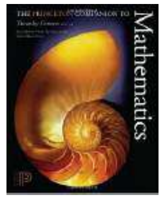
ریاضیات درباره چیست؟

ترجمه: دکتر کسری علیشاهی



مقدمه

این مقاله، ترجمه‌ای است از قسمت ابتدایی کتاب «همراه‌نامه‌ی ریاضی پرینستن (The Princeton Companion to Mathematics)» و بنابراین شاید بهتر باشد که نخست به معرفی این کتاب فوق‌العاده جالب بپردازیم. این کتاب مشتمل بر تعداد قابل توجهی مقاله‌ی کوتاه از نویسندگان متعددی درباره‌ی مفاهیم ریاضی، شاخه‌های ریاضی و قضایا و مسائل ریاضی و مطالب گوناگون دیگری است که تحت نظارت ریاضیدان نامدار «تیموتی گاورز» (Timothy Gowers) جمع‌آوری و تدوین شده و انتشارات دانشگاه پرینستن آن را در سال ۲۰۰۸ به چاپ رسانده است. آنگونه که در مقدمه‌ی کتاب بیان شده، هدف اصلی، ارائه هرچه جذاب‌تر و ملموس‌تر ایده‌هایی است که ریاضیدانان اکنون در ابتدای قرن بیست و یکم با آن درگیرند و تمرکز اصلی آن بر ریاضیات محض مدرن است، هرچند تأثیرات ریاضیات محض را بر ریاضیات کاربردی و فیزیک نظری نادیده نمی‌گیرد. سهل‌الوصول بودن و دربرداشتن مقالاتی در سطوح متفاوت از دشواری، باعث شده که مخاطبان همراه‌نامه طیف وسیعی را در بربگیرند، از کسانی که به تازگی یک درس ریاضی در سطح دانشگاهی را آغاز کرده‌اند و می‌خواهند به دلیل اهمیت مفاهیمی که اخیراً فراگرفته‌اند پی ببرند تا محققان حرفه‌ای که در پی آشنایی با شاخه‌های دیگر ریاضی به غیر از زمینه‌ی تخصصی خود هستند. در واقع ویراستاران امیدوار بوده‌اند هر خواننده‌ای با پیش‌زمینه‌ی مناسب در ریاضیات دبیرستانی، بتواند از بخش قابل‌ملاحظه‌ای از کتاب بهره بگیرد.

معنایی که ویراستاران از کلمه‌ی «همراه» (Companion) در عنوان کتاب در نظر داشته‌اند، به غایت جالب است و تفاوت میان همراه‌نامه و یک دایرةالمعارف ریاضی را اینگونه تبیین می‌کند: «کلمه‌ی همراه پرمعنی است.هرچند قطعاً هدف آن بوده که این کتاب به عنوان یک مرجع هم سودمند باشد، نباید زیاد از آن توقع داشت...این کتاب مانند یک مصاحب بشری است، با نقایصی در معلوماتش و دیدگاه‌هایی که لزوماً مورد اجماع همگان نیست.»

همراه‌نامه به هشت قسمت، هریک با موضوع کلی و هدفی متفاوت با دیگر قسمت‌ها تقسیم شده و این تنظیم موضوعی و نه الفبایی، دلیل دیگری است که به بیان پیشگفتار کتاب، بر تمایز این اثر از یک دایرةالمعارف صحه می‌گذارد. این مقدمه را با توضیح مختصری درباره‌ی این قسمت‌ها به پایان می‌بریم: قسمت I، «مقدمه»- که مقاله‌ای که ترجمه‌ی آن را در زیر می‌خوانید از آنجا انتخاب شده- مطالب و مفاهیم مقدماتی را دربردارد و دیدی کلی از ریاضیات ارائه می‌کند. قسمت II تحت عنوان «ریشه‌های ریاضی مدرن» طی هفت مقاله به جنبه‌های تاریخی مانند تغییرات ایجاد شده در طرز تفکر ریاضیدانان در طی زمان، روند توسعه‌ی دقت در آنالیز ریاضی و روند توسعه‌ی جبر مجرد می‌پردازد. قسمت III یا «مفاهیم ریاضی»، نود و نه مفهوم ریاضی را که در I به آنها اشاره نشده، با مقالات یک الی دو صفحه‌ای شرح می‌دهد. مقالات این قسمت با اجتناب از بیان تعاریف دقیق، این امکان را به خواننده می‌دهند که پی به معنا و دلیل اهمیت مفهوم ناآشنایی که چندین بار با آن برخورد کرده ببرد. قسمت IV، «شاخه‌های ریاضی» را می‌توان قلب کتاب نامید: توصیف بیست و شش شاخه‌ی ریاضی در مقالاتی طولانی‌تر از قسمت پیشین و با حدود پانزده صفحه، به قلم نویسندگانی که بر مبنای دو اولویت با اهمیت یکسان برگزیده شده‌اند: تخصص و توانایی نوشتن توصیفی. ویراستاران یکی از اهداف این قسمت را کمک به افرادی که در مرحله‌ی انتخاب شاخه‌ی تحقیقاتی خود هستند برشمرده‌اند. قسمت V، («قضایا و مسائل») مکمل III است و در مقالاتی کوتاه در رابطه با سی و پنج قضیه و مسأله‌ی باز ریاضی بحث می‌کند، قضایا و مسائلی که محک اصلی در انتخابشان اهمیت ریاضی آنها بوده و برخی دیگر نیز به دلیل سرگرم‌کننده و در دسترس بودن یا ارتباطی که با مطالب IV دارند در این میان آمده‌اند. قسمت VI همانند II تاریخی است و مشتمل بر زندگی‌نامه‌ی بسیار مختصر نود و شش ریاضیدان مشهور که افرادی از پانصد سال قبل از میلاد مسیح تا نیمه‌ی اول قرن بیستم را دربرمی‌گیرد. قسمت VII، («تأثیر ریاضیات») برخلاف شش قسمت پیشین که عمدتاً معطوف به ریاضیات محض و تاریخ آن بودند، تأثیر برونی عظیمی را که ریاضیات موجب شده (اعم از تأثیر کاربردی یا فکری) نشان می‌دهد. این قسمت دربردارنده‌ی مقالات طولانی‌تری است که ریاضیدانانی با علائق در رشته‌های دیگر یا متخصصانی در رشته‌های غیر از ریاضی که به میزان قابل توجهی ریاضی را به کار می‌گیرند به رشته‌ی تحریر درآورده‌اند و همان‌گونه که انتظار می‌رود در VII بیشتر از سایر قسمت‌های کتاب به ریاضی کاربردی پرداخته شده. بالاخره قسمت VIII («چشم‌انداز نهایی») شامل تأملاتی درباره‌ی طبیعت ریاضی و مباحثی عام مانند هنر حل مسأله است و مؤخره‌ی همراه‌نامه را تشکیل می‌دهد.

