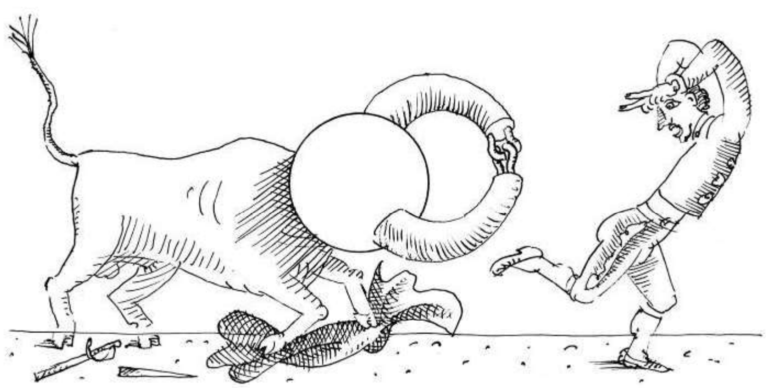
# کره‌ی شاخدار الکساندر

ترجمه: سامان حبیبی اصفهانی

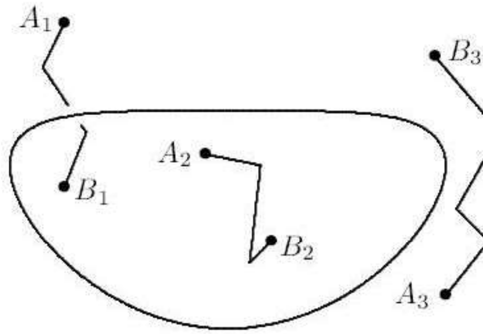
کره شاخدار الکساندر[1] دو ویژگی دارد که به آن ارزش مطالعه می‌دهد . اول اینکه راه حلی برای یک مساله بسیار مهم و مشکل در زمینه توپولوژی ارائه می‌دهد و دوم اینکه واقعا زیباست .



**قضیه ژردان–شوئنفلیس**[2]: یک خم در یک صفحه اثر[3] یک نقطه متحرک است. اگر مکان اولیه نقطه با مکان انتهایی آن منطبق شود به آن یک خم بسته می‌گوییم. اگر موقعیت نقطه متحرک در هیچ دو لحظه ای ( مگر احیانا نقطه اول و آخر ) منطبق نشود خم حاصله را خم ساده یا خم ناخود متقاطع می‌نامیم. قضیه ژردان بیان می‌کند خم ساده بسته $C$ واقع در صفحه، صفحه را به دو ناحیه " درون" و "بیرون" تقسیم می‌کند به نحوی که هر دو نقطه که درون یک ناحیه هستند را می‌توان به کمک خطی شکسته[4] به هم متصل کرد طوری که این خط از خم $C$ مجزا باشد در حالیکه هر خط شکسته ای که دو نقطه را از دو ناحیه مختلف به هم وصل می‌کند حتما خم $C$ را قطع خواهد کرد.

این قضیه در آنالیز از اهمیت زیادی برخوردار است برای نمونه در نظریه انتگرال جایی که نیازمندیم تا ناحیه هایی محدود به یک خم بسته ساده در نظر بگیریم. ولی این قضیه سوالی را از خود بر جای می‌گذارد که بیشتر در حوزه توپولوژی جای دارد تا آنالیز: ناحیه‌هایی از صفحه که توسط یک خم ساده بسته تولید می‌شوند چه شکلی دارند؟

[1] Alexander's Horned Sphere
[2] Theorem of C. Jordan and A. Schoenflies
[3] trace
[4] Polygonal Line

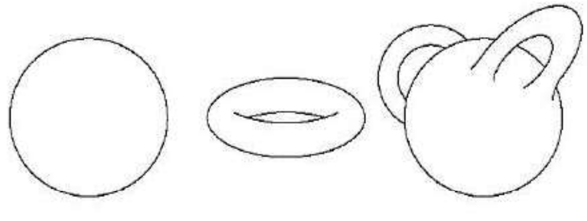



شکل ۱: یک خم ساده بسته صفحه را به دو ناحیه مجزا تقسیم می‌کند.

