پیچش و کاربردهای آن در نظریه های نوین گرانشی

مهدی کوره‌چیان

بعد از گالیله در طول ۲۰۰ سال علم نوین فیزیک پیشرفت های چشمگیری کرد و دانشمندان توانستند با زبان ریاضی بسیاری از پدیده های جهان را تبیین و یا پیش بینی کنند اما یک استثنا وجود داشت. با آنکه پدیده گرانش به زیبایی به زبان ریاضیات فرمول بندی شده بود ، دانشمندان از تفسیر چرایی وجود داشتن گرانش و این خاصیت که ذرات مختلف با جرم های گوناگون در یک میدان گرانشی همگی شتاب ثابتی را اکتساب می کنند عاجز بودند. تا آنکه در سال ۱۹۱۷ آلبرت انشتین توانست بوسیله نظریه نسبیت عام چرایی و علت گرانش را توضیح دهد. او در این نظریه میدان گرانشی را به انحنا که یک خصوصیت هندسی فضا می باشد ربط داد. بر اساس این نظریه فضای خلا به تنهایی تخت مینکوفسکیایی می باشد و وجود ماده در این فضا انحنا ایجاد می کند که به نوبه خود این امر در ساختار ژئودزیک های فضا تغییر ایجاد می کند و باعث می شود اجرام و حتی نوری که در یک میدان گرانشی قرار می گیرند به جای حرکت بر روی مسیر مستقیم ، که خاصیت چارچوب های لخت در فضای مینکوفسکیایی هست، بر روی مسیرهای منحنی وار (ژئودزیک های فضای دارای انحنا) حرکت کنند.

با آنکه نظریه نسبیت عام توانسته بود توجیه مناسبی از پدیده گرانش ارائه کرده و بسیاری از پدیده های کیهان شناختی را با دقت بالایی پیش بینی کند با این حال به دو دلیل زیر به نظریه های نوین گرانشی که دارای مفاهیم جدیدی مانند پیچش هستند احساس نیاز می شد.

۱) به موازات نظریه نسبیت عام ، نظریه مکانیک کوانتومی با ایده های نوین و شگرفش توانسته بود بسیاری از پدیده ها در مقاسه اتمی و ریز اتمی را که مکانیک کلاسیک از تبیین آن عاجز بود توضیح دهد. هر دو نظریه نسبیت عام و مکانیک کوانتومی دو برداشت کاملا متفاوتی از جهان پیرامون ما ارائه می دهند اما چه از لحاظ فلسفی و چه از لحاظ ساختاری ناسازگاری های بزرگی بین این دو نظریه وجود دارد که بخاطر آن ها نمی توان همانند نظریه الکترو مغناطیسی ، که در واقع تلفیق موفقی از دو نظریه الکترواستاتیک و مغناطیس است ، براحتی نظریه واحدی برای آن ها ارائه کرد. مثلا تمام پیش بینی هایی که نظریه مکانیک کوانتومی انجام می دهد بر این اصل که فضای اطراف ما فضای تخت اقلیدسی است استوار شده است حتی برای نظریه کوانتوم فیلد که توسط آن سعی شده اثرهای نسبیتی در آن لحاظ شود رویدادها در فضای تخت مینکوفسکیایی رخ می دهند که این مسئله برخلاف این اصل نسبیت عام می باشد که ماده با ایجاد انحنا در ساختار فضا تغییر ایجاد می کند. در دهه ۲۰ میلادی ریاضیدانان و فیزیکدانان بسیاری تلاش کردند که این تناقض را برطرف کنند مانند کارتان که برای این کار مفهوم پیچش را برای اولین بار وارد مبحث هندسه دیفرانسیل کرد و تلاش کرد آن را جایگزین مفهوم انحنا در نظریه نسبیت عام کند. او این گونه فرض کرد که ماده موجود در عالم به جای انحنا در فضا پیچش ایجاد می کند که در این صورت ساختار فضا تخت می ماند. به زبان ریاضی در فضایی که کارتان درست کرد برعکس فضای ریمانی مولفه های تانسور انحنا برابر صفر و تانسور پیچش مخالف صفر می باشد. با انجام محاسبات ریاضی معلوم شد که نظریه نوین کارتان نتایج کاملا مشابه نظریه نسبیت عام ارائه می دهد و در واقع این دو معادل یکدیگر می باشند. خواننده علاقه مند جهت آشنایی بیشتر با این نظریه می تواند به منبع شماره یک مراجعه کند.