روشن است که دادن پاسخی قانع کننده به این پرسش که ریاضیات چیست؟ بسیار دشوار است. این کتاب قصد چنین کاری ندارد، بلکه در صدد است که به جای ارائه تعریفی از ریاضیات، با شرح تعداد زیادی از مهم‌ترین مفاهیم، قضایا و کاربردها تصور خوبی از چیستی ریاضیات منتقل کند. با این وجود برای این که همه این اطلاعات معنایی در بر داشته باشند، تلاش برای این که بتوانیم نوعی دسته‌بندی از ریاضیات ارائه دهیم مفید خواهد بود.

بدیهی‌ترین راه برای این منظور دسته‌بندی موضوعی ریاضیات است، و روی‌کرد این مقدمه کوتاه همین است. اما این تنها راه و حتی لزوماً بهترین راه نیست. یک روی‌کرد ممکن دیگر آن است که تلاش کنیم نوع پرسش‌هایی که ریاضی‌دانان علاقه‌مندند به آن‌ها بیندیشند را دسته‌بندی کنیم. این کار به چشم‌انداز متفاوت و مفیدی می‌انجامد. بسیار پیش می‌آید که دو حوزه ریاضی از نظر موضوع بسیار دور از هم به نظر می‌رسند، اما اگر به نوع مسائل مطرح در آن‌ها توجه کنیم شباهت بسیار بیش‌تری بین آن‌ها خواهیم یافت.

۱ جبر، هندسه، آنالیز

اگرچه هر دسته‌بندی موضوعی از ریاضیات باید به پشتوانه و دلیل کافی متکی باشد، اما دسته‌بندی نه چندان دقیقی وجود دارد که بی‌شک به عنوان اولین تقریب بسیار کارآمد است، یعنی تقسیم ریاضیات به جبر، هندسه و آنالیز. پس بیایید از همین‌جا شروع کنیم.

۱.۱ جبر در برابر هندسه

بیشتر افرادی که در دبیرستان با ریاضیات سر و کار داشته‌اند تصورشان از جبر آن نوع ریاضیاتی است که از جای‌گذاری حروف به جای اعداد حاصل می‌شود. جبر اغلب در تقابل با حساب قرار می‌گیرد که هدف آن مطالعه مستقیم خود اعداد است. بنابراین، مثلاً این سوال که مقدار ۷×۳ چند است؟ متعلق به حساب و این که اگر $x + y = ۱۰$ و $xy = ۲۱$، مقدار بزرگتر از بین x و y چند است؟ مربوط به جبر تلقی می‌شود. این تقابل در ریاضیات پیشرفته‌تر چندان روشن نیست به این دلیل ساده که در آن سطح خیلی به ندرت اعداد به تنهایی و بدون همراهی حروف ظاهر می‌شوند.

اما تقابل دیگری میان جبر و هندسه وجود دارد که در سطح پیشرفته اهمیت بسیار بیشتری دارد. هندسه، در سطح ریاضیات دبیرستانی، دانش مطالعه اشکالی مثل دایره، مثلث، مکعب، کره و زاویه به همراه مفاهیمی چون دوران، انعکاس، تقارن و مانند آن‌ها است. بنابراین اشیاء هندسی و فرآیندهایی که بر آن‌ها انجام می‌شود ماهیتی به مراتب بصری‌تر از معادلات جبری دارند.

این تقابل تا مرزهای تحقیق در ریاضیات نوین نیز ادامه می‌یابد. بخش‌هایی از ریاضیات درگیر انجام عملیاتی با نمادها بر مبنای قوانین مشخص‌اند: مثلاً اگر عمل یکسانی را بر عبارت‌های دو سمت یک برابری انجام دهیم برابری برقرار می‌ماند. این بخش‌ها عموماً جبری تلقی می‌شوند، در حالی که بخش‌های دیگر که به مفاهیمی می‌پردازند که قابل تجسم هستند غالباً با عنوان هندسی شناخته می‌شوند.

با این حال، چنین تمایزی این‌قدر هم ساده نیست. آیا یک مقاله تحقیقی در هندسه پر از تصویر است؟ قاعدتاً نه. در واقع روش‌هایی که برای حل مسایل هندسی به کار می‌روند تقریباً همیشه شامل مقدار زیادی محاسبات با نمادها هستند، اگرچه ممکن است برای یافتن و به‌کاربردن این روش‌ها قدرت بالای تجسم ضروری باشد و تصاویر عموماً در پس‌زمینه آن‌چه رخ می‌دهد قرار دارند. همین طور، آیا جبر صرفاً عملیات نمادین است؟ به هیچ وجه. بسیاری از اوقات حل یک مسأله جبری با یافتن راهی برای تجسم هندسی آن ممکن می‌شود.

به عنوان مثالی از تجسم یک مسأله جبری، ببینیم چطور می‌توان درستی این قاعده را که اگر a و b دو عدد صحیح مثبت باشند آن‌گاه $ab = ba$، تحقیق کرد. یک راه ممکن آن است که با آن به عنوان یک حقیقت صرفاً جبری برخورد کنیم (و مثلاً به کمک استقرا ثابتش کنیم)، اما روش ساده‌تر تصور یک جدول مستطیلی با a سطر و b ستون است. تعداد کل خانه‌های جدول اگر سطر به سطر شمرده شود a برابر b و اگر ستون به ستون بشمریم b برابر a خواهد بود. بنابراین $ab = ba$. برای قواعد پایه‌ای دیگر مثل $a(b + c) = ab + ac$ و $a(bc) = (ab)c$ نیز می‌توان توجیهاتی شبیه به این ارائه کرد.