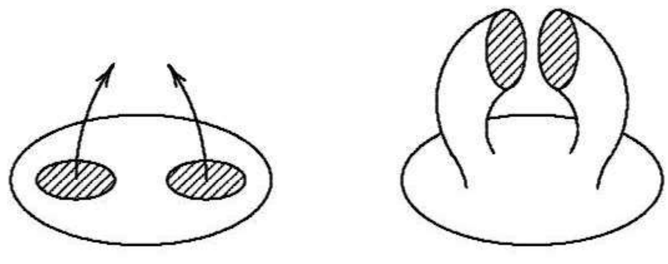
در ریاضیات معمولا واژه‌ی نادقیق "هم‌شکل" با واژه‌ی دقیق "همیومورفیک" جای‌گذاری می‌شود: دو ناحیه همیومورفیک هستند اگر یک نگاشت یک‌به‌یک از یکی به دیگری موجود باشد که هم خود آن و هم وارونش پیوسته‌اند. برای نمونه درون یک دایره و درون یک مربع همیومورفیک هستند ( با اینکه شاید در ظاهر شبیه هم به نظر نیایند. ) در حالی‌که یک حلقه ( ناحیه میان دو دایره هم مرکز ) با هیچ کدام همیومورفیک نیست .
در سال ۱۹۰۸ شوئنفلیس اثبات کرد که به ازای هر خم ساده بسته ای که در صفحه رسم کنیم، ناحیه درونی خم و ناحیه بیرونی آن با درون و بیرون دایره همیومورفیک است. به طور مشابه می‌توان ثابت کرد که ناحیه میان دو خم ساده بسته که همدیگر را قطع نمی‌کنند با حلقه همیومورفیک است.

## تعمیم به ابعاد بالاتر

می‌توان انتظار داشت که قضیه‌ای مشابه قضیه ژردان-شوئنفلیس برای هندسه فضایی هم برقرار باشد. همه چیزی که به آن احتیاج داریم یافتن بیان صحیح است. رویه های های بسته به وضوح باید جای خم های بسته را بگیرند.
حال با اولین مشکل روبه رو می‌شویم: درحالی که همه‌ی خم‌های بسته به نوعی شبیه به هم هستند ( هومیومورفیک‌اند) اما رویه‌های بسته می‌توانند به طور اساسی متفاوت باشند. برای نمونه چنبره ها، کره، کره‌های با دسته و ...هیچ کدام با هم همیومورفیک نیستند. پس باید حالت‌های مختلف جداگانه بررسی شوند. ما از این تنوع چشم‌پوشی می‌کنیم و تمام توجه‌مان را به رویه‌هایی که توسط یک نگاشت پیوسته از کره بدست آمده‌اند بدون اینکه خود را قطع کنند، محدود می‌کنیم. حال برای چنین رویه‌هایی می‌توان انتظار آن را داشت که نتیجه‌ای مشابه قضیه ژردان-شوئنفلیس برقرار باشد.
مشابه قضیه ژردان در دو بعد، حالت فضایی قضیه برای این رویه‌ها درست است یعنی چنین رویه هایی فضا را به دو ناحیه درون و بیرون تقسیم می‌کند. ضمنا ادعای قضیه در حالت دو بعدی اینجا بدون هیچ تغییری کاملا صحیح می‌باشد نه تنها برای رویه‌های مطرح شده همچنین برای کره‌هایی که به آنها دسته یا دسته‌هایی اضافه کرده‌ایم. همچنین برای آن تعمیمی‌کاملا طبیعی به هر بعد دلخواه نیز موجود است .
اما قضیه شوئنفلیس چطور؟ تعمیم صورت قضیه به ابعاد بالاتر باید چنین باشد که ناحیه‌های درونی و بیرونی ایجاد شده باید با ناحیه های بیرونی و درونی کره همیومورفیک باشد یعنی به ترتیب با گوی باز و مکمل گوی بسته (مکمل بستار گوی).
اما این توپولوژیست آمریکایی، جان الکساندر بود که برای نخستین بار در سال ۱۹۲۴ اثبات کرد که این حدس، هر چند هم که در نگاه اول پذیرفتنی به نظر می‌رسد، در واقع غلط است. کار الکساندر بسیار متقاعد کننده بود: او یک ساختار صریح از یک کره تغییر شکل یافته ارائه کرد که فضا را به ناحیه های استاندارد تبدیل نمی‌کرد. در زیر این ساختار به تفصیل شرح داده می‌شود.
ساختار الکساندر بسیار زیبا و ساده است. جزء اصلی این ساختار در شکل زیر نمایش داده شده است. دو دیسک مجزا درون یک دیسک بزرگتر در نظر بگیرید.( شکل ۳-ب) از این دو دیسک دو "انگشت" بیرون بکشید و انتهای این دو را به هم نزدیک کنید به طوری که با هم برخوردی نداشته باشند.(شکل۳-الف)