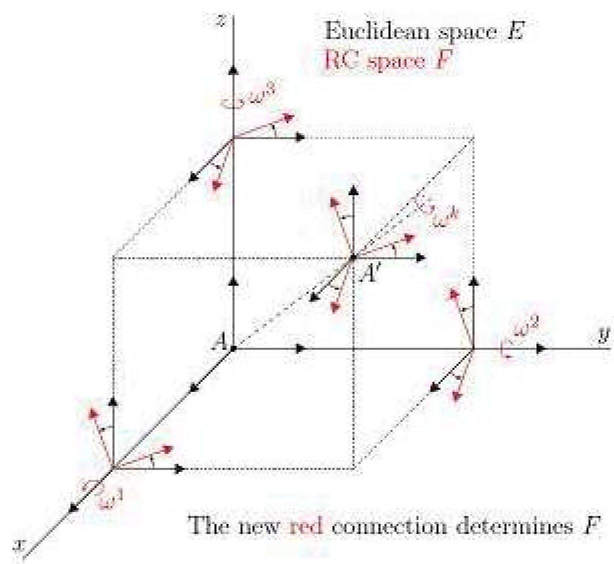
۲) با آن که بسیاری از پیش بینی ها و محاسبات نظریه نسبیت عام در ابعاد کیهانی مشاهده شده تا به امروز دانشمندان نتوانستند به علت ضعیف بودن گرانش نسبت به سایر نیروها آن را تصدیق یا رد کنند. با این همه نظریه ای که بتواند هم شامل اثرات گرانشی و هم اثرات کوانتومی مانند اسپین باشد کامل تر بوده و می تواند دید ما گسترش دهد. برای حصول چنین امری لازم

است که نظریه فوق از درجه آزادی کافی برخوردار باشد تا بتوان توسط آن تاثیرات کوانتومی به همراه ویژگی های نسبیت عام را در یک نظریه واحد لحاظ کرد. نظریه نوین گرانشی که به نظریه کارتان — انشتین معروف است دارای ویژگی بالا می باشد. در این نظریه بر خلاف نسبیت عام و نظریه کارتان فضا هم دارای انحنا و هم پیچش می باشد. بنتبراین نسبت به آن دو تعداد درجات آزادی بیشتری دارد. اما متاسفانه تا کنون آزمایشی طراحی نشده که توسط آن بتوان پیش بینی ها و نتایج حاصله از این نظریه را در بوته آزمایش قرار داد. جهت آشنایی بیشتر با این مطلب می توان به منبع شماره دو مراجعه کرد.

حال که مختصری راجع به نظریه های گرانشی و رابطه آن با پیچش صحبت شد در قسمت بعدی به تاریخچه و مفهوم شهودی هندسی پیچش می پردازیم.

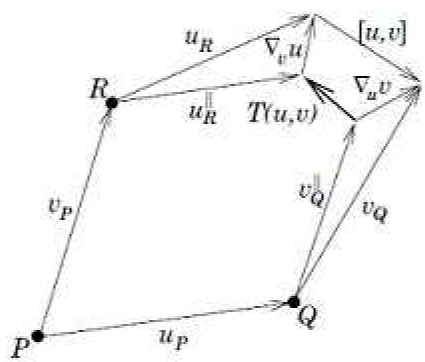
پیچش چیست؟

در سال ۱۹۲۲ ، الی کارتان مفهوم پیچش را در مبحث هندسی دیفرانسیل پایه گزاری کرد. او مفهوم هندسه ریمانی را که بر مبنای تانسور متریک متقارن $g_{ij} = \mathrm{g}_{\mathrm{ji}}$ و تانسور انحنای ریمانی R^l_{ijk} بنا شده را به یک مفهوم کلی تر تعمیم داد بطوری که علاوه بر تانسورهای فوق شامل تانسور مرتبه ۳ $T^k_{ij} = -T^k_{ji}$، که توسط کارتان تانسور پیچش نامیده شد ، نیز می باشد.
با آن که به راحتی می توان یک فضای ریمانی دوبعدی را به عنوان یک رویه دوبعدی که در فضای تخت ۳ بعدی اقلیدسی نشانده شده در ذهن تجسم کرد اما هیچ شهود ذهنی ساده ای از یک فضای پیچش دار وجود ندارد. با این حال در اولین مقاله کارتان او از یک فضای ۳ بعدی با یک پیچش همگن به عنوان یک مثال استفاده کرد. این مثال با آنکه برای بدست آوردن یک شهود ذهنی از پیچش بسیار مفید است اما به مرور زمان فراموش شده است. ایده کلی کارتان بصورت زیر است:
یک نقطه دلخواه مانند A را از یک فضای سه بعدی اقلیدسی در دستگاه مختصاتی دکارتی همان گونه که در شکل زیر نمایش داده شده است در نظر می گیریم. نقطه A' را حول همسایگی A انتخاب می‌کنیم.



