نرم‌های کاهش‌یافته از جبرهای ساده روی میدان توابع

گردآوری: ابوالفضل طاهری

چکیده

این مقاله بر اساس مرجع [۱] تنظیم شده‌است و هدف آن بررسی نرم کاهش‌یافته از جبرهای ساده روی میدان توابع[۱] است. توصیفی از گروه تمام نرم‌های کاهش یافته برای میدان‌های کج از توابع گویای ناجابه‌جایی در دست است. در این مقاله می‌خواهیم از آن استفاده کنیم و گروه وایتهد از یک جبر ساده متناهی‌البعد روی میدان دلخواه و از اندیس دلخواه را توصیف کنیم.

۱ مقدمات مورد نیاز

مطالب این بخش از مراجع [۲]، [۳]، [۴]، [۵]، [۶] و [۷] انتخاب شده است. بخش‌های ۳.۱، ۴.۱ و ۵.۱ به طور کامل از [۷] انتخاب شده است.

۱.۱ مدول‌ها و جبرها

تعریف ۱.۱. فرض کنید R حلقه‌ای یکدار و نابدیهی باشد و M مجموعه‌ای ناتهی. مجموعه‌ی M را، همراه با عمل جمع $+ : M \times M \to M$ و ضرب اسکالر $. : R \times M \to M$، R-مدول چپ می‌گوییم اگر:

- $(M, +)$ گروهی آبلی باشد.
- به ازای هر دو عضو از M مثل xو y و هر عضو از R مثل r، $r(x+y) = rx + ry$.
- به ازای هر عضو از M مانند x و هر دو عضو از R مانند r و s، $(r+s)x = rx + sx$.
- به ازای هر عضو از M مانند x و هر دو عضو از R مانند r و s، $(rs)x = r(sx)$.
- به ازای هر عضو از M مثل x، $1x = x$.

مانند تعریف R-مدول چپ، می‌توانیم R-مدول راست را نیز تعریف کنیم. به عنوان مثال هر گروه آبلی یک $\mathbb{Z}$-مدول است.

تعریف ۲.۱. فرض کنید M، R-مدول باشد و N زیرمجموعه‌ای ناتهی از آن باشد. می‌گوییم N زیرمدول M است و می‌نویسیم $N \leq M$، اگر تحدید عمل جمع M به $N \times N$ و تحدید ضرب در اسکالر M به $R \times N$ به ترتیب عمل جمع روی N و ضرب در اسکالر روی N به وجود آورد و به علاوه، N با این عمل جمع و ضرب در اسکالر، R-مدول باشد.

[۱] Function Fields

تعریف ۳.۱. فرض کنید C یک حلقه‌ی جابه‌جایی باشد. یک C-جبر یک حلقه‌ی R است که یک ساختار C-مدولی دارد به طوری که ضرب در اسکالر آن دارای خواص زیر نیز می‌باشد:

$$\forall c \in C, r_1, r_2 \in R, \quad c(r_1 r_2) = (cr_1)r_2 = r_1(cr_2)$$

به طور مثال هر حلقه‌ی R یک $\mathbb{Z}$-جبر است.

ساختار جبرها بسیار شبیه حلقه‌ها می‌باشد. اگر R یک C-جبر باشد و A یک ایده‌آل R باشد در این صورت A یک زیرمدول R خواهد بود. بنابراین حلقه‌ی R/A در واقع یک ساختار C-جبر است. به علاوه هر تصویر هومومورفیک از R به صورت طبیعی ساختار C-جبر دارد.

مرکز حلقه‌ی R را تعریف کنید:

$$Z(R) = \{z \in R : rz = zr, \forall r \in R\}$$

با این تعریف، $Z(R)$ زیرحلقه‌ای از R است و R یک جبر روی هر زیرحلقه‌ی $Z(R)$ خواهدبود. برعکس اگر R یک C-جبر باشد، یک هومورفیسم حلقه‌ای کانونیک مانند $\phi : C \to Z(R)$ که با $\phi(c) = c1$ مشخص می‌شود، وجود دارد.

فرض کنید $A \subset R$ باشد. مرکزساز A در R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$C_R(A) = \{r \in R : ra = ar, \forall a \in A\}$$

با این تعریف $C_R(A)$ زیرحلقه‌ای از R است.

گزاره ۴.۱. هر زیرحلقه‌ی ماکسیمال جابه‌جایی C از R مرکزساز خودش است.

اگر C یک میدان باشد در این صورت چون $ker\phi \lhd C$ بنابراین $ker\phi = 0$، پس می‌توانیم C را به عنوان زیرحلقه‌ای از R در نظر بگیریم.

تعریف ۵.۱. حلقه‌ی R را ساده می‌گوییم اگر هیچ ایده‌آل نابدیهی، سره دوطرفه‌ای نداشته‌باشد و یک جبر را ساده می‌گوییم اگر به عنوان یک حلقه ساده باشد.

تعریف ۶.۱. فرض کنید R یک جبر روی میدان k باشد بنابراین $k \subset Z(R)$. اگر $k = Z(R)$ می‌گوییم R یک جبر مرکزی روی k است و اگر R ساده و مرکزی باشد می‌گوییم یک جبر ساده‌ی مرکزی روی k است.

۲.۱ همریختی‌ها

هم‌ریختی بین مدول‌ها نیز مانند حلقه‌ها و گروه‌ها تعریف می‌شود.

تعریف ۷.۱. فرض کنید M و N دو R-مدول باشند. تابع $\phi : M \to N$ را R-هم‌ریختی می‌نامیم هرگاه

۱. برای هر $x, y \in M$، $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$

۲. برای هر $x \in M$ و هر $r \in R$، $\phi(rx) = r\phi(x)$

اگر دو R-مدول M و N داده شده‌باشند، هر R-هم‌ریختی مثل $\phi : M \to N$ که پوشا هم باشد R-به‌روریختی نامیده می‌شود. اگر یک به یک باشد، R-تک‌ریختی نامیده می‌شود. اگر هم یک به یک و هم پوشا باشد در این صورت به آن R-یک‌ریختی می‌گوییم و M و N را یک‌ریخت می‌گوییم.