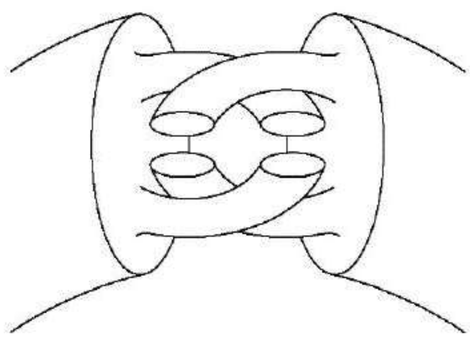


شکل ۲: چند مثال از رویه ها نا همشکل



شکل ۳: ساختن انگشت‌ها

در دو انتهای دو انگشت دو دیسک مسطح داریم. حال همین کار را با این دو دیسک انجام می‌دهیم .درون هر دیسک دو دیسک کوچکتر در نظر گرفته و از آنها "انگشت"هایی را خارج می‌کنیم و به چهار انگشت می‌رسیم که شبیه به یک قفل به نظر می‌آیند. ( شکل ۴ )

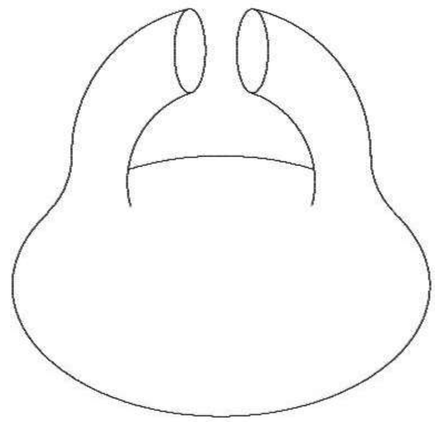


شکل ۴: ساختن انگشت‌ها

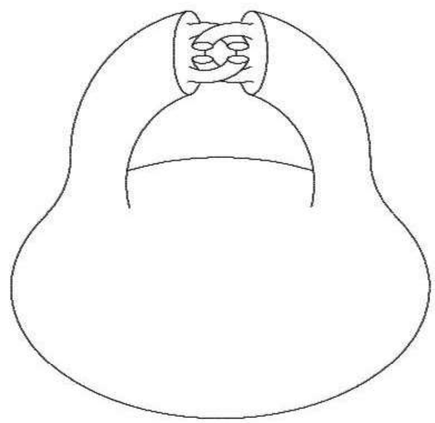
حال می‌توانیم کل ساختار را توضیح بدهیم. یک کره در نظر بگیرید. روی آن دو دیسک انتخاب کنید و از آنها انگشت ها را خارج کنید( بسیار نزدیک به هم ولی بدون برخورد.) ( شکل ۵)

حال همانطور که قبلا دیدیم انتهای هر انگشت مشابه یک دیسک است. از هر کدام از این دیسک‌ها دو انگشت دیگرخارج می‌کنیم.

حال ما دو جفت دیسک مسطح نزدیک به هم داریم. مراحل بالا را روی هر جفت از دیسک‌ها انجام می‌دهیم . به همین ترتیب این روند را بی‌نهایت گام ادامه می‌دهیم . ساختاری که به آن می‌رسیم " گوی شاخدار الکساندر" نام دارد . به سختی ممکن به نظر می‌رسد که بتوان طرحی راضی کننده از این ساختار رسم کرد ( چرا که انگشت‌ها در هر گام کوچکتر و کوچکتر می‌شوند. ) شکل



شکل ۵: قدم اول– دو انگشت از کره خارج شده‌اند.



شکل ۶: قدم دوم– بین انگشتان قفل ایجاد شده است.

بالا تقریبی از این ساختار است.

**این ساختار صراحتا یک کره است.** در نگاه اول کره بودن این ساختاراندکی شک بر انگیز است. ( منظور از کره بودن همیومورفیک بودن با کره است.)

