع λ-تعریف‌پذیر تحت بازگشت اولیه بسته‌اند.*

اثبات. فرض کنید تابع φ چنین تعریف شده باشد:

$$\varphi(۰, \vec{n}) = \chi(\vec{n})$$

$$\varphi(k+۱, \vec{n}) = \psi(\varphi(k, \vec{n}), k, \vec{n})$$

و توابع ψ و χ توابعی λ-تعریف‌پذیر بوده و معادل عبارات لامبدای H و G باشند. آن‌گاه، جواب معادله‌ی

$$Fx\vec{y} = (Zero\ x)(G\vec{y})(H(F(P^{-}x)\vec{y})(P^{-}x)\vec{y})$$

معادل تابع φ خواهد بود. جواب این معادله اما برابر

$$\Theta(\lambda fx\vec{y}.(Zero\ x)(G\vec{y})(H(F(P^{-}x)\vec{y})(P^{-}x)\vec{y}))$$

است و حکم به اثبات می‌رسد. □

لم ۹.۴. *توابع λ-تعریف‌پذیر تحت کمینه‌سازی بسته‌اند.*

اثبات. فرض کنید تابع φ چنین تعریف شده‌باشد:

$$\varphi(\vec{n}) = \mu m[\chi(\vec{n}, m) = 0]$$

که در آن تابع χ تابعی λ-تعریف‌پذیر و معادل عبارت G باشد. پاسخ معادله‌ی

$$H\vec{x}y = (Zero(G\vec{x}y))y(H\vec{x}(S^{+}y))$$

یعنی

$$\Theta(\lambda h\vec{x}y.(Zero(G\vec{x}y))y(h\vec{x}(S^{+}y)))$$

را در نظر بگیرید. حال تعریف کنید:

$$F \equiv \lambda\vec{x}.H\vec{x}\ulcorner 0 \urcorner$$

عبارت F معادل تابع φ است و حکم به اثبات می‌رسد. $\square$

قضیه ۱۰.۴. *توابع بازگشتی λ-تعریف‌پذیرند.*

اثبات. لم‌های ۶.۴ ، ۷.۴ ، ۸.۴ و ۹.۴. $\square$

اما آیا می‌شد برای اثبات قضیه‌ی فوق از اعداد چرچ استفاده کرد؟ قضیه‌ی زیر پاسخ مثبتی به این سوال می‌دهد:

قضیه ۱۱.۴. *با در نظر گرفتن اعداد چرچ، توابع بازگشتی λ-تعریف‌پذیرند.*

اثبات. عبارات زیر را در نظر بگیرید:

$$C^{+} \equiv \lambda cfx.f(cfx)$$

$$C^{-} \equiv \lambda cfx.c(\lambda pq.q(pf))(True\ x)I$$

$$CZero \equiv \lambda x.x(True\ False)True$$

با استفاده از این توابع به شیوه‌ای کاملا مشابه لم‌های ۶.۴ ، ۷.۴ ، ۸.۴ و ۹.۴ برای اعداد چرچ نیز اثبات شده و قضیه ثابت می‌شود.[۲۹] $\square$

مراجع

[1] Alonzo Church, An Unsolvable Problem of elementary Number Theory, American Journal of Mathematics 58, pp. 345-363, Apr. 1936.

[2] Joachim Breitner, Church's Undecidability Result, Alan Turing Centennial Talk at IIT Bombay, Mumbai, Apr. 2011.

[3] Henk Barendregt, Erik Barendsen, An Introduction to Lambda Calculus, Mar. 2000.

[۲۹] در حقیقت، با استفاده از عملگر $T \equiv \lambda x.xS^{+}\ulcorner 0 \urcorner$ برای هر n خواهیم داشت: $T\,C_n = \ulcorner n \urcorner$. به علاوه عملگر معکوس T^{-1} را نیز می‌توان از حل معادله‌ی

$$T^{-1}x = (Zero\,x)C_0(C^{+}(T^{-1}(P^{-}x)))$$

بدست آورد. بنابراین λ-تعریف‌پذیری هر تابع با در نظر گرفتن یکی از مجموعه اعداد فوق، λ-تعریف‌پذیری آن تابع با در نظر گرفتن مجموعه‌ی دیگر را نتیجه می‌دهد.