۳.۱ دنباله‌های دقیق

تعریف ۸.۱. یک جفت از هم‌ریختی‌های $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ در B دقیق است اگر $Im(f) = Ker(g)$. یک دنباله $\cdots \to A_{i-1} \to A_i \to A_{i+1} \to \cdots$ دقیق است اگر برای هر A_i بین دو هم‌ریختی دقیق باشد.

قضیه ۹.۱. یک دنباله $B \xrightarrow{f} A \to ۰$ دقیق است اگر وتنها اگر f یک به یک باشد. همچنین، یک دنباله $۰ \to C \xrightarrow{g} B$ دقیق است اگر وتنها اگر g پوشا باشد.

اثبات. دقیق بودن در A نتیجه می‌دهد که $Ker(f)$ با تصویر هم‌ریختی $A \to ۰$ برابر باشد، که صفر است. این با یک‌به‌یک بودن هم‌ریختی f هم‌ارز است.
به طریق مشابه، هسته هم‌ریختی $C \to ۰$ برابر است با C، و $g(B) = C$ اگر و تنها اگر g پوشا باشد □

نتیجه ۱۰.۱. یک دنباله $۰ \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to ۰$ دقیق است اگر و تنها اگر fیک‌به‌یک باشد، g پوشا باشد، و $Im(f) = Ker(g)$. می‌گوییم B یک گسترش[۲] از C توسط A است. این دنباله دقیق را یک دنباله دقیق کوتاه [۳] می‌نامیم.

مثال ۱۱.۱. دو $\mathbb{Z}$-مدول $A = \mathbb{Z}$ و $C = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$، داده‌شده‌است که با آن‌ها می‌توان دو دنباله‌های دقیق کوتاه متفاوت ساخت.
اول، $۰ \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to ۰$که $f(a) = (a, ۰)$ و $g(a, c) = c$.

$\mathbb{Z}$-مدول $\mathbb{Z}$همچنین یک گسترش از$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$به$\mathbb{Z}$است. دنباله $۰ \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to ۰$ در نظر بگیرید، که نگاشت n، z را به nz می‌فرستد، در حالی که p نگاشت تصویر است. توجه داشته‌باشید که حتی هرچند A و C در مثال مدول‌های مشابه‌ای هستند، $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ با$\mathbb{Z}$یک‌ریخت نیست. اهمیت دنباله دقیق کوتاه از آن‌جا ناشی می‌شود که می‌توانیم دنباله دقیق بلند را به دنباله‌های کوتاه دقیق بشکنیم. در یک دنباله دقیق از R-مدول ها

$$\cdots \to A_{n+۲} \to A_{n+۱} \to A_n \to A_{n-۱} \to A_{n-۲} \to \cdots$$

اگر

$$C_n \cong Ker(A_n \to A_{n-۱}) \cong Im(A_{n+۱} \to A_n)$$

آنگاه یک دیاگرام جابه‌جایی به صورت زیر بدست می‌آوریم، در حالی که همه‌دنباله های مورب یک دنباله کوتاه دقیق هستند:

$$\begin{tikzcd}
 & & ۰ \arrow[dr] & & ۰ & & ۰ \arrow[dr] & & ۰ & & \\
 & & & C_{n+۱} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & C_{n-۱} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
\cdots \arrow[rr] & & A_{n+۲} \arrow[rr] \arrow[ur] & & A_{n+۱} \arrow[rr] \arrow[dr] & & A_n \arrow[rr] \arrow[ur] & & A_{n-۱} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \cdots \\
 & C_{n+۲} \arrow[ur] & & & & C_n \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & C_{n-۲} \arrow[dr] & \\
۰ \arrow[ur] & & & & ۰ \arrow[ur] & & ۰ & & & & ۰
\end{tikzcd}$$

درنتیجه، جمله‌های میانی، دنباله‌های دقیق کوتاه که در اینجا هم‌پوشانی دارند، به شکل یک دنباله دقیق است.

تعریف ۱۲.۱. اگر $۰ \to A \to B \to C \to ۰$ و $۰ \to A' \to B' \to C' \to ۰$ دو دنباله کوتاه دقیق از مدول ها هستند. یک هم‌ریختی از دنباله‌های کوتاه دقیق یک سه‌تایی f, g, h از همریختی مدول‌ها است بطوریکه دیاگرام زیر جابه‌جایی می‌شود:

$$\begin{tikzcd}
۰ \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & ۰ \\
۰ \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & ۰
\end{tikzcd}$$

[۲]Extension
[۳]Short Exact Sequence

اگر f,g,h همه یک‌ریختی باشند، آنگاه این یک‌ریختی از دنباله‌های کوتاه دقیق است، که B و B' گسترش‌های یک‌ریختی هستند.دو دنباله دقیق هم‌ارز هستند اگر:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\approx"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\approx"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\approx"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

تعریف ۱.۱۳. اگر $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ دنباله کوتاه دقیق ازR–مدول‌ها است. می‌گوییم دنباله می‌شکافد[۴]، اگر هم‌ارز باشد با $0 \to A \longrightarrow A \oplus C \longrightarrow C \to 0$. یک نگاشت $s : C \to B$ را یک مقطع[۵] از g می‌نامیم اگر $gos = id$. اگر s یک چنین هم‌ریختی باشد، آن‌گاه دنباله‌ی کوتاه دقیق مذکور می‌شکافد.

شکافته شدن با یکی از صورت‌های زیر هم‌ارز است:
(a) یک هم‌ریختی $p : B \to A$ وجود دارد که $pof = 1 : A \to A$.
(b) یک هم‌ریختی $s : C \to B$ وجود دارد که $gos = 1 : C \to C$.