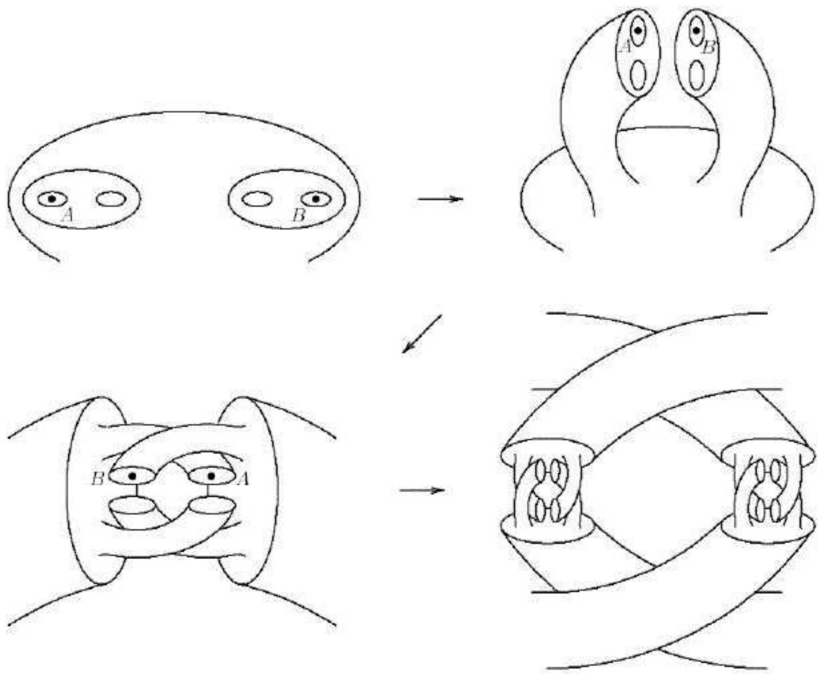
آیا واقعا انتهای انگشت‌ها هرگز با هم برخورد نخواهد کرد؟ ظاهرا آنها به هر اندازه دلخواه به هم نزدیک می‌شوند و در حد به هم می‌پیوندند چرا که در هر گام نیز ما اجزا را به هم نزدیک‌تر می‌کنیم.

اما جواب خیر است و این مشکل کاملا موهومی‌است. ما می‌توانیم همین روند ساخت را به نحوی انجام دهیم که برای هر دو نقطه متفاوت از کره ( کره قبل از انجام هر عملی ) فاصله‌شان بعد از انجام این عملیات از " مثلا " ۱% فاصله اولی‌شان کمتر نباشد .

عملیات ساخت را قدم به قدم می‌آزماییم . قدم اول ساخت انگشت‌ها، دو دیسک روی یک کره دست نخورده را در بر می‌گیرد. بقیه کره در تمام عملیات دست نخورده باقی می‌ماند. قدم دوم تنها با چهار دیسک کوچکتر کار می‌کند. از مرحله دوم به بعد کل ساختار خارج از این ۴ دیسک بدون تغییر باقی می‌مانند. به طور مشابه ۸ دیسک در مرحله سوم درگیر عملیات هستند، ۱۶ دیسک در مرحله چهارم و ... . دیسک‌های مرحله $n$ ام را با نام دیسک به اندازه $n$ می‌خوانیم. پس $۲^n$ دیسک از اندازه $n$ داریم و هر دیسک

از اندازه $n$ شامل دو دیسک از اندازه $n + ۱$ است. نقاطی از کره که در هیچ دیسکی از اندازه $n$ نیستند در عملیات ساخت گوی شاخدار از مرحله $n$ ام به بعد هیچ تغییری نمیکنند.

حال می‌خواهیم فاصله دو نقطه از کره را در طول انجام مراحل بررسی کنیم. دو نقطه متمایز A و B از کره را در نظر بگیرید. اگر نه A و نه B در هیچ دیسکی به اندازه ۱ قرار نداشته باشند فاصله این دو نقطه در طی انجام مراحل تغییر نمی‌کند. اگرفقط یکی از این دو نقطه در دیسکی به اندازه ۱ قرار داشته باشد، آنگاه فاصله آنها به طور محسوسی عوض نمی‌شود به طوری که می‌توانیم فرض کنیم که حتی اگر این فاصله زیاد شود از ۳ برابر مقدار اولیه‌اش بیشتر نمی‌شود. اگر A و B به دو دیسک متمایز از اندازه ۱ متعلق باشند آنگاه بعد از یک گام به طور قابل ملاحظه‌ای به هم نزدیک‌تر می‌شوند ولی می‌توانیم تصور کنیم فاصله شان بیش از ۱۰ مرتبه کاهش نمی‌یابد. بعلاوه اگر دو نقطه به دو دیسک از اندازه ۲ متعلق باشند گام بعدی آن‌ها را باز هم به همدیگر نزدیک‌تر خواهد کرد ولی به طور مشابه نه بیش از ۱۰ مرتبه نزدیکتر. اما حتی اگر دو نقطه به دیسک‌های از اندازه ۲ و ۳ و ... متعلق باشند، نشان می‌دهیم این دو به اندازه کافی به هم نزدیک نخواهند شد.



