# سوالات مسابقه دانشجویی ریاضی دانشگاه صنعتی شریف، اسفند ۱۳۹۰

## روز اول

**سوال ۱.** ۲۰۱۲ نقطه در $\mathbb{R}^2$ داریم. ثابت کنید یک چندجمله‌ای غیرصفر با درجه حداکثر ۶۲ و ضرایب حقیقی مانند $P(x,y)$ وجود دارد که همه‌ی این نقاط روی منحنی $P(x,y)=0$ واقع باشند.

**سوال ۲.** فرض کنید $A$ یک ماتریس $n\times n$ با درایه‌های در یک میدان دلخواه $F$ باشد. ثابت کنید ماتریس قطری $D$ با درایه‌های در $F$ موجود است به طوری که $A+D$ وارون‌پذیر باشد.

**سوال ۳.** دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ با جملات مثبت که $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ داده شده است. نشان دهید دنباله‌ی نزولی $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ با جملات مثبت وجود دارد به طوری که $\sum_{n=1}^{\infty} b_n<\infty$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n=\infty$.

**سوال ۴.** اعداد طبیعی $n$ و $m$ به طوری که $2m\le n$ داده شده‌اند و $f$ تابعی است که به هر زیرمجموعه $m$ عضوی

$$N=\{1,\dots,n\}$$

یک عدد حقیقی منسوب می‌کند. اگر برای هر زیرمجموعه $m-1$ عضوی $K$ از $N$ داشته باشیم

$$\sum_{j\in N-K} f(K\cup\{j\})=0$$

نشان دهید برای هر زیرمجموعه $m$ عضوی $A$ از $N$ داریم

$$\sum f(B)=(-1)^m f(A)$$

که این جمع روی تمام زیرمجموعه‌های $m$ عضوی $B$ از $N$ که با $A$ اشتراک ندارند، زده می‌شود.

**سوال ۵.** فرض کنید $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ و $\partial\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$. ثابت کنید هر تابع تحلیلی $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ که به طور پیوسته به $\partial\mathbb{D}$ گسترش می‌یابد و $f(\partial\mathbb{D})\subset\partial\mathbb{D}$ به صورت حاصلضرب توابع موبیوس است (تابع موبیوس تابعی به شکل $z\mapsto e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$ است که $\theta\in\mathbb{R}$ و $\alpha\in\mathbb{D}$).

# روز دوم

**سوال ۶.** اگر $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد که برای هر $0\le x,y\le 1$،
$$xf(y)+yf(x)\le 1$$
ثابت کنید $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\le\frac{\pi}{4}$ و با ذکر مثال نشان دهید $\frac{\pi}{4}$ کرانی دقیق است.

**سوال ۷.** برای $n=1,2,\ldots$ فرض کنید $C_n\subset\mathbb{R}^n$ یک زیرمجموعه‌ی فشرده و ناتهی باشد به طوری که $C_{n+1}\subset C_n\times\mathbb{R}$. ثابت کنید دنباله‌ی حقیقی $x_1,x_2,x_3,\ldots$ وجود دارد به طوری که برای هر $n$، $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in C_n$.

**سوال ۸.** فرض کنید برای گروه $G$ نگاشت $x\to x^n$ یک ایزومورفیسم باشد. ثابت کنید برای هر $x,y\in G$ داریم
$$x^{n-1}y=yx^{n-1}$$
( $n$ یک عدد طبیعی داده شده است.)

**سوال ۹.** اعداد صحیح $a,b,c$ به‌طوری‌که $c$ فرد و خالی از مربع است و $a^2+bc=-1$ داده شده است. نشان دهید اعداد صحیح $A,B,C,D$ وجود دارد به طوری که $AD-BC=1$ و $AC+BD=a$ و $C^2+D^2=c$ به طور همزمان برقرار شوند.

**سوال ۱۰.** فرض کنید $G$ یک زیرگروه از $GL_n(\mathbb{Z})$ (ماتریس‌های $n\times n$ با درایه‌های صحیح و $\det=\pm1$) است که برای هر $g\in G$ عدد $m\ge 1$ وجود دارد به طوری که $g^m=1$. ثابت کنید:

**الف)** عدد طبیعی $N$ وجود دارد به طوری که برای هر $g\in G$ داریم $g^N=1$

**ب)** $G$ یک گروه متناهی است و یک کران برای مرتبه‌ی آن برحسب تابعی از $n$ بیابید.