مثال ۱.۱۴. دو دنباله دقیق می‌سازیم که هم‌ارز نباشد. بنا بر تعریف دنباله کوتاه دقیق $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$ می‌شکافد. درمقابل، دنباله $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$ نمی‌شکافد زیرا یک هم‌ریختی نابدیهی از $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ندارد. بنابراین این دو دنباله‌ی دقیق کوتاه هم‌ارز نیستند.

۱.۴ تانسور مدول‌ها

تعریف ۱.۱۵. برای حلقه جابه‌جایی R، اگر M مدول راست باشد، و N مدول چپ باشد. ضرب تانسوری $M \otimes N$ روی R یک گروه آبلی $M \times N$است به طوری که که:

$$(m_1 + m_2, n) \sim (m_1, n) + (m_2, n)$$

$$(m, n_1 + n_2) \sim (m, n_1) + (m, n_2)$$

$$(mr, n) \sim (m, rn)$$

برای هر $m, m_1, m_2 \in M$ و $r \in R$.

قضیه ۱.۱۶. اگر L, M, N مدول‌های راست باشند، وD مدول چپ باشد. اگر
$$0 \to L \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} 0$$
دقیق است،آنگاه دنباله ایجادشده از گروه‌های آبلی
$$L \otimes_R D \xrightarrow{\psi \otimes 1} M \otimes_R D \xrightarrow{\varphi \otimes 1} N \otimes_R D \to 0$$
دقیق است.

---
[۴] Split
[۵] Section

اثبات. برای نشان دادن پوشایی $\varphi \otimes ۱$، می‌دانیم که φ پوشا است. آنگاه برای تعدادی $m \in M, n = \varphi(m)$. اما $n \otimes d = \varphi(m) \otimes d = \varphi(m \otimes d) \otimes ۱$. این یعنی این که $(\varphi \otimes ۱)$ یک همریختی پوشا از $M \otimes D$ به $N \otimes D$، است، موقعی که گروه‌های آبلی هستند. برای دقیق بودن در $M \otimes_R D$، آن کافی است تا نشان دهیم $\pi : M \otimes D/Im(\psi \otimes ۱) \to N \otimes D$ یک یک‌ریختی است. برای ساختن معکوس π یک نگاشت به صورت زیر را تعریف می‌کنیم:

$$p : N \times D \to M \otimes D/Im(\psi \otimes ۱)$$

به وسیله $p(n,d) = m \otimes d$ بطوریکه $\varphi(m) = n$. اگر $\varphi(m) = \varphi(m^{'}) = n$، آنگاه $m - m^{'} = \psi(l)$ برای هر $l \in L$ باتوجه به دقیق بودن در M. این دلالت می‌کند به این که $m \otimes d - m^{'} = (m - m^{'}) \otimes \otimes d = \psi(l) \otimes d \in Im(\psi \otimes ۱)$، بنابراین p خوش‌تعریف است.زمانی که p روی هر کلاس هم‌ارزی ثابت است، p القاء می‌کند $p^{'} : N \otimes D \to M \otimes D/Im(\psi \otimes ۱)$، یک هم‌ریختی و معکوس π است. $\square$

تعریف ۱.۱۷. یک R-مدول چپ D رایکدست [۶] می‌نامیم اگر آن یکی از دو شرط معادل زیر را داشته‌باشد:

(۱) برای هر مدول راست L, M, N اگر

$$\circ \to L \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} N \to \circ$$

دقیق است، آنگاه

$$\circ \to L \otimes D \xrightarrow{\psi \otimes ۱} M \otimes D \xrightarrow{\varphi \otimes ۱} N \otimes D \to \circ$$

دقیق است.

(۲) برای هر مدول راست L, M اگر ψ یک‌به‌یک باشد،آنگاه $\psi \otimes ۱$ یک‌به‌یک است.

در نتیجه، برای هر چپ R-مدول D ، تابعگون[۷] $- \otimes D$ از رسته‌ی R-مدول‌های راست به رسته‌ی گروه‌های آبلی از راست دقیق است، این تابعگون دقیق است اگر و تنها اگر D مدولی یکدست باشد.اینجا به بیان تعدادی نتیجه می‌پردازیم:

نتیجه ۱.۱۸. (۱) برای هر R-مدول چپ D ،

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} D = D$$

(۲) برای هر $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$$

که d، ب.م.م برای m و n است.

(۳) اگر $M, M^{'}$ R-مدول راست باشند و اگر $N, N^{'}$ R-مدول چپ باشند. آنگاه یک R-یک‌ریختی کانونیک وجود دارد

$$(M \otimes M^{'}) \otimes_R N \cong (M \otimes_R N) \otimes (M^{'} \otimes N)$$

به طوری که $(m \otimes n, m^{'} \otimes n) \longmapsto (m, m^{'}) \otimes n$. بطور مشابه R-یک‌ریختی $M \otimes_R (N \otimes N^{'}) \cong (M \otimes_R N) \otimes_R N^{'}$ تعریف می‌شود.

[۶] Flat
[۷] Functor

۵.۱ مدول تصویری

اگر R یک حلقه یک‌دار باشد، و اگر $0 \to N \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} L \to 0$ یک دنباله کوتاه دقیق از R-مدول‌ها باشد. یک همریختی R-مدولی f از D به L وقتی که با ψ ترکیب شود، همان‌گونه که در نمودار زیر می‌بینیم یک همریختی R-مدولی از D به M به‌دست می‌دهد.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, dotted, "f'"] & \\ L \arrow[r, "\psi"] & M \end{tikzcd}$$

بنابراین ψ یک هم‌ریختی بین گروه‌های آبلی بصورت زیرالقاء می‌کند:

$$\psi^{'} : Hom_R(D, L) \to Hom_R(D, M)$$

$$f \to f^{'} = \psi o f$$

به طور مشابه، φ هم یک نگاشت

$$\varphi' : Hom_R(D, M) \to Hom_R(D, N)$$

القا می‌کند.