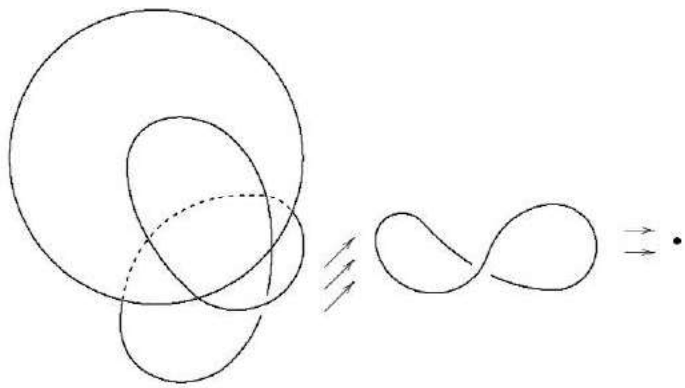

علت این " به‌اندازه کافی به هم نزدیک نشدن " خاصیتی در روش ساخت کره الکساندر است: در مرحله $n$ ام عملیات ما تنها نقاطی را از یک دیسک به‌اندازه $n - ۱$ به هم نزدیک می‌کنیم.

حال می‌توانیم این خاصیت کلی برای فاصله‌ها را فرموله کنیم. فرض کنیم $n$ بزرگترین عددی باشد که A و B هر دو به یک دیسک به‌اندازه $n$ متعلق باشند. آنگاه فاصله آن دو از گام ۱ ام تا گام $n$ ام بدون تغییر باقی می‌ماند. اگر هیچ کدام به دیسکی به‌اندازه $n + ۱$ متعلق نباشد فاصله آنها از آن جا به بعد نیز بدون تغییر باقی خواهد ماند پس در کل مراحل فاصله آن‌ها تغییر نمی‌کند. اگر تنها یکی از آن دو به یک دیسک به‌اندازه $n + ۱$ متعلق باشد فاصله‌شان از ۳ برابر مقدار اولیه بیشتر نمی‌شود. اگر هر دو به دیسک های ازاندازه $n + ۱$ متعلق باشد ( حتما این دو دیسک مختلف‌اند ) فاصله‌شان در گام $n + ۱$ بیش از ۱۰ برابر نخواهد شد. اگر هیچ کدام از دو نقطه به دیسکی ازاندازه $n + ۲$ متعلق نباشد بعد از گام $n + ۱$ ام فاصله‌شان بدون تغییر می‌ماند. اگر دقیقا یکی از آن‌ها از دیسکی به‌اندازه $n + ۲$ باشد در گام $n + ۲$ فاصله‌شان حداکثر ۳ برابر می‌شود و بعد از آن تغییر محسوسی نمی‌کند. در نهایت اگر A و B هر دو به دیسک‌هایی ازاندازه $n + ۲$ متعلق باشند در گام $n + ۲$ ام فاصله‌شان حداکثر ۱۰ برابر شده و بعد آن به طور محسوسی تغییر نخواهد کرد. در همه حالت‌ها فاصله بین A و B از ۱۰۰ برابر فاصله اولیه‌اش بیشتر نخواهد شد.

بنابراین کره شاخدار الکساندر واقعا یک کره ( همیومورفیک با یک کره) است.

## ناحیه بیرونی کره شاخدار الکساندر

اثبات این گزاره سخت نیست که درون کره شاخدار الکساندر با یک گوی عادی بدون مرز همیومورفیک است ولی ما به آن نیازی نداریم. آنچه که از اهمیت زیادی برخوردار است این است که ناحیه خارجی کره شاخدار الکساندر مشابه ( همیومورفیک) با ناحیه خارجی کره عادی نیست. اثبات ادعای اخیر ساده ولی جالب است ( از آنجایی که نمونه‌ی خوبی برای یک اثبات توپولوژیک است). ناحیه خارجی کره عادی ( مثل درون آن ) دارای یک خاصیت توپولوژیک است که همبندی ساده نام دارد: هر خم پیوسته را می‌توان به طور پیوسته به یک نقطه تبدیل کرد. با اینکه بدیهی به نظر می‌آید ولی اثبات دقیق آن به چند تکنیک احتیاج دارد.



شکل ۷: درون کره شاخدار همبند ساده است.