برداری که A را به A' وصل می‌کند AA' می‌نامیم. حال دستگاه سه‌تایی مختصاتی در A' در راستای برداری $\vec{W} = \alpha AA'$ در جهت راست‌گرد می‌چرخانیم که در اینجا α یک ثابت عددی است. دستگاه مختصاتی سه‌تایی جدید را می‌توان به عنوان یک پایه از فضای پیچشی F در نظر گرفت. فرق یک فضای اقلیدسی که گروه دوران بر روی نقاط اثر کرده با یک فضای پیچشی در این است که در فضای اقلیدسی دوران یافته عمل گروه دوران بر روی تمام نقاط به صورت یکسان عمل می‌کند و فضا همسان‌گرد باقی می‌ماند اما در فضای پیچشی همان‌گونه که از شکل بالا پیداست این‌گونه نمی‌باشد. یک بردار در فضای پیچشی F در نقطه‌ی

A' را موازی یک بردار در نقطه‌ی A گوییم هرگاه مولفه‌های آن در A نسبت به دستگاه مختصاتی ۳تایی موضعی برابر با مولفه‌های آن در دستگاه پیچش یافته در نقطه A' باشد. حال اگر بردار $\vec{W}$ را به مولفه‌های آن در راستای محورهای مختصاتی x, y, z تجزیه کرده و آن‌ها را w_1, w_2, w_3 بنامیم و سپس از A' به سمت A حرکت کرده و سپس از آن دور شویم دستگاه مختصاتی سه‌تایی بر روی هریک از محورها بر روی یک مسیر مارپیچ حرکت می‌کند. حال به مفهوم توازی دو بردار را در فضای پیچش F در نقطه A' موازی یک بردار در نقطه A گوییم هرگاه مولفه‌های آن در A نسبت به دستگاه مختصاتی دکارتی موضعی برابر با مولفه‌های آن در نقطه A' در دستگاه مختصاتی پیچش یافته باشد. با آن که تعریف توازی دو بردار در فضای پیچ‌دار F کاملا مشابه فضای اقلیدسی می‌باشد اما یک تفاوت شهودی بین این دو فضا وجود دارد. در فضای اقلیدسی موازی بودن دو بردار معادل هم راستا بودن آن‌ها می‌باشد. اما به علت ساختار فضای پیچ‌دار F از لحاظ شهودی ممکن است دو بردار دارای مولفه‌های برابر باشند اما جهت آن‌ها در یک راستا نباشد. از طرفی دیگر فضای پیچشی دارای یک خاصیت نامتعارف دیگر نیز می‌باشد. فرض کنیم U و V دو بردار دلخواه باشند. در نقطه‌ی دلخواه P این دو را در طول یکدیگر به‌صورت موازی انتقال می‌دهیم و بردارهای حاصله را $U_R{}^{||}$ و $V_R{}^{||}$ می‌نامیم. اگر تانسور پیچش فضا مخالف صفر باشد نمودار حاصله بسته نمی‌شود. شکل زیر این مسئله را به روشنی نشان می‌دهد.



تا این قسمت مقاله سعی شد تا یک درک شهودی از مفهوم پیچش ارائه شود. در قسمت پایانی مقدمه ای از ویژگی های هندسی یک فضای پیچش دار با زبان دقیق ریاضی می پردازیم.

ویژگی هندسی هر نظریه گرانشی کلاف مماسی[1] که یک ساختار طبیعی بر رزی فضا زمان می باشد. در هر نقطه از این فضا — زمان همیشه یک فضای مماسی وجود دارد که بر روی آن گروه انتقال فضا — زمان عمل می کند. در مورد گروه لورنتز فضای مماسی یک نمایش را برای گروه فراهم می کند که همان نمایش برداری می باشد. در ادامه مقاله ما از حروف یونانی($\mu, \rho, \nu = 1, 2, 3$) برای نمایش اندیس‌های مربوط به فضا-زمان و حروف لاتین کوچک ($a, b, c, \ldots$) برای اندیس‌های فضای مماس استفاده می‌کنیم که همان فضای مینکوفسکی تخت با متریک

$$\eta_{ab} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$$

اندیس‌های لاتین($i, j, k = 1, 2, 3$) برای نمایش قسمت برای مختصات فضایی از مختصات فضا-زمان بکار برده می‌شود که با نماد $\{x^\mu\}$ نمایش داده می‌شود در حالی که مختصات فضای مماس را با نماد $\{x^a\}$ نشان خواهیم داد. این سیستم های مختصاتی بر روی دامنه تعریفشان یک پایه برای فضای برداری که توسط مجموعه های

$$\{\partial_\mu\} = \{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\} \quad \text{و} \quad \{\partial_a\} = \{\frac{\partial}{\partial x^a}\}$$