قضیه ۱۹.۱. اگر D, L, M هریک R-مدول باشند. $\psi : L \to M$، نگاشت $\psi^{'} : Hom_R(D, L) \to Hom_R(D, M)$ را القاء می‌کند. اگر $\psi : L \to M$ یک‌به‌یک باشد، آنگاه $\psi^{'}$ هم یک‌به‌یک است، به عبارت دیگر اگر $0 \to L \xrightarrow{\psi} M$ دقیق باشد، آنگاه $0 \to Hom_R(D, L) \xrightarrow{\psi^{'}} Hom_R(D, M)$ هم دقیق است.

اثبات. اگر f, g دو هم‌ریختی متمایز در $Hom_R(D, L)$ باشند. ترکیب $\psi o f, \psi o g : D \to M$ را درنظر می‌گیریم. زمانی که ψ یک‌به‌یک باشد، $\psi o f$ برای هر $f, g \in Hom_R$ متمایز، $\psi o f$ با$\psi o g$ متمایز می‌شود بنابراین یک همریختی $\psi^{'}$ القاء می‌کند که یک‌به‌یک است. □

توجه کنید که دقیق بودن در N موجب نمی‌شود که

$$Hom_R(D, M) \xrightarrow{\varphi'} Hom_R(D, N) \to 0$$

دقیق باشد. یک مثال بارز دنباله دقیق $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$ است. اگر $D = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ واگر $f \in Hom(D, N)$ یک نگاشت همانی باشد. از آن جایی که $\mathbb{Z}$ شامل هیچ عنصر از مرتبه متناهی جز صفر نیست، تنها هم‌ریختی صفر $F : D \to M$ وجود دارد. بنابراین $poF = 0 \neq f$.

قضیه ۲۰.۱. اگر D, L, M, N هر یک R-مدول باشند. و دنباله $0 \to L \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} N \to 0$ دقیق باشد، آنگاه دنباله زیر

$$0 \to Hom_R(D, L) \xrightarrow{\psi^{'}} Hom_R(D, M) \xrightarrow{\varphi^{'}} Hom_R(D, N)$$

دقیق است.

اثبات. با توجه به قضیه‌ی ۱۹.۱ تنها کافی‌است نشان داد که $im\psi' = ker\varphi'$. به دلیل $\varphi o \psi = 0$، تنها $ker\varphi \subset im\psi'$ نیاز به اثبات دارد. آن هم از آن‌جا نتیجه می‌شود که اگر $f : D \to M$ به گونه‌ای باشد که $\varphi o f = 0$ آن‌گاه باید برد f مشمول در $ker\varphi$ باشد که از طریق ψ می‌توان آن را با L یکی گرفت. □

تعریف ۲۱.۱. یک R-مدول P، تصویری[8] است اگر هر یک از شرایط هم‌ارز زیر را داشته باشد:

(۱) اگر $0 \to L \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} N \to 0$ دقیق باشد، آنگاه

$$0 \to Hom_R(P,L) \xrightarrow{\psi'} Hom_R(P,M) \xrightarrow{\varphi'} Hom_R(P,N) \to 0$$

دقیق است.

(۲) اگر $M \xrightarrow{\varphi} N \to 0$ یک دنباله دقیق از مدول‌ها باشد. برای هر $f : P \to N$ ترفیع $F \in Hom_R(P,M)$ وجود داشته‌باشد به طوری که دیاگرام زیر جابه‌جایی بشود:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dotted, "F"'] \arrow[d, "f"] & \\
M \arrow[r, "\psi"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(۳) اگر P یک تقسیم R-مدول M باشد، آنگاه هر دنباله کوتاه دقیق بصورت زیر

$$0 \to L \to M \to P \to 0$$

شکافته شود.

(۴) P جمعوند مستقیمی از یک R-مدول آزاد[9] باشد.

نتیجه ۲۲.۱. مدول‌های آزاد یکدست هستند،مدول‌های تصویری نیز یکدست هستند.

توجه کنید مدول‌های آزاد تصویری هستند. یک مدول به طور متناهی تولیدشده، تصویری است اگر و تنها اگر جمع مستقیم یک مدول آزاد به طور متناهی تولید شده‌باشد. هر مدول یک خارج‌قسمت از یک مدول تصویری است. مدول‌های تصویری را به منظور تعریف کردن گروه‌های همولوژی Tor_n^R با استفاده از تحلیل[10] تصویری تعریف کردیم.

تعریف ۲۳.۱. اگر B یک R -مدول باشد. یک تحلیل تصویری از B دنباله‌ای دقیق بصورت زیر است:

$$\cdots \to P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} 0$$

بطوریکه هر P_i یک R-مدول تصویری باشد.

۶.۱ نرم و تریس

فرض کنید k یک میدان است و A یک k-جبر ساده مرکزی از بعد متناهی از درجه‌ی n ($\sqrt{\dim_k A}$) است. می‌توان نشان داد که یک توسیع میدانی K/k موجود است به قسمی که $A \otimes_k K \cong M_n(K)$. K میدان شکافنده[11] برای A نامیده می‌شود. پس فرض کنید K چنین میدانی باشد و

$$f : A \otimes_k K \to M_n(K)$$

را یکریختی مذکور بگیرید. حال فرض کنید $a \in A$ و $p(x)$ چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس $f(a \otimes_k 1)$ باشد. می‌توان نشان داد که $p(x) \in k[x]$ است و به انتخاب میدان K و یکریختی f بستگی ندارد. $p(x)$ را چندجمله‌ای مشخصه کاهش‌یافته a می‌نامند. فرض کنید

$$Prd_A(a,x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \in k[x]$$

چندجمله‌ای مشخصه‌ی کاهش یافته‌ی $a \in A$ باشد. نرم کاهش یافته و تریس کاهش یافته را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Trd_A(a) = -\alpha_{n-1}$$

[8] Projective
[9] Free
[10] Resolution
[11] spliting field

$$Nrd_A(a) = (-۱)^n \alpha.$$

در این صورت به نگاشت $Nrd : k \to A$ می‌رسیم که همان نگاشت نرم کاهش یافته است و بر زیرگروه A^* متشکل از عناصر وارون‌پذیر A به یک همریختی گروهی $Nrd : A^* \to k^*$ تحدید می‌شود.