از سوی دیگر، یک روش خوب برای حل بسیاری از مسایل هندسی تبدیل آن‌ها به جبر است. شناخته شده ترین مثال به کارگیری مختصات دکارتی است. مثلاً فرض کنید بخواهیم بدانیم که اگر دایره‌ای را اول نسبت به خط l که از مرکز آن می‌گذرد قرینه کنیم و سپس آن را ۴۰ درجه در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران دهیم و در نهایت دوباره آن را نسبت به خط l قرینه کنیم نتیجه چه خواهد بود. یک راه استفاده از تجسم هندسی است: تصور کنید که دایره از قطعه نازکی از چوب ساخته شده باشد. می‌توانیم به جای قرینه کردن نسبت به خط l آن را (با کمک گرفتن از بعد سوم فضا) ۱۸۰ درجه حول l دوران دهیم. با این کار دایره سر و ته خواهد شد ولی این نکته، اگر از ضخامت دایره صرف نظر کنیم، اهمیتی ندارد. اکنون اگر هنگام دوران دایره به اندازه ۴۰ درجه در خلاف جهت عقربه‌های ساعت از پایین به آن نگاه کنید، آن‌چه خواهید دید دایره‌ای است که ۴۰ درجه در جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌یابد. بنابراین اگر

دوباره دایره را با قرینه کردن نسبت به خط l به جای خود برگردانیم اثر نهایی دوران دایره به اندازه ۴۰ درجه در جهت عقربه‌های ساعت خواهد بود.

ریاضی‌دانان از نظر توانایی و علاقه برای دنبال کردن استدلال‌هایی از این جنس بسیار با هم متفاوتند. شما هم اگر نتوانید مراحل استدلال را به اندازه کافی خوب تجسم کنید تا نسبت به درستی آن قانع شوید، در این صورت ممکن است روشی جبری مبتنی بر جبر خطی و ماتریس‌ها را ترجیح دهید. در این روش نخست به دایره به چشم مجموعه همه دوتایی‌های (x,y) از اعداد نگاه می‌کنیم که $x^۲+y^۲\leq ۱$. اکنون هر دو تبدیل، قرینه کردن نسبت به خطی که از مرکز دایره می‌گذرد و دوران به اندازه زاویه θ، را می‌توان با ماتریس‌های ۲×۲ نمایش داد. قاعده جبری ضرب ماتریس‌ها با این ویژگی طراحی شده که اگر ماتریس A نمایش‌دهنده تبدیل R (مثلاً قرینه کردن) و ماتریس B نماینده تبدیل T باشد، در این صورت حاصل‌ضرب AB نشان‌دهنده تبدیلی است که از اعمال T و سپس R نتیجه می‌شود. بنابراین برای حل مسأله بالا می‌توان ماتریس‌های متناظر با تبدیل‌های مورد نظر را نوشت، آن‌ها را در هم ضرب کرد، و دید که تبدیل متناظر با ماتریس حاصل‌ضرب کدام است. از این راه مسأله هندسی به مسأله‌ای در جبر تبدیل و به روش جبری حل می‌شود.

بنابراین، در عین حال که می‌توان تمایز سودمندی میان جبر و هندسه قائل شد، نباید تصور کرد که مرز کاملاً مشخصی بین این دو تعریف شده است. در واقع حتی یکی از شاخه‌های اصلی ریاضیات هندسه جبری نامیده می‌شود. و همان‌طور که مثال‌های بالا نشان می‌دهند، اغلب می‌توان حکمی ریاضی را از جبر به هندسه و برعکس ترجمه کرد. به هر حال تفاوت روشنی میان شیوه‌های تفکر جبری و هندسی (یکی بیش‌تر نمادین و دیگری بیش‌تر تصویری) وجود دارد و این تفاوت می‌تواند تاثیر عمیقی بر انتخاب ریاضی‌دانان از موضوعی که در آن کار می‌کنند بگذارد.

۲.۱ جبر در برابر آنالیز

واژه آنالیز، که برای اشاره به شاخه‌ای از ریاضیات به کار می‌رود، در ریاضیات دبیرستانی نمود چندانی ندارد. اما واژه حسابان بسیار آشناتر است و مشتق و انتگرال مثال‌های خوبی از آن نوع ریاضیاتی هستند که تحت عنوان آنالیز و نه جبر یا هندسه رده‌بندی می‌شوند. دلیل این امر آن است که هر دوی این مفاهیم با فرآیندهای حدی سر و کار دارند. مثلاً مشتق تابع f در نقطه x حد دنباله شیب‌های وترهایی بر نمودار f است، و مساحت شکلی با مرز منحنی حد مساحت ناحیه‌هایی است که از مستطیل‌ها ساخته شده‌اند و شکل مورد نظر را از درون پر می‌کنند.

بنابراین به عنوان تقریبی اولیه می‌توان گفت که شاخه‌ای از ریاضیات که درگیر فرآیندهای حدی باشد متعلق به آنالیز است، در حالی که اگر در آن رسیدن به جواب در متناهی مرحله ممکن باشد به جبر تعلق دارد. اما در اینجا هم تقریب اولیه آن‌قدر خام است که ممکن است به دلیلی مشابه قبل گمراه‌کننده باشد. با نگاهی دقیق‌تر می‌توان دریافت که عموماً این شاخه‌های ریاضی نیستند که باید به جبر یا آنالیز رده‌بندی شوند بلکه روش‌ها و شیوه‌ها هستند.