درست همانند پایه‌های $\{\mathrm{dx}^\mu\}$ و $\{\mathrm{dx^a}\}$ که به عنوان پایه برای فضای هم بردارها تعریف می‌کند. این پایه‌ها دوگان همدیگر هستند به طوری که

$$\mathrm{dx}^\nu(\partial_\mu) = \delta^\mu_\nu \quad \text{و} \quad \mathrm{dx}^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu$$

بر روی دامنه تعریف متناظر هر میدان برداری یا میدان هم‌برداری توسط ترکیبی از این پایه‌ها به وجود می‌آید. یک پایه هولونوم مانند $\{\partial_a\}$ که با مختصات رابطه دارد یک مثال خاص از پایه‌های خطی می‌باشد. هر میدان مستقل خطی چهارتایی $\{e^a\}$ یک پایه‌ی

[1] tangent bundle

دیگر تشکیل می‌دهند که دوگان آن‌ها به صورت $\{e_a\}$ می‌باشند و در خاصیت $e^a(e_b)=\delta^a_v$ صدق می‌کنند. این چارچوب ها حالت کلی پایه های خطی روی یک منیفلد دیفرانسیل پذیر فضا— زمان می باشند. البته بر روی دامنه مشترک اعضای یک پایه را می توان بر اساس پایه ای دیگر نوشت که از قانون زیر تبعیت می کنند.

$$e_a=e^\mu_a\partial_\mu \qquad \text{و} \qquad e^a=e^a_\mu \mathrm{dx}^\mu$$

این چارچوب ها به همراه کلاف هایشان اجزای تشکیل دهنده فضا— زمان می باشند. آن ها بصورت خودکار هنگامی که فضا زمان را بصورت یک منیفلد دیفرانسیل پذیر ظاهر می شوند. از این به بعد از علامت های $\{h^a,h_a\}$ برای یک میدان چهارتایی نوعی استفاده می کنیم. یک میدان از چارچوب های خطی که به حضور یک میدان گرانشی ربط داده شده است. فرض کنیم g متریک فضا–زمان با اجزای $g_{\mu\nu}$ باشد که در یک پایه هولونوم دوگان $\{\mathrm{dx}^\mu\}$ به‌صورت

$$g=g_{\mu\nu}\mathrm{dx}^\mu\otimes\mathrm{dx}^\nu=\mathrm{g}_{\mu\nu}\mathrm{dx}^\mu\mathrm{dx}^\nu$$

نشان داده می‌شود. یک میدان چهارتایی $h_a=h^\mu_a\partial_\mu$ متریک g را به فضای متریک مماسی $\eta=\eta_{ab}\mathrm{dx^a dx^b}$ را از طریق رابطه‌ی $\eta_{ab}=g(h_a,h_b)=g_{\mu\nu}h^\mu_a h^\nu_b$ تبدیل می‌کند.

این بدان معناست که یک میدان چهارتایی یک چهارچوب خطی است که اعضای آن h_aها در متریک g شبه عمود هستند. اجزای مولفه‌های پایه دوگان در شرط $h_a=h^\mu_a\mathrm{dx}^\mu$ و روابط

$$h^\mu_a h^a_\nu=\delta^\mu_\nu \qquad \text{و} \qquad h^a_\mu h^\nu_a=h^\nu_\mu$$

نیز صدق می‌کنند. در نتیجه با توجه به روابط بالا داریم:

$$g_{\mu\nu}=\eta_{ab}h^a_\mu\nu$$

ناهولونومی که خاصیت یک فرم دیفرانسیل است که دیفرانسیل هیچ چیزی نیست یا یک میدان برداری که گرادیان نیست در بسیاری از بخش های فیزیک مانند گرما یا کار کلربرد فراوانی دارد. در مورد گرانش ناهولونوم بودن با اصل هم ارزی نسبیت عام و میدان گرانشی ارتباط نزدیکی دارد. اگر یک متریک ریمانی داده شده باشد بودن یا نبودن یک میدان گرانشی متناظر با ویژگی هولونوم و یا ناهولونوم بودن فرم های $h_a=h^\mu_a\mathrm{dx}^\mu$ می‌باشد. ما می‌توانیم تغییر مختصات $\{x^a\to x^\mu\}$ که به وسیله‌ی رابطه‌های $\mathrm{dx^a}=(\partial_\mu \mathrm{x^a})\mathrm{dx}^\mu$ و $\mathrm{dx}^\mu=(\partial_\mathrm{a}\mathrm{x^a})\mathrm{dx^a}$ بدست می‌آید. یک فرم $\mathrm{dx^a}$ هولونوم است که در واقع همان مشتق مختصات x^a می‌باشد و موجوداتی مانند $\partial_\mu x^a$ مولفه‌های فرم هولونومیک $\mathrm{dx^a}$ که در پایه dx^μ نوشته می‌شود. در نتیجه تغییر مختصات فقط یک تغییر در پایه هولونومیک از یک فرم‌ها می‌باشد. برای پایه دوگان رابطه‌های

$$\partial_\mu=(\partial_\mu x^a)\partial_a \qquad \text{و} \qquad \partial_a=(\partial_\mu x^\mu)\partial_\mu$$