همچنین نگاشت تریس کاهش‌یافته را داریم که یک همریختی جمعی به صورت $Trd : A \to k$ می‌رسیم.

۲ نرم‌های کاهش‌یافته از جبرهای ساده روی میدان توابع

مطالب این بخش براساس [۱] است.

فرض کنید A یک جبر ساده مرکزی متناهی بعد روی میدان k باشد. زیرگروه جابه‌جاگرهای گروه ضربی A^*، $[A^*, A^*]$، را در نظر بگیرید. گروه $A^*/[A^*, A^*]$ را گروه وایتهد[۱۲] A می‌گوییم و با $K_۱(A)$ نمایش می‌دهیم. محاسبه‌ی $K_۱(A)$ مسئله‌ای بسیار دشوار است زیرا شامل محاسبه‌ی گروه وایتهد کاهش یافته[۱۳]، $SK_۱(A)$ است و نیز گروه نرم‌های کاهش یافته، که این گروه به وضوح از روی دنباله‌ی دقیق $۱ \to SK_۱(A) \to K_۱(A) \to Nrd(A^*) \to ۱$ با استفاده از هomomorفیسم نرم کاهش یافته Nrd، بدست می‌آید:

$$SK_۱(A) = SL(۱, A)/[A^*, A^*]$$

که در آن $SL(۱, A)$، هسته‌ی Nrd است.

مسئله‌ی تاناکا-آرتین[۱۴] مبنی بر بدیهی بودن گروه $SK_۱(A)$ که برای مدت طولانی بدون پاسخ بود، در سال ۱۹۷۵ توسط پلاتونو[۱۵] نقض شد. پلاتونو در کارهایش به صورت کمی رفتار گروه وایتهد کاهش یافته را بررسی کرد. غالب نتایجی که بدست آورد روی جبرهای سراسری[۱۶] و میدان‌های هنسل[۱۷] بود.

در مورد نرم‌های کاهش یافته از درجه دلخواه مطلب زیادی نمی‌دانیم و اغلب مطالب در مورد میدان‌های موضعی و سراسری است. در مجموع نتایجی مربوط به ساسلین است. او تمام میدان‌هایی را توصیف کرد که برای تمام جبرهای مرکزی روی آن‌ها و روی توسیع های متناهی از آن‌ها، نرم کاهش یافته پوشاست. جبرهای از درجه مربع روی میدان دلخواه، جایگاه ویژه‌ای دارند. در ۱۹۵۰ ونگ[۱۸] نشان داد در این حالت خاص $SK_۱(A) = ۱$. از طرف دیگر مرکوری[۱۹] و ساسلین توصیفی کوهمولوژی از گروه $Nrd(A^*)$ بدست آوردند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در این حالت گروه $K_۱(A)$ محاسبه شده است.

هدف این مقاله توصیف نرم‌های کاهش یافته در حلقه‌های تقسیم از توابع گویای ناجابه‌جایی است که از آن برای محاسبه‌ی $K_۱(A)$ برای جبر دلخواه A از درجه دلخواه روی میدان دلخواه k استفاده می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم محاسبه‌ی $K_۱(A)$، معادل است با محاسبه برای حالت‌هایی که درجه عددی اول است.

مطالبی که در ادامه می‌آید برای توسیع میدانی T/R است و $N_{T/R}$ نرم مربوطه است.

لم ۱.۲. فرض کنید A یک حلقه‌ی تقسیم از درجه n باشد و F/k توسیع متناهی باشد به طوری که $(n, [F : k]) = ۱$. در این صورت برای هر $\alpha \in K^* \cap Nrd((A \otimes_k F)^*)$ داریم $\alpha^{[F:k]} \in Nrd(A^*)$.

اثبات. بدون کاسته شدن از کلیت می‌توانیم فرض کنیم توسیع F/K جدایی‌پذیر است. فرض کنید $a \in A \otimes_k F$ و $Nrd(a) = \alpha$. در حالتی که $a \in F$ باشد، حکم بدیهی است. فرض کنید درجه‌ی چندجمله‌ای مینیمال a روی F، $f_F(x)$ برابر $e > ۱$ باشد. زیرمیدان ماکسیمال L از $A \otimes_k F$ که شامل است و با ضریب ثابت β از $f_F(x)$. چون $Nrd(a) = N_{L/F}(a)$، بنابراین برای $[L : F] = et$ داریم $\alpha = (-۱)^{et}\beta^t$. با استفاده از ضرایب $f_F(x)$ توسیع E/k را بسازید و چندجمله‌ای $f(x) = f_F^{\sigma_۱}(x) \cdots f_F^{\sigma_c}(x)$ را درنظر بگیرید که در آن $\sigma_۱ \dots \sigma_c$ نشاندن‌های مجزا از E روی k در بستار جبری‌اش است و

[۱۲] Whitehead group
[۱۳] Reduced Whitehead group
[۱۴] Tanaka-Artin
[۱۵] Platonov
[۱۶] global
[۱۷] Henselian
[۱۸] Wang
[۱۹] Merkurev

$c=[E:k]$ و چندجمله‌ای $f_F^{\sigma_i}(x)$ با جایگزین کردن ضرایب $f_F(x)$ تحت اثر σ_i بدست آمده‌است. بنابراین $f(x)$ چندجمله‌ای مینیمال a روی k است.