با توجه به این که ما قادر نیستیم اثبات‌هایی به طول نامتناهی بنویسیم، پس چگونه امیدواریم بتوانیم چیزی در باره فرآیندهای حدی ثابت کنیم؟ برای پاسخ به این پرسش بیایید به اثبات این حکم ساده که مشتق $x^۳$ برابر $۳x^۲$ است نگاهی بیندازیم. استدلال متداول چنین است که شیب خط گذرنده از دو نقطه $(x,x^۳)$ و $((x+h),(x+h)^۳)$، یعنی

$$\frac{(x+h)^۳-x^۳}{x+h-x}$$

برابر است با $۳x^۲+۳xh+h^۲$. وقتی x به صفر میل کند این شیب به $۳x^۲$ میل می‌کند، بنابراین می‌گوییم که شیب در x برابر $۳x^۲$ است. اما اگر بخواهیم کمی دقیق‌تر باشیم چطور؟ مثلاً اگر x خیلی بزرگ باشد، آیا واقعاً مجازیم از جمله $۳xh$ صرف نظر کنیم؟

برای آن‌که خود را کاملاً قانع کنیم، محاسبه کوچکی انجام می‌دهیم تا نشان دهیم که x هرچه باشد، برای h به اندازه کافی کوچک می‌توان خطای $۳xh+h^۲$ را به دل‌خواه کوچک کرد: عدد مثبت و کوچکی مثل ϵ، که نشان‌دهنده خطای قابل قبول ما است، در نظر بگیرید. اکنون اگر $h\leq\epsilon/۶x$، آن‌گاه $|۳xh|$ حداکثر برابر $\epsilon/۲$ است. اگر به علاوه بدانیم که $|h|\leq\sqrt{\epsilon/۲}$، آن‌گاه خواهیم داشت $h^۲\leq\epsilon/۲$. بنابراین اگر $|h|$ از مینیمم دو مقدار $\epsilon/۶x$ و $\sqrt{\epsilon/۲}$ کوچک‌تر باشد، تفاوت $۳x^۲+۳xh+h^۲$ و $۳x^۲$ حداکثر برابر ϵ خواهد بود.

استدلال بالا دو خصلت آنالیزی دارد. اولاً با وجود آن که حکمی که می‌خواهیم ثابت کنیم درباره یک فرآیند حدی و بنابراین غیرمتناهی است، کاری که برای اثبات لازم بود انجام دهیم کاملاً متناهی است. دوم این که جوهر اثبات یافتن شرایط کافی برای برقراری یک نابرابری نسبتاً ساده است. (نابرابری $|۳xh+h^۲|\leq\epsilon$.)

بگذارید نکته آخر را با یک مثال دیگر توضیح دهیم. اثباتی از این که برای هر عدد حقیقی x، مقدار $x^۴-x^۲-۶x+۱۰$ مثبت است. یک آنالیزدان چنین استدلال خواهد کرد: اول توجه کنید که اگر $x\leq -۱$ آن‌گاه $x^۴\geq x^۲$ و $۱۰-۶x\geq ۰$، پس حکم در این حالت قطعاً درست است. اگر $-۱\leq x\leq ۱$ آن‌گاه $|x^۴-x^۲-۶x|$ نمی‌تواند بیش‌تر از $x^۴+x^۲+۶|x|$ باشد که حداکثر برابر ۸ است، پس

$x^4 - x^2 - 6x \ge -8$ و در نتیجه $x^4 - x^2 - 6x + 10 \ge 2$. اگر $1 \le x \le \frac{3}{2}$، آن‌گاه $x^4 \ge x^2$ و $6x \le 9$، پس $x^4 - x^2 - 6x + 10 \ge 1$. اگر $\frac{3}{2} \le x \le 2$، آن‌گاه $x^2 \ge \frac{9}{4}$، پس $x^4 - x^2 = x^2(x^2-1) \ge \frac{9}{4}.\frac{5}{4} > 2$. به علاوه $6x \le 12$، پس $10-6x \ge -2$، بنابراین $x^4-x^2-6x+10 > 0$. در نهایت اگر $x \ge 2$، آن‌گاه $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) \ge 3x^2 \ge 6x$، که از آن نتیجه می‌شود که $x^4 - x^2 - 6x + 10 \ge 10$.

استدلال بالا طولانی است، اما هر مرحله آن از اثبات یک نابرابری نسبتاً ساده تشکیل شده است. (و به همین دلیل خصلتی آنالیزی دارد.) در مقابل اثبات جبردان چنین است: کافی است توجه کنید که $x^4 - x^2 - 6x + 10$ برابر است با $(x^2-1)^2 + (x-3)^2$ و بنابراین همواره مثبت است.

از این مثال ممکن است این‌طور به نظر برسد که هر کسی در انتخاب میان جبر و آنالیز باید جبر را انتخاب کند. به‌هرحال اثبات جبری بسیار کوتاه‌تر است و به روشنی نشان می‌دهد که چرا تابع مورد نظر همواره مثبت است. اما با وجود این‌که اثبات آنالیزی چندین مرحله دارد، همه آن مراحل ساده اند. از طرفی کوتاهی اثبات جبری گمراه کننده است، چون مشخص نیست که عبارت معادل برای $x^4 - x^2 - 6x + 10$ چگونه به دست آمده است. در حقیقت این که یک چندجمله‌ای چه موقع قابل نمایش به شکل مجموع مربعات چندجمله‌ای‌های دیگر است مسأله‌ای جالب و دشوار است (دست کم برای چندجمله‌ای‌های با بیش از یک متغیر).

رویکرد تلفیقی سومی نیز برای حل این مسأله وجود دارد و آن استفاده از حسابان برای تعیین نقاط مینیمم تابع $x^4 - x^2 - 6x + 10$ است. ایده عبارت است از محاسبه مشتق، $4x^3 - 2x - 6$ (فرآیندی جبری با توجیهی آنالیزی)، یافتن ریشه‌های آن (جبر) و بررسی این که مقدار $x^4 - x^2 - 6x + 10$ در ریشه‌های مشتق مثبت است. اما با وجود این‌که این روش خوبی برای حل مسائل فراوان است، به کار بردنش در این مورد کاملاً سرراست نیست چون $4x^3 - 2x - 6$ ریشه صحیح ندارد. اما می‌توان به کمک استدلالی آنالیزی بازه‌های کوچکی یافت که مینیمم حتماً درون یکی از آن‌ها رخ می‌دهد و از این طریق تعداد حالت‌هایی که باید بررسی شوند، به نسبت استدلال آنالیزی خالص، به مراتب کمتر خواهد شد.

همان طور که این مثال نشان می‌دهد، اگرچه آنالیز بر خلاف جبر اغلب درگیر فرآیندهای حدی است، اما یک تمایز مشخص‌تر آن است که جبردان‌ها دوست دارند با فرمول‌های دقیق کار کنند و آنالیزدانان از تخمین‌ها استفاده می‌کنند. در یک کلام، جبردان‌ها برابری‌ها را دوست دارند و آنالیزدان‌ها نابرابری‌ها را.