حال یک پایه دوگان مانند h^a را طوری در نظر می‌گیریم به طوری که $\mathrm{dh^a}\neq 0$ باشد. به بیان دیگر دیفرانسیل هیچ فرمی نباشد. حال اگر یک فرم ناهولونوم h^a را روی $\frac{\partial}{\partial_\mu}$ اثر دهیم نتیجه آن یعنی $h^a_\mu=h^a(\partial_\mu)$ مولفه‌های $h^a=h^a_\mu\mathrm{dx}^\mu$ در طول dx^μ می‌باشند. این دستورالعمل را می‌توان هنگامی که h^a مستقل خطی هستند به‌صورت معکوس انجام داد و میدان‌های برداری $h_a=h^\mu_a\partial_\mu$ که گرادیان هیچ برداری نیستند را تعریف کرد. چون فرم‌های بسته به صورت موضعی دقیق هستند معیار هولونوم بودن یا ناهولونوم بودن را می‌توان این‌گونه تعریف کرد:

یک فرم دیفرانسیل هولونوم است اگر و تنها اگر مشتق خارجی آن برابر صفر شود. یک چهارتایی هولونوم همیشه بصورت $h^a=\mathrm{dx^a}$ از یک مجموعه مختصاتی $\{x^a\}$ می‌باشند. برای این چهارتایی تانسور $g_{\mu\nu}$ به سادگی همه اجزای متریک لورنتز η را در دستگاه مختصاتی $\{\mathrm{dx}^\mu\}$ ارائه می‌کند. یک پایه ناهولونوم $\{h_a\}$ در شرط

$$[h_a,h_b]=f^c_{ab}h_c$$

صدق می‌کند که f^c_{ab} را ضرائب ساختار یا ضرائب ناهولونومی می‌نامند. چارچوب $\{\partial_\mu\}$ که در بالا ذکر شده را کاملا هولونوم در نظر می‌گیریم چرا که اعضای آن با هم جابه‌جا می‌شوند. عبارت دوگان جدول جابه‌جاگر بالا همان ساختار معادله کارتان

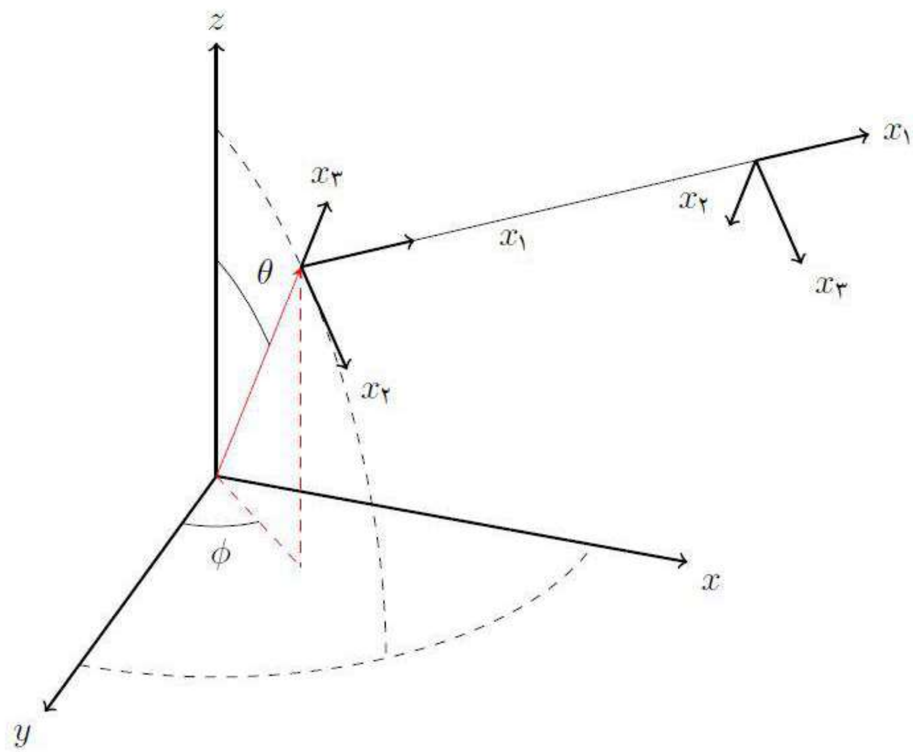
$$\mathrm{dh^c}=-\frac{1}{2}\mathrm{f^c_{ab}h_a}\wedge\mathrm{h_b}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\mathrm{h^c_\nu}-\partial_\nu\mathrm{h^c_\mu})\mathrm{dx}^\mu\wedge\mathrm{dx}^\nu$$