نشان می‌دهیم $N_{L/k(a)}(a)=\alpha^{[F:k]}$. در واقع در یک طرف داریم $[L:k]=et[F:k]$ و در طرف دیگر داریم $k\subset k(a)\subset F(a)\subset L$ که در آن به تحلیل $[k(a):k]=ce$ و $[L:F(a)]=t$ برقرار است که نتیجه می‌دهد

$$[F(a):k(a)]=[F:k]c^{-1}$$

بعلاوه بخش ثابت $f(x)$ برابر است با $\beta_F^{\sigma_1}\cdots\beta_F^{\sigma_c}$، بنابراین $N_{k(a)/k}(\alpha)=\prod_{i=1}^{c}((-1)^e\beta^{\sigma_i})$، پس داریم:

$$N_{L/k}(\alpha)=(N_{k(a)/k}(a)^t)^{[F:k]c^{-1}}=(\alpha^c)^{[F:k]c^{-1}}=\alpha^{[F:k]}$$

چون L میدان شکافنده برای A است، $\alpha^{[F:k]}\in Nrd(A^*)$.

□

در ادامه محاسبه نرم کاهش یافته را به حلقه‌های تقسیم از درجه اعداد اول کاهش می‌دهیم.

گزاره ۲.۲. فرض کنید $A=A_1\otimes_k\cdots\otimes_k A_r$ باشد به طوری که هر A_i حلقه‌ی تقسیمی از درجه $p_i^{\alpha_i}$ است و p_iها اعداد اول متمایزند. در این صورت $Nrd(A^*)=\cap_{i=1}^{r}Nrd(A_i^*)$.

اثبات. فرض کنید $F_1,\ldots,F_r$ زیرمیدان‌های ماکسیمال متناظر با $A_1,\ldots,A_r$ باشد. فرض کنید L_i کوچکترین میدان روی k شامل $F_1,\ldots,F_{i-1},F_{i+1},\ldots,F_r$ باشد. اگر $\alpha\in Nrd(A^*)$، آنگاه $\alpha\in Nrd(A\otimes_k L_i)$ بنابراین

$$\alpha\in Nrd(A_i\otimes_k L_i)$$

. بنا به لم ۱.۲، $\alpha^{[L_i:k]}\in Nrd(A_i^*)$. اول بودن $[L_i:k]$ها نسبت به هم و p_iها نسبت به هم نتیجه می‌دهد $\alpha\in Nrd(A_i^*)$. برعکس، اگر $\alpha\in\cap_{i=1}^{r}Nrd(A_i^*)$ آنگاه $\alpha^{[L_i:k]}\in Nrd(A^*)$. حال از آنجایی که بزرگترین عامل مشترک $[L_i:k]$ها برابر ۱ است پس $\alpha\in Nrd(A^*)$. □

نتیجه‌ی زیر یکی دیگر از نتایج سودمند لم فوق است.

نتیجه ۳.۲. با نمادگذاری لم ۱.۲ داریم $Nrd(A^*)=k^*\cap Nrd((A\otimes_k F)^*)$.

اثبات. واضح است که برای $\alpha\in k^*$ داریم $\alpha^n\in Nrd(A^*)$، که در آن n درجه A است. حال بنابر لم ۱.۲ از

$$\alpha\in k^*\cap Nrd((A\otimes_k F)^*)$$

نتیجه می‌شود $\alpha^{[F:k]}\in Nrd(A^*)$. برای عکس هم که واضح است. □

ملاحظه ۴.۲. به صورت مکرر از این خاصیت معروف استفاده خواهیم‌کرد: اگر $a\in A$، آنگاه $a^n\in Nrd(a)[A^*,A^*]$، که در آن n درجه A است.

حال نشان می‌دهیم محاسبه‌ی $K_1(A)$ به محاسبه‌ی مولفه‌های اول گروه وایتهد وابسته است.

گزاره ۵.۲. با نمادگذاری گزاره ۲.۲، دنباله‌ی دقیق

$$1\to(k^*)^{(r-1)}\to K_1(A_1)\times\cdots\times K_1(A_r)\to K_1(A)\to 1$$

وجود دارد که در آن $(k^*)^{(r-1)}$، ضرب مستقیم $r-1$ کپی از k^* است.

اثبات. هومومورفیسم زیر را در نظر بگیرید:

$$f:K_1(A_1)\times\cdots\times K_1(A_r)\to K_1(A)$$

$$f(a_1[A_1^*,A_1^*],\ldots,a_r[A_r^*,A_r^*])=a_1\ldots a_r[A^*,A^*]$$

که در آن $a_i\in A_i$، $i=1,\ldots,r$. فرض کنید $a\in A^*$ بنابراین، بنابه گزاره ۲.۲ داریم $a=bc$ که $b\in A$ و $Nrd(c)=1$.

حال f پوشاست چون می‌دانیم محدود کردن f به زیرگروه $T=SK_1(A_1)\times\cdots\times SK_1(A_r)$ یک یکریختی بین T و $SK_1(A)$ بدست می‌دهد. بعلاوه $A=A_1\otimes_k B$، که $B=A_2\otimes_k\cdots\otimes_k A_r$.

فرض می‌کنیم $a \in A_1$ و $a \notin [A_1^*, A_1^*]$. بعلاوه $b \in B$ به گونه‌ای است که $ab \in [A^*, A^*]$. درجه A_1 را n و درجه B را m بگیرید. در این صورت $(ab)^m \in [A^*, A^*]$. چون $b^m \in Nrd_B(b)[A^*, A^*]$، داریم $a^m \in Nrd_B(b)[A^*, A^*]$. همچنین چون $a^n \in Nrd_{A_1}(a)[A^*, A^*]$ نتیجه می‌شود $\alpha \in k^*$ وجود دارد که $a \in \alpha[A^*, A^*]$. حال به سادگی می‌توان دید که هسته‌ی f شامل اعضایی به شکل $(a_1[A^*, A^*], \dots, a_r[A^*, A^*])$ است که $a_i \in k^*$ و $a_1 \dots a_r \in k^* \cap [A^*, A^*]$.