۲ شاخه‌های اصلی ریاضیات

اکنون که درباره تفاوت شیوه‌های تفکر جبری، هندسی و آنالیزی صحبت کردیم، برای ارایه یک دسته‌بندی موضوعی تقریبی از ریاضیات آماده‌ایم. فقط پیش از این کار توجه به یک نکته لازم است. واژه‌های جبر، هندسه و آنالیز همزمان هم به شاخه‌های مشخصی از ریاضیات اطلاق می‌شوند و هم به شیوه‌های عمومی تفکر که مرز میان آن‌ها از درون شاخه‌های بسیاری می‌گذرد. بنابراین معنادار (و صحیح) است که بگوییم بعضی شاخه‌های آنالیز ماهیتی جبری‌تر (یا هندسی‌تر) دارند. به همین طریق، تناقضی در این حقیقت نیست که توپولوژی جبری ماهیتی کاملاً جبری و هندسی دارد، هرچند اشیا مورد مطالعه آن، فضاهای توپولوژیک، بخشی از آنالیز هستند. تأکید ما در این بخش تقسیم‌بندی موضوعی است، اما مهم است که تمایزی که در قسمت قبل درباره آن صحبت شد را در ذهن داشته باشیم و آگاه باشیم که از جهتی بنیادی‌تر است.

۱.۲ جبر

واژه جبر، وقتی به عنوان شاخه‌ای از ریاضیات به کار می‌رود، معنایی خاص‌تر از انجام عملیات با نمادها و ترجیح برابری‌ها به نابرابری‌ها دارد. جبردانان به مطالعه دستگاه‌های عددی، چندجمله‌ای‌ها، و ساختارهای مجردتری مانند گروه‌ها، میدان‌ها، فضاهای برداری و حلقه‌ها علاقه‌مندند. به لحاظ تاریخی ساختارهای مجرد نخست به عنوان تعمیم‌هایی از مثال‌های ملموس پدیدار شدند. برای مثال، شباهت‌های مهمی میان مجموعه اعداد صحیح و مجموعه چندجمله‌ای‌های با ضرایب گویا وجود دارد، که دلیل آن به کمک این حقیقت که هر دو مجموعه مثال‌هایی از ساختارهای جبری به نام دامنه‌های اقلیدسی اند آشکار خواهد شد. اگر کسی شناخت خوبی از دامنه‌های اقلیدسی داشته باشد، می‌تواند این شناخت را در مورد اعداد صحیح و چندجمله‌ای‌ها به کار برد.

این نمونه تقابلی را نشان می‌دهد که در بسیاری از شاخه‌های ریاضی وجود دارد، یعنی تمایز میان احکام عمومی و مجرد و احکام خاص و ملموس. ممکن است یک جبردان به گروه‌ها بیندیشد تا مثلاً یک گروه تقارن خاص و نسبتاً پیچیده را بهتر بشناسد، در حالی که جبردانی دیگر به نظریه عمومی گروه‌ها به عنوان مطالعه بخشی از اشیای بنیادی ریاضیات علاقه‌مند باشد.

نمونه برجسته قضیه‌ای از نوع اول حل‌ناپذیری معادلات درجه پنج است (این که فرمولی برای ریشه‌های معادله درجه پنج بر حسب ضرایب آن وجود ندارد.) اثبات این قضیه از طریق تحلیل تقارن‌های

موجود در ریشه‌های چندجمله‌ای و شناخت گروه این تقارن‌ها انجام می‌شود. این مثال مشخص از گروه (یا رده‌ای از گروه‌ها) نقش مهمی در توسعه نظریه مجرد گروه‌ها ایفا کرده است.

مثالی خوب از قضیه‌ای از نوع دوم رده‌بندی گروه‌های ساده متناهی است، که اجزای اساسی سازنده گروه‌های متناهی را توصیف می‌کند.

ساختارهای جبری در سرتاسر ریاضیات حضور دارند، و کاربردهای جبر در سایر بخش‌های ریاضی مانند نظریه اعداد، هندسه و حتی ریاضی–فیزیک فراوانند.

۲.۲ نظریه اعداد

نظریه اعداد عمدتاً به بررسی ویژگی‌های اعداد صحیح مثبت می‌پردازد، و به همین دلیل هم‌پوشانی قابل توجهی با جبر دارد. اما با یک مثال ساده می‌توان تفاوت یک مسأله نوعی در جبر و یک مسأله نوعی در نظریه اعداد را نشان داد. معادله $13x - 7y = 1$ را در نظر بگیرید. یک جبردان ملاحظه می‌کند که این معادله یک خانواده یک پارامتری از جواب‌ها دارد: اگر $y = \lambda$ آن‌گاه $x = (1 + 7\lambda)/13$، بنابراین جواب عمومی عبارت است از $(x, y) = ((1 + 7\lambda)/13, \lambda)$. یک نظریه اعداد دان به جواب‌های صحیح علاقه‌مند است و بنابراین بررسی می‌کند که به ازای چه مقادیری از λ ، $1 + 7\lambda$ مضربی از ۱۳ خواهد بود. (جواب این است که برای λهای به شکل $13m + 11$ به ازای عدد صحیح m.)

اما این توصیف حق مطلب را درباره نظریه اعداد، که اکنون به یک شاخه بسیار پیچیده تبدیل شده، ادا نمی‌کند. بسیاری از نظریه اعداد دانان مستقیماً به یافتن جواب‌های صحیح معادلات نمی‌پردازند، بلکه برای فهم بهتر ساختارهایی تلاش می‌کنند که در آغاز برای بررسی جواب معادلات به وجود آمدند اما به تدریج هویت مستقلی یافتند. در برخی موارد این فرآیند چندین بار رخ داده است و بنابراین عبارت نظریه اعداد تصویر بسیار گمراه‌کننده‌ای از آن‌چه یک متخصص نظریه اعداد انجام می‌دهد ارایه می‌کند. با این حال حتی مجردترین بخش‌های موضوع هم ممکن است نتایج ملموسی در بر داشته باشند. یک مثال قابل توجه اثبات مشهور اندرو وایلز از قضیه آخر فرما است.

در ارتباط با مباحث قبلی، جالب است که نظریه اعداد به دو زیرشاخه کمابیش مجزا، نظریه جبری اعداد و نظریه تحلیلی اعداد، تقسیم می‌شود. در یک توصیف ساده، مطالعه جواب‌های صحیح معادلات به نظریه جبری اعداد منجر می‌شود در حالی که ریشه‌های نظریه تحلیلی اعداد به مطالعه اعداد اول برمی‌گردد، اما البته تصویر واقعی از این پیچیده‌تر است.