همبندی ساده یک خاصیت توپولوژیک است پس اگر دو ناحیه همیومورفیک باشند و یکی همبند ساده باشد دیگری نیز چنین خواهد بود . ناحیه خارجی کره شاخدار همبند ساده نیست: اگر یک خم بسته دور یک دسته داشته باشیم نمی‌توانیم آن را به طور پیوسته به نقطه ای خارج دسته بکشیم(شکل ۸). ( برای بیرون کشیدن این خم بسته باید آن را از میان جفت دیسک‌های موازی از هراندازه رد کنیم بنابراین در فرآیند تغییر شکل خم بسته به نقطه، خم به هراندازه دلخواه به کره شاخدار نزدیک می‌شود که معنی آن این است که بالاخره در لحظه‌ای به کره شاخدار برخورد خواهد کرد که نباید چنین می‌شد چرا که فرآیند تغییر فرم باید در ناحیه خارج کره شاخدار اتفاق بیافتد )

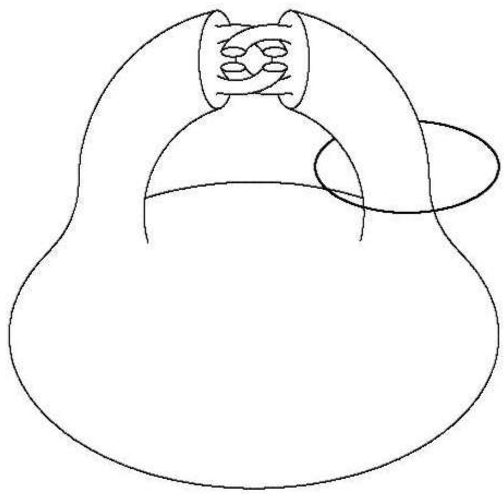
پس خارج کره شاخدار همبند ساده نیست بنابراین با خارج کره عادی همیومورفیک نیست و این نشان می‌دهد که نسخه فضایی قضیه شوئنفلیس صحیح نمی‌باشد.

## کمی‌بیشتر از بیرون کره!

حال به راحتی می‌توان باهوش بود! می‌توان شاخ‌ها را به جای بیرون کشیدن از کره به درون آن کشید. آنگاه کره‌ای خواهیم داشت که به جای بیرون آن، درونش همبند ساده نیست و در نتیجه با درون کره عادی همیومورفیک نیست یا می‌توانستیم از ابتدا به جای یک جفت شاخ، دو جفت شاخ از کره خارج کنیم. یک جفت به بیرون کره بکشیم و یک جفت به درون آن. در این صورت هم ناحیه بیرونی کره شاخدار و هم ناحیه درونی کره شاخدار همبند ساده نیستند و با ناحیه بیرونی و درونی کره عادی متفاوت (غیر همیومورفیک) خواهند بود.

## نتیجه

پیشرفت های بیشتر: ده‌ها سال از اکتشاف الکساندر می‌گذرد. هنوز توپولوژی‌دان‌ها امیدوارند که نسخه‌ای از قضیه شوئنفلیس برای حالت سه بعدی نیز برقرار باشد: "شاید فقط کافی باشد که شکل‌های بسیار پیچیده را از قضیه مستثنی کرد" یا "اگر فقط اشکال



شکل ۸: خارج کره شاخدار الکساندر همبند ساده نیست.

چندوجهی[۵] را در نظر گرفت آیا قضیه صادق خواهد بود" و ... ولی در این حالت‌ها مساله باز هم بسیار سخت می‌باشد. در سال ۱۹۶۰ مورتن براون[۶] قضیه شوئنفلیس را برای چندوجهی‌ها اثبات کرد.( در حقیقت نتایج براون دسته بیشتری از رویه‌ها را شامل می‌شود.) هم‌چنین قضیه براون در ابعاد بالاتر نیز برقرار می‌باشد. با این وجود در ابعاد بالاتر چندوجهی‌ها هم گاهی ما را شگفت زده می‌کنند. برای نمونه در سال ۱۹۷۰ کربی[۷] و سیبنمان[۸] نشان دادند که دو چندوجهی در فضای ۴ بعدی که یکی درون دیگری است می‌توانند ناحیه‌ای تولید کنند که با ناحیه تولید شده توسط دو کره عادی هم مرکز متفاوت است که البته همه‌ی این‌ها تا جایی فراتر از محدوده این نوشته پیش می‌روند.

# مراجع


[1] Dimitry Fuchs and Serge Tabachnikov, Mathematical Omnibus: Thirty Lecture on Classic Mathematics


[۵] polyhedral
[۶] Morton Brown
[۷] Kirby
[۸] L. Siebenmann