اگر $\mu \in k^* \cap [A^*, A^*]$، آنگاه μ ریشه‌ی واحد از درجه‌ای است که درجه A را عاد می‌کند. داریم $\mu = \mu_1 \dots \mu_r$ که $\mu_i \in k^*$ ریشه واحد از درجه‌ای است که درجه A_i را عاد می‌کند. نشان می‌دهیم $\mu_i \in k^* \cap [A_i^*, A_i^*]$. در واقع اگر $\mu_i \notin k^* \cap [A_i^*, A_i^*]$ در این صورت $\mu \notin k^* \cap [A^*, A^*]$، زیرا یکریختی $SK_1(A) \cong SK_1(A_1) \times \cdots \times SK_1(A_r)$ و اول بودن p_iها را داریم.

با توجه به مطالب فوق می‌توانیم فرض کنیم $a_1, \dots, a_r$ در خاصیت $a_1 \dots a_r = 1$ صدق می‌کنند. هومورفیسم زیر را در نظر بگیرید:

$$g : k^{*(r)} \to K_1(A_1) \times \cdots \times K_1(A_r)$$

$$g(k_1, \dots, k_r) = (k_1[A_1^*, A_1^*], \dots, k_r[A_r^*, A_r^*])$$

واضح است که هسته‌ی g برابر است با گروه $(k^* \cap [A_1^*, A_1^*]) \times \cdots \times (k^* \cap [A_r^*, A_r^*])$. تحدید g به زیرگروه $G \subset k^{*(r)}$ که با ویژگی $k_1 k_2 \dots k_r = 1$ تعریف می‌شود، دارای این خاصیت خواهدبود که، $g(G)$ هسته‌ی f است و $G \cap Ker(g) = \{1\}$. بنابراین گروه G با هسته‌ی f یک‌ریخت است. بدیهی است که $G \cong k^{*(r-1)}$. $\square$

حال فرض کنید A یک حلقه‌ی تقسیم مرکزی روی $Z(A)$ با خودریختی ϕ از مرتبه بیرونی متناهی r است. در این حالت خوش‌تعریف است که بگوییم حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های ناجابه‌جایی، $A[X, \phi]$، حلقه‌ی تقسیم کسرهای $A(X, \phi)$ است که مرکز آن مشابه $k(y^{-1}x^r)$ است که k میدانی است که تحت اثر ϕ در $Z(A)$ ثابت است، $y^\phi = y \in A^*$، و ϕ^r خودریختی درونی A، تولید شده توسط y است. مجموعه‌ی $x = y^{-1}X^r$ را درنظر بگیرید. در این صورت $[A(X, \phi) : k(x)] = n^2 = [A : Z(A)]r$.

اگر $P = P_1 \dots P_s$ و $Q = Q_1 \dots Q_s$ تجزیه‌ی P و Q به چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر در $A[X, \phi]$ باشد و تناظری یک به یک و پوشا بین $\{P_1, \dots, P_s\}$ و $\{Q_1, \dots, Q_s\}$ برقرار باشد می‌نویسیم $P \approx Q$ یا معادلا از $\sim$ استفاده می‌کنیم.

در ادامه به لم زیر نیاز خواهیم‌داشت.

لم ۶.۲. فرض کنید $P \in A[X, \phi]$ باشد در این صورت $Nrd(P) \in k[x]$. اگر $P = 1 + XQ$ که $Q \in A[X, \phi]$ آنگاه $Nrd(P) = 1 + xq$ که $q \in k[x]$.

اثبات. فرض کنید $a_1 = 1, a_2, \dots, a_m$ یک پایه برای A روی k باشد و T پایه‌ی $\{a_i X^j\}$ برای $A(X, \phi)$ روی $k(x)$ باشد که $i = 1, \dots, m$ و $j = 0, \dots, r-1$. اگر μ نمایش منظم حلقه‌ی تقسیم $A(X, \phi)$ روی $k(x)$ باشد، آنگاه $\mu(P)$ ماتریسی است که درایه‌های آن چندجمله‌ای‌ها هستند. بنابراین $\det \mu(P)$ چندجمله‌ای است. از آنجایی که $\det \mu(P) = Nrd(P)^n$ و $k[x]$ به درستی در $k(x)$ بسته است می‌توانیم نتیجه بگیریم $Nrd(P) \in k[x]$.

برای حالت $P = 1 + XQ$، کافی است که حلقه‌ی تقسیم $A(X, \phi) \otimes_{k(x)} k(x)_x$ را درنظر بگیریم. $\square$

لم ۷.۲. اگر $a \in [A(X, \phi)^*, A(X, \phi)^*]$ و $a = P\lambda^{-1}$ که $P \in A[X, \phi]$ و $\lambda \in k[x]$، آنگاه $P \approx \lambda$.

نتیجه ۸.۲. اگر $P = Qa$، که $a \in [A(X, \phi)^*, A(X, \phi)^*]$ و $P, Q \in A[X, \phi]$، آنگاه $P \approx Q$.

لم ۹.۲. فرض کنید $g = P_1 \dots P_r$ تجزیه‌ی چندجمله‌ای $g \in k[x]$ به حاصلضرب چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر در $A[X, \phi]$ باشد. اگر $Q \sim Q_i$، در این صورت چندجمله‌ای R وجود دارد به طوری که $g = QR = RQ$.