۳.۲ هندسه

شیء اصلی مورد مطالعه در هندسه خمینه است. خمینه‌ها تعمیم اشکالی مانند سطح یک کره در ابعاد بالاتر هستند: یک بخش کوچک آن تخت به نظر می‌رسد اما کل خمینه ممکن است به طرز پیچیده‌ای در خود خمیده باشد. بیش‌تر کسانی که خود را هندسه‌دان می‌نامند به نحوی مشغول مطالعه خمینه‌ها هستند. بعضی به خمینه‌های خاصی توجه دارند و گروهی به نظریه عمومی خمینه‌ها علاقه‌مندند.

اکنون می‌توانیم دسته‌بندی خود را بر مبنای پاسخ به این پرسش که چه وقت دو خمینه اساساً متفاوت تلقی می‌شوند توسعه دهیم. توپولوژی‌دان دو شیء را که بتوان آن‌ها را به طور پیوسته به هم تبدیل کرد، یکسان می‌گیرد. این یعنی فاصله‌ها در توپولوژی اهمیتی ندارند، زیرا می‌توان با کشیدن‌های پیوسته آن‌ها را تغییر داد. برای متخصص توپولوژی دیفرانسیل تبدیل‌های هموار (یعنی به اندازه کافی مشتق‌پذیر) اهمیت دارند و این منجر به رده‌بندی ظریف‌تری از خمینه‌ها و مسایلی متفاوت می‌شود. در انتهای هندسی‌تر طیف، ریاضی‌دانانی قرار دارند که به ماهیت فواصل بین نقاط خمینه (مفهومی که برای توپولوژی‌دان معنایی ندارد) و ساختارهای کمکی مربوط بر خمینه مانند متریک و انحنا علاقه‌مندند.

۴.۲ هندسه جبری

هندسه جبری، همان طور که از نامش پیدا است، جایگاه روشنی در تقسیم‌بندی بالا ندارد. هندسه جبری دانان هم به مطالعه خمینه‌ها می‌پردازند، اما با این تفاوت مهم که خمینه‌های مورد توجه آن‌ها با چندجمله‌ای‌ها تعریف می‌شوند.(یک مثال ساده سطح کره است، که می‌تواند به شکل مجموعه همه (x, y, z) هایی تعریف شود که $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.) این یعنی هندسه جبری جبری است چون درباره چندجمله‌ای‌ها است و در عین حال هندسی است زیرا مجموعه جواب‌های یک چندجمله‌ای چندمتغیره یک شیء هندسی است.

بخش مهمی از هندسه جبری مطالعه تکینگی‌ها است. مجموعه جواب‌های یک دستگاه از چندجمله‌ای‌ها اغلب، همه جا به استثنای تعداد کمی نقطه تکینگی، شبیه به یک خمینه است. مثلاً معادله $x^2 = y^2 + z^2$ یک مخروط است که راس آن در مبدا قرار گرفته است. اگر به یک همسایگی به قدر کافی کوچک از نقطه x بر روی مخروط نگاه کنید، اگر x نقطه $(0, 0, 0)$ نباشد، همسایگی شبیه به یک صفحه تخت خواهد بود. اما اگر x برابر $(0, 0, 0)$ باشد، هرچقدر هم که همسایگی را کوچک انتخاب کنیم، همچنان راس یک مخروط را خواهیم دید. (این یعنی مخروط واقعاً یک خمینه نیست بلکه یک خمینه با تکینگی است.)

تعامل میان جبر و هندسه بخشی از جذابیت هندسه جبری است. ارتباط با شاخه‌های دیگر ریاضی نیز انگیزه بیش‌تری برای مطالعه این موضوع ایجاد می‌کند. به طور خاص ارتباط نزدیکی با نظریه اعداد و عجیب‌تر از آن پیوندهای مهمی میان هندسه جبری و ریاضی–فیزیک موجود است.

۵.۲ آنالیز

آنالیز جلوه‌های متنوعی دارد. یکی از مباحث اساسی آن مطالعه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای است. بسیاری از فرآیندهای فیزیکی، مثلاً حرکت در میدان گرانش، به کمک معادلات دیفرانسیل پاره‌ای توصیف می‌شوند. اما این معادلات در ریاضیات محض، به ویژه در هندسه، نیز ظاهر می‌شوند. بنابراین مطالعه آن‌ها به یک شاخه وسیع ریاضی با زیرشاخه‌ها و ارتباطات فراوان با بسیاری زمینه‌های دیگر تبدیل شده است.

آنالیز هم مثل جبر، یک وجه مجرد دارد. به ویژه بعضی ساختارهای مجرد مانند فضاهای باناخ، فضاهای هیلبرت، C^*-جبرها و جبرهای فون نویمان از اشیای مرکزی مورد مطالعه‌اند. این چهار ساختار همه فضاهای برداری با بعد نامتناهی و دو مثال آخر به علاوه جبر هستند، یعنی اعضای آن را می‌توان در هم ضرب کرد. چون این ساختارها نامتناهی‌بعد هستند، مطالعه آن‌ها نیازمند استدلال‌های حدی است، و به همین دلیل این موضوع به آنالیز تعلق دارد. از طرفی ساختار جبری C^*-جبرها و جبرهای فون نویمان سبب می‌شود که در مطالعه آن‌ها از ابزارهای جبری به شکل اساسی استفاده شود. همان طور که از واژه فضا برمی‌آید، هندسه هم در این‌جا نقش مهمی ایفا می‌کند.

یکی دیگر از شاخه‌های مهم آنالیز سیستم‌های دینامیکی است که هدف آن بررسی این موضوع است که اگر فرآیند ساده‌ای را بارها و بارها تکرار کنیم چه رخ می‌دهد. مثلاً اگر عدد مختلطی مثل z_0 را در نظر بگیریم و قرار دهیم $z_1 = z_0^2 + 2$ و سپس $z_2 = z_1^2 + 2$ و همین طور ادامه دهیم، رفتار حدی دنباله $z_0, z_1, z_2, \cdots$ چه خواهد بود؟ آیا به بی‌نهایت می‌گریزد یا در ناحیه کران‌داری از صفحه باقی خواهد ماند؟ جواب این سوال به طرز پیچیده‌ای به نقطه شروع، z_0، وابسته است. این که نحوه این وابستگی دقیقاً چگونه است یک سوال در سیستم‌های دینامیکی است.