می‌باشند. ضرائب ساختاری نمایانگر هسته اجزای پایه هستند.

$$f^c_{ab}=h^c([h_a,h_b])=h^\mu_a h^\nu_b(\partial_\mu h^c_\nu-\partial_\nu h^c_\mu)=h^\mu_c(h_a(h^\mu_b)-h_b(h^\mu_a))$$

اگر $f^c_{ab}=۰$ باشند، آنگاه $\mathrm{dh^a}=0$ می‌شود که این امر وجود توابع مختصاتی موضعی x^a را به‌طوری که $h^a=\mathrm{dx^a}$ تضمین می‌کند که این همان مسئله (چهارتایی هنگامی گرادیان است که هسته آن برابر صفر باشد) را تداعی می‌کند.

حال که با شهود هندسی پدیده‌ی پیچش آشنا شدیم، برای درک بهتر مسئله آن را به بیان دقیق ریاضی برای فضای $\mathbb{R}^۳$، محاسبه می‌کنیم و هموستار[۲] متناظرش را به دست می‌آوریم. فرض کنیم نقطه‌ی دلخواه A داده شده است و می‌خواهیم دستگاه راستگرد مختصاتی را به نقطه‌ی B انتقال موازی دهیم. برای سهولت در انجام محاسبات فرض می‌کنیم محور x در راستای $\frac{\bar{AB}}{|\bar{AB}|}$ به‌صورت موازی منتقل می‌شود. پیچش باعث می‌شود تا محور متعامد $(y-z)$ در این انتقال موازی در راستای محور x به اندازه‌ی α دوران کند. که در شکل زیر می‌توان مشاهده کرد.



حال اگر رابطه‌ی $\nabla = \nabla^{\parallel} + \nabla^{\perp}$ را در نظر بگیریم، نمایش ماتریس متناظر با این انتقال موازی به صورت

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \cos\theta & -\sin\theta \\ ۰ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

از طرفی با توجه به رابطه $\nabla_X^Y = \lim_{t\to ۰} \frac{۱}{t}(p^{-۱}(\gamma(a(t)) - \gamma(۰))$ که در اینجا p انتقال موازی بردار γ در راستای خم $a(t)$ با شرایط اولیه $a(۰) = A$، $a'(۰) = X$ و همچنین رابطه

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}^{\frac{\partial}{\partial x_i}} = \sum_{k=۱}^{n} \Gamma_{ij}^{k} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

داریم:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_۱}}^{\frac{\partial}{\partial x_۲}} = \lim_{\theta\to ۰} \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -\sin\theta & \cos\theta \\ ۰ & \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} = \sum_{k=۱}^{۳} \Gamma_{۱۲}^{k} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

[۲] Connection

$$\nabla^{\frac{\partial}{\partial x_۲}}_{\frac{\partial}{\partial x_۱}} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_۳} = \sum_{k=۱}^{۳} \Gamma^k_{۱۲} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$\Gamma^۱_{۱۲} = \Gamma^۲_{۱۲} = ۰ \;\;,\;\; \Gamma^۳_{۱۲} = ۱$$

با استفاده از این روش می‌توان تمام ضرایب کریستوفر Γ^k_{ij}ها را به‌دست آورد. Γ^k_{ij} دارای خاصیت تانسوری نمی‌باشد، چرا که اگر فرض کنیم Γ^k_{ij} ضرایب کریستوفر متناظر با هموستار ∇ بر روی باز $\mathcal{U}$ با بردارهای پایه $\{\frac{\partial}{\partial u_n}, \cdots, \frac{\partial}{\partial u_۱}\}$ و ${\Gamma^k_{ij}}'$ مربوط به هموستار ∇' بر روی باز $\mathcal{V}$ با بردارهای پایه $\{\frac{\partial}{\partial v_n}, \cdots, \frac{\partial}{\partial v_۱}\}$ باشند به طوری که $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ آن‌گاه تحت تغییر مختصات اجزای هموستار ∇' از رابطه‌ی

$${\Gamma^j_{ik}}' = \Gamma^q_{pr} \frac{\partial v^j}{\partial u^q} \frac{\partial u^p}{\partial v^i} \frac{\partial u^r}{\partial v^k} + \frac{\partial^۲ u^p}{\partial v^i \partial v^k} \frac{\partial v^j}{\partial u^p}$$

به دست می‌آید و عبارت $\frac{\partial^۲ u^p}{\partial v^i \partial v^k} \frac{\partial v^j}{\partial u^p}$ عبارت اضافی است. اما اگر تفاضل دو مولفه Γ^k_{ij} و Γ^k_{ji} در نظر بگیریم، این عبارت زائد حذف شده و عبارت حاصل از قانون تغییر مختصات یک تانسور ۲-هموورد،۱-ناهموورد تبعیت می‌کند. این تانسور را با T^k_{ij} نمایش می‌دهیم:

$$T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$$

واضح است که T^k_{ij} یک تانسور پادمتقارن است. خواننده‌ی علاقه‌مند می‌تواند مولفه‌های این تانسور را برای فضای $\mathbb{R}^۳$ به‌دست آورد.

هموستار همراه با پیچش

هنگامی که بخواهیم عمل مشتق را با یک رابطه تانسوری خوش تعریف تعریف کنیم ، بسیار حیاتی است که هموستار $\Gamma^\lambda_{\nu\mu}$ را معرفی بکنیم که در اندیس آخر دارای خاصیت برداری هستند ولی قسمتی از آن ها که رفتار تانسوری ندارند همان دو مولفه اول این هموستار می باشند. هموستارهای خطی دارای خصوصیات زیادی از فضا — زمان هستند چرا که بر روی کلاف چارچوب های خطی تعریف شده اند که یک قسمت تشکیل دهنده از ساختار منیفلد می باشند. هموستارهای خطی بخصوص هموستارهای لورنتزی همیشه دارای پیچش مخالف صفر هستند . یادآوری این مسئله که انحنا و پیچش خصوصیات هموستار فضا هستند بسیار مهم می باشد. به بیان دیگر چیزی بنام انحنا و پیچش در فضا - زمان وجود ندارد بلکه این دو ویژگی های مفهوم محض هموستار می باشند و می توانیم بر روی یک فضا هموستارهای گوناگونی تعریف کرد. البته وقتی به مورد نسبیت عام محدود می شویم که تنها هموستار موجود هموستار لوی— چیوتاست ، فراگیر بودن گرانش این اجازه را می دهد که به عنوان یکی از خصوصیات فضا — زمان تفسیر بشود. اما در حضور هموستارهای مختلف به همراه انحنا و پیچش های گوناگون بسیار منطقی به نظر می رسد که فضا— زمان را به عنوان یک منیفلد و هموستارها را به عنوان یک ساختار اضافی که روی آن منیفلد تعریف می شود در نظر بگیریم.

هموستار اسپین‌دار A یک هموستار به‌صورت

$$A_\mu = \frac{۱}{۲} A^\mu_{ab} S_{ab} \tag{۱}$$

با خاصیت $S_{ab} = -S_{ba}$ مولدهای لورنتز در یک نمایش داده شده می‌باشند. از طرف دیگر یک میدان چهارتایی تانسورهای داخلی با خارجی را مربوط می‌کند. به‌طور مثال اگر V^a یک بردار لورنتزی باشد آن‌گاه

$$V^\rho = h^\rho_a V^a \tag{۲}$$

یک بردار فضا— زمان خواهد بود. با این حال در یک مورد خاص از هموستارها یک شرط خلا اضافی وقتی که اندیس وقتی که می خواهیم از اندیس داخلی به اندیس خارجی تغییر دهیم ظاهر می شود که برعکس این امر نیز صادق می باشد. در واقع یک هموستار خطی عمومی مانند $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ به هموستار اسپینی A^μ_{ab} از طریق رابطه

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = h^\rho_a \partial_\mu h^\mu_a + h^\rho_a A^a_{b\mu} h^\mu_b \tag{۳}$$

و همچنین با توجه به معادلات ۱ و ۲ و معکوس رابطه ۳ از معادله

$$A^a_{b\mu} = h^a_\nu \partial_\mu h^b_\nu + h^a_\nu \Gamma^\nu_{\rho\mu} h^\rho_b \tag{۴}$$

مربوط می شوند. معادلات ۳ و ۴ در واقع راه های گوناگون از بیان این خاصیت که مشتق هموردا برای هر دو اندیس وقتی که روی چهار بردار فضا زمان اثر می کند همه جا برابر صفر می شود.

$$\partial_\mu h^a_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu} h^a_\rho + A^a_{b\mu} h^b_\nu = 0 \qquad (5)$$

یک هموستار $\Gamma^\rho_{\lambda\mu}$ را سازگار با متریک گوییم هرگاه

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} g_{\mu\rho} = 0 \qquad (6)$$