گاهی فرآیندی که باید تکرار شود یک فرآیند بی‌نهایت کوچک است. مثلاً اگر مکان، سرعت و جرم همه سیاره‌های منظومه شمسی (و همین طور خورشید) را در یک لحظه از زمان بدانیم، قاعده ساده‌ای وجود دارد که به کمک آن می‌توانیم تغییر این مکان‌ها و سرعت‌ها را یک لحظه بعد محاسبه کنیم. پس از گذر این لحظه مکان‌ها و سرعت‌ها تغییر کرده‌اند اما قاعده اصلی همان باقی می‌ماند، بنابراین کل فرآیند را می‌توان به شکل نتیجه بی‌نهایت بار تکرار یک فرآیند بی‌نهایت کوچک در نظر گرفت. روش درست صورت‌بندی این موضوع استفاده از معادلات دیفرانسیل است و بنابراین بخش عمده‌ای از سیستم‌های دینامیکی به رفتار درازمدت جواب‌های این معادلات می‌پردازد.

۶.۲ منطق

واژه منطق گاهی به اختصار به همه آن شاخه‌هایی از ریاضیات اطلاق می‌شود که به سوالات بنیادی درباره خود ریاضیات می‌پردازند. شاخه‌هایی از قبیل نظریه مجموعه‌ها، نظریه رسته‌ها، نظریه مدل‌ها و منطق به معنای خاص که به قواعد استنتاج می‌پردازد. از جمله موفقیت‌های نظریه مجموعه‌ها می‌توان به قضایای ناتمامیت گودل و اثبات کوهن از استقلال فرضیه پیوستار اشاره کرد. به ویژه قضایای گودل تاثیر قابل توجهی بر ادراک فلسفی ما از ریاضیات داشته‌اند، اگرچه اکنون هم که مشخص شده است که همه گزاره‌های ریاضی لزوماً قابل اثبات یا رد نیستند، اکثر ریاضی‌دانان به شیوه گذشته خود به کار ادامه می‌دهند، چون بیشتر گزاره‌هایی که با آن سر و کار دارند تصمیم‌پذیرند. اما داستان نظریه مجموعه‌ها متفاوت است. از زمان گودل و کوهن، گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر فراوانی کشف شده‌اند، و تعداد زیادی اصول موضوع جدید پیشنهاد شده‌اند که آن‌ها را تصمیم‌پذیر می‌کنند. بنابراین اکنون تصمیم‌پذیری به دلایل ریاضی و نه فلسفی مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

نظریه رسته‌ها موضوع دیگری است که با مطالعه فرآیندهای ریاضی آغاز و سپس به شاخه مستقلی بدل شد. تفاوت نظریه رسته‌ها با نظریه مجموعه‌ها در این است که تمرکزش بیش از آن که بر خود اشیاء ریاضی باشد بر آن چیزی است که با آن اشیاء انجام می‌شود به ویژه نگاشت‌هایی که آن‌ها را به هم تبدیل می‌کند.

یک مدل برای مجموعه‌ای از اصول، یک ساختار ریاضی است که آن اصول، اگر به شکل مناسبی تعبیر شوند، در آن درست باشند. مثلاً هر مثال مشخص از گروه مدلی برای اصول نظریه گروه‌ها است. متخصصین نظریه مجموعه‌ها مدل‌های مختلف برای اصول نظریه مجموعه‌ها را مطالعه می‌کنند و این گامی اساسی در اثبات قضایای مشهوری است که نام بردیم، اما مفهوم مدل کاربرهای وسیعی دارد و به کشف‌های مهمی در حوزه‌های دیگر غیر از نظریه مجموعه‌ها نیز منجر شده است.

۷.۲ ترکیبیات

برای تعریف ترکیبیات راه‌های متنوعی می‌توان در پیش گرفت، که اگرچه هیچ کدام به تنهایی چندان رضایت‌بخش نیستند اما در کنار هم تصویری از موضوع ارایه می‌دهند. اولین تعریف این است که ترکیبیات در باره شمارش اشیاء است. برای مثال این سوال که به چند راه می‌توان یک جدول مربعی را با صفرها و یک‌ها پر کرد طوری که در هر سطر و ستون حداکثر دو یک قرار بگیرند؟ چون مربوط به شمارش است پس به معنایی ساده ترکیبیاتی است.

ترکیبیات را گاهی ریاضیات گسسته نیز می‌نامند چون به مطالعه ساختارهای گسسته می‌پردازد. به بیان ساده یک شیء گسسته است اگر از نقاطی مجزا از هم تشکیل شده باشد و پیوسته است اگر بتوان از هر نقطه آن بدون پرش‌های ناگهانی به نقطه دیگر حرکت کرد. (شبکه صحیح $\mathbb{Z}^۲$، تشکیل شده از همه نقاط صفحه با مختصات صحیح، مثال خوبی از یک ساختار گسسته و سطح یک کره نمونه خوبی از یک ساختار پیوسته است.) ترکیبیات پیوند نزدیکی با علوم کامپیوتر نظری دارد (که با ساختاری با ماهیت گسسته یعنی دنباله‌های صفر و یک سر و کار دارد)، و گاهی در مقابل آنالیز قرار می‌گیرد، اگرچه ارتباطاتی هم میان این دو وجود دارد.

سومین نگاه آن است که ترکیبیات به ساختارهای ریاضی می‌پردازد که قیدهای کمی دارند. به کمک این ایده می‌توان توضیح داد که چرا نظریه اعداد، با این که ساختاری مشخصاً گسسته یعنی اعداد صحیح مثبت را مطالعه می‌کند، به عنوان شاخه‌ای از ترکیبیات در نظر گرفته نمی‌شود.

برای توضیح بهتر این نکته آخر، به دو مسأله ظاهراً مشابه زیر، درباره اعداد صحیح مثبت توجه کنید.