اگر از نقطه نظر یک چهاربردار به مسئله نگاه کنیم و با توجه به معادلات ۳ و ۴، رابطه فوق را می توان بصورت

$$h_\mu(\eta_{ab}) - A^d_{a\mu}\eta_{db} - A^d_{b\mu}(\eta_{ad}) = 0 \qquad (7)$$

نوشت، به طوری که $h_\mu = h^a_\mu \partial_a$ است. چون $h_\mu(\eta_{ab}) = 0$ داریم

$$A_{ba\mu} = -A_{ab\mu} \qquad (8)$$

انحنا و پیچش هموستار $A^a_{b\mu}$ به صورت مشابه توسط معادلات

$$R^a_{b\mu\nu} = \partial_\nu A^a_{b\mu} - \partial_\mu A^a_{b\nu} + A^a_{e\nu} A^e_{b\mu} - A^a_{e\mu} A^e_{b\nu} \qquad (9)$$

و

$$T^a_{\mu\nu} = \partial_\nu h^a_\mu - \partial_\mu h^a_\nu + A^a_{e\mu} A^e_{b\nu} - A^a_{e\nu} A^e_{b\nu} \qquad (10)$$

بدست می آید. اگر از رابطه ۴ در روابط بالا استفاده کنیم روابط بالا را می توانیم کاملا بر حسب فرم فضا — زمان بنویسیم که به معادله

$$R^\rho_{\lambda\nu\mu} = h^\rho_a h^\lambda_b R^a_{b\nu\mu} = \partial_\nu \Gamma^\rho_{\lambda\mu} - \partial_\mu \Gamma^\rho_{\lambda\nu} + \Gamma^\rho_{\nu\eta}\Gamma^\eta_{\lambda\mu} - \Gamma^\rho_{\eta\mu}\Gamma^\eta_{\lambda\nu} \qquad (11)$$

$$T^\alpha_{\mu\nu} = h^\rho_a T^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} \qquad (12)$$

می رسیم. ضرائب هموستار را می توان به دو قسمت تجزیه کرد

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^{\dot\rho}_{\mu\nu} + K^\rho_{\mu\nu} \qquad (13)$$

به‌طوری که

$$\Gamma^{\dot\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \qquad (14)$$

همان قسمت بدون پیچش هموستار ریمانی لوی چیوتا در نسبیت عام و

$$K^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T^\rho_{\nu;\mu} + T^\rho_{\mu;\nu} - T^\rho_{\mu\nu}) \qquad (15)$$

تانسور هم پیچش[۳] می باشد. در مورد هموستار اسپینی تجریه معادله ۱۳ به‌صورت

$$A^c_{a\mu} = A^{\dot c}_{a\mu} + K^c_{a\mu} \qquad (16)$$

که $A^{\dot c}_{a\mu}$ ضریب ریچی از دوران همان هموستار اسپینی در نسبیت عام فرض می شود. چون هموستار اسپینی در اندیس آخرش خاصیت تانسوری دارد می نوانیم آن را به فرم معادله

$$A^a_{bc} = A^a_{b\mu} h^\mu_c \qquad (17)$$

بنویسیم. به راحتی می توان مشاهده کرد در پایه ناهولونوم h_a مولفه های انحنا و پیچش بترتیب از طریق روابط

$$R^a_{bcd} = h_c(A^a_{bd}) - h_d(A^a_{bc}) + A^a_{ec} A^a_{bd} - A^a_{ed} A^e_{bc} + f^e_{cd} A^a_{be} \qquad (18)$$

و

$$T^a_{bc} = -f^a_{bc} + A^a_{cb} - A^a_{bc} \qquad (19)$$

---
[۳] cotorsion

بدست می آیند. در نتیجه پیچش شامل ناهولونومی است. اگر معادله بالا را برای سه ترکیب مختلف از اندیس ها بکار ببریم داریم

$$A^{a}_{bc} = -\frac{۱}{۲}(f^{a}_{bc} + T^{a}_{bc} + f^{a}_{bc} + T^{a}_{bc} + f^{a}_{cb} + T^{a}_{cb}) \tag{۲۰}$$

وقتی پیچش همانند نظریه نسبیت عام محو می شود ما به همتن ضرائب ریچی از دوران در پایه ناهولونوم

$$A^{\dot{a}}_{bc} = -\frac{۱}{۲}(f^{a}_{bc} + f^{a}_{bc} + f^{a}_{cb}) \tag{۲۱}$$

می‌رسیم.

مراجع

[1] Gravitation in search of missing torsion .R.Aldrovandi, Arxiv :0801.4148v1

[2] Cartan’s theory in geometry and field theory , an essay. Friedrich W. Hehl

[3] Cartan’s spiral staircase in physics and in particular in gauge theory of dislocations. Marcus Lazar and Friedrich W. Hehl