- آیا عدد صحیح مثبتی وجود دارد که دست کم به هزار روش مختلف قابل نمایش به صورت مجموع دو مربع کامل باشد؟
- اگر $a_۱, a_۲, a_۳, \cdots$ دنباله‌ای از اعداد صحیح مثبت باشد که هر a_n بین $n^۲$ و $(n+۱)^۲$ قرار داشته باشد، آیا همیشه عدد صحیح مثبتی وجود دارد که دست کم به هزار روش مختلف قابل نمایش به صورت مجموع دو عدد این دنباله باشد؟

مسأله اول نظریه اعدادی محسوب می‌شود، چون به یک دنباله بسیار خاص یعنی دنباله اعداد مربع کامل مربوط است، و انتظار می‌رود که بتوان با استفاده از ویژگی‌های این دنباله جواب سوال را، که در این مورد مثبت است، پیدا کرد.

مسأله دوم درباره دنباله‌ای با ساختار به مراتب کمتر است. همه آن‌چه که در مورد a_n می‌دانیم اندازه تقریبی آن است (این که کمابیش نزدیک به $n^۲$ است) اما از ویژگی‌های جزئی‌تر آن چیزی نمی‌دانیم، مثلاً این‌که آیا اول یا مکعب کامل یا توانی از ۲ است. به همین دلیل این مسأله به ترکیبیات تعلق دارد. پاسخ آن هنوز مشخص نیست. جواب اگر مثبت باشد نشان خواهد داد که چهره نظریه اعدادی مسأله اول به معنایی انحرافی بوده است و آن‌چه واقعاً اهمیت دارد نرخ رشد دنباله اعداد مربع کامل است.

۸.۲ علوم کامپیوتر نظری

مسأله علوم کامپیوتر نظری به طور عمومی کارایی محاسبه، یعنی میزان منابع لازم، مثل زمان و حافظه کامپیوتر، برای انجام اعمال محاسباتی است. مدل‌های ریاضی موجود برای محاسبه این امکان را فراهم می‌کنند که بتوان مسایل مربوط به کارایی محاسبه را بدون توجه به جزئیات چگونگی پیاده شدن الگوریتم‌ها مطالعه کرد. بنابراین علوم کامپیوتر نظری حقیقتاً شاخه‌ای از ریاضیات محض است. می‌توان تصور کرد که کسی متخصص برجسته علوم کامپیوتر نظری ولی در عین حال از برنامه‌نویسی برای کامپیوتر ناتوان باشد. اما این شاخه کاربردهای قابل توجهی نیز، به ویژه در رمزنگاری، داشته است.

۹.۲ احتمال

پدیده‌های بسیاری، از زیست‌شناسی و اقتصاد تا علوم کامپیوتر و فیزیک، وجود دارند که چنان پیچیده‌اند که بهتر است به جای تلاش برای فهم آن‌ها با جزئیات کامل به گزاره‌های احتمالاتی درباره‌شان بسنده کنیم. مثلاً اگر بخواهیم نحوه شیوع یک بیماری را تحلیل کنیم، امیدی نیست که بتوانیم همه اطلاعات مرتبط (از قبیل این که چه کسی با چه کسی در تماس خواهد بود) را در نظر بگیریم اما می‌توانیم مدلی ریاضی بسازیم و آن را تحلیل کنیم. چنین مدل‌هایی رفتارهای جالب و غیر منتظره‌ای نشان می‌دهند که مستقیماً به واقعیت مرتبط است. برای مثال ممکن است یک احتمال بحرانی p با این ویژگی وجود داشته باشد: اگر احتمال آلوده شدن در تماسی از یک نوع از p بیش‌تر باشد، فراگیر شدن بیماری کاملاً ممکن است اما در غیر این صورت می‌توان تقریباً با اطمینان گفت که بیماری ریشه‌کن خواهد شد. به تفاوتی قاطع در رفتار از این دست گذر فاز می‌گویند.

طراحی یک مدل ریاضی مناسب گاهی ممکن است به طرز عجیبی دشوار باشد. مثلاً به نظر می‌رسد ذرات در برخی محیط‌های فیزیکی به صورت کاملاً تصادفی حرکت می‌کنند. آیا می‌توان به یک مسیر پیوسته تصادفی معنا داد؟ پاسخ این سوال مثبت و نتیجه این کار نظریه زیبای حرکت براونی است، اما مراحل کار، به دلیل پیچیدگی مسیرهای ممکن، بسیار پیچیده است.

۱۰.۲ ریاضی فیزیک

رابطه ریاضیات و فیزیک در طول چند قرن به شکل عمیقی متحول شده است. تا قرن هجدهم مرز مشخصی میان این دو وجود نداشت و بسیاری از ریاضی‌دانان مشهور، دست کم در زمان‌هایی از دوره فعالیت خود فیزیک‌دان هم بوده‌اند. در طول قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم این وضعیت به تدریج تغییر کرد، تا آن که در نیمه قرن بیستم دو رشته به طور کامل از هم جدا شده بودند. سپس تا پایان قرن بیستم ریاضی‌دانان دریافتند که ایده‌هایی که فیزیک‌دانان کشف کرده بودند اهمیت ریاضی فوق‌العاده‌ای دارند.

هنوز تفاوت فرهنگی عمیقی میان دو رشته وجود دارد: ریاضی‌دانان علاقه بسیار بیش‌تری به اثبات‌های دقیق دارند، در حالی که برای فیزیک‌دانان، که از ریاضیات به عنوان ابزار استفاده می‌کنند، یک توجیه قانع کننده برای درستی یک گزاره ریاضی، حتی اگر واقعاً اثبات نباشد، کفایت می‌کند. در نتیجه فیزیک‌دانان که با محدودیت کمتری عمل می‌کنند، اغلب بسیار پیش از ریاضی‌دانان پدیده‌های ریاضی جذاب را کشف می‌کنند.

یافتن اثبات‌های دقیق برای این کشفیات اغلب بسیار دشوار است. این کار بسیار بیش از یک تمرین فضل فروشانه جهت تأیید گزاره‌هایی است که هیچ فیزیک‌دانانی در درستی‌شان شک ندارد. در واقع این تلاش اغلب به کشفیات ریاضی جدیدی منجر می‌شود. مثال‌های زیادی از این تعامل نشان می‌دهد که چطور ریاضیات و فیزیک موجب غنای یکدیگر شده‌اند.