اثبات. قرار دهید $g = EP_iB$ که در آن $E, B \in A[X, \phi]$، و از تقسیم g بر P_i داریم $g = P_iM + T$. اگر $T \neq 0$ باشد در این صورت از ضرب E در تساوی‌ها بدست می‌آید، $gE = EP_iBE$ و $Eg = EP_iM + ET$، بنابراین داریم $EP_iBE = EP_iM + ET$. بنابراین EP_i عامل ET است، اما این درست نیست زیرا درجه‌ی ET از درجه‌ی EP_i کمتر است و این نتیجه می‌دهد $g = P_iM$.

با استفاده از $Q \sim P_i$ نتیجه می‌شود چندجمله‌ای‌های u و v با درجه‌ی کمتر از Q وجود دارد که $uP_i = Qv$. حال g را بر Q تقسیم می‌کنیم، داریم $g = QR + T$. اگر $T \neq 0$ باشد، در این صورت داریم $gu = uP_iM = QvM$. به عبارت دیگر

$Q(vM-Ru)=Tu$، بنابراین تجزیه‌ی Tu به چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر شامل عاملی مشابه Q است. اما درجه‌ی T و u از Q کمتر است که تناقض است پس $g=QR$. حال چون g در $A(X,\phi)$ مرکزی است، پس $g=RQ$. □

نتیجه ۱۰.۲. اگر $P\in A[x,\phi]$، در این صورت $P\mid Nrd(P)$.

اثبات. فرض کنید $P=P_1\dots P_s$، که P_iها در $A[X,\phi]$ تحویل‌ناپذیرند. با توجه به ملاحظه ۴.۲، $P_i^n=Nrd(P_i)a_i$ با $a_i\in[A(X,\phi)^*,A(X,\phi)^*]$. بنابر نتیجه‌ی ۸.۲، $P_i^n\approx Nrd(P_i)$. اگر از لم ۹.۲ استفاده کنیم، بدست می‌آید $Nrd(P_i)=P_iQ_i$، که $Q_i\in A[X,\phi]$. بنابراین $Nrd(P_i)=PQ_s\dots P_1$. □

لم ۱۱.۲. فرض کنید $f=P_1\dots P_s$ تجزیه‌ی چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر $f\in k[x]$ به چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر در $A[X,\phi]$ باشد. در این صورت $P_1\sim P_2\sim\dots\sim P_s$ و برای هر $Q\sim P_i$ داریم $Nrd(Q)=af^{n/s}, a\in k^*$.

اثبات. واضح است که $f^n=Nrd(P_1)\cdots Nrd(P_s)$، بنابراین $Nrd(P_i)=af^{n_i}$، در نتیجه $P_i^n=a_if^{n_i}b_i$ که $b_i\in[A(X,\phi)^*,A(X,\phi)^*]$. بنابر نتیجه ۸.۲، $P_i^n\approx f^{n_i}$ پس $P_1\sim\dots\sim P_s$، و این تطابق n_iها و تساوی $n_i=ns^{-1}$ را نتیجه می‌دهد. حال اگر از لم ۹.۲ استفاده کنیم، حکم نتیجه می‌شود. □

لم ۱۲.۲. $A[X,\phi]$ از مرتبه‌ی ماکسیمال روی $k[x]$ است.

اثبات. فرض کنید $\{a_1=1,a_2,\dots,a_m\}$ یک پایه برای A روی k باشد. در این صورت مجموعه‌ی $M=\{a_iX^j\}$ که $i=1,\dots,m$ و $j=0,\dots,r-1$، یک پایه برای $A(X,\phi)$ روی $k(x)$ است. به علاوه نشان می‌دهیم هر چندجمله‌ای $P\in A[X,\phi]$ روی حلقه‌ی $k[x]$ صحیح است. در واقع به سادگی می‌توان دید که P ترکیب خطی از اعضای پایه‌ی M با ضرایب در $k[x]$ است. از آنجایی که ساختار ثابت‌ها در جبر $A(X,\phi)$ نسبت به پایه‌ی M در $k[x]$ قرار دارد، نمایش منظم چندجمله‌ای P ماتریسی با درایه‌های در $k[x]$ است. چندجمله‌ای مشخصه‌ی این ماتریس ضرایبی در $k[x]$ دارد و این با استفاده از قضیه‌ی کیلی-همیلتون[20] نتیجه می‌دهد P روی $k[x]$ صحیح است. بنابراین حلقه‌ی $A[X,\phi]$ مرتبه‌ای در $A(X,\phi)$ روی $k[x]$ دارد.

حال نشان می‌دهیم این مرتبه ماکسیمال است. فرض خلف می‌کنیم. فرض کنید L مرتبه‌ی ماکسیمال در $A(X,\phi)$ روی $k[x]$ دارد که اکیدا شامل $A[X,\phi]$ است. بنابراین L عضوی مانند PQ^{-1} دارد ($P,Q\in A[X,\phi]$) که یک چندجمله‌ای نیست. فرض کنید $P=TQ+R$ که R باقی‌مانده تقسیم از راست P بر Q است. چون PQ^{-1} چندجمله‌ای نیست پس $R\neq 0$. بدیهی است که $RQ^{-1}\in L$. به علاوه درجه‌ی R اکیدا از درجه‌ی Q کمتر است پس درجه‌ی چندجمله‌ای $Nrd(R)$ (نسبت به x) اکیدا از درجه‌ی چندجمله‌ای $Nrd(Q)$ کمتر است. بنابراین $Nrd(RQ^{-1})\notin k[x]$. از آنجایی که $PQ^{-1}\in L$، پس روی $k[x]$ صحیح است. با استفاده از نتیجه‌ی لم گاوس[21]، بخش ثابت چندجمله‌ای مینیمال PQ^{-1} روی $k(x)$ باید در $k[x]$ باشد. حال از آنجایی که $Nrd(RQ^{-1})$ متناسب است با توانی از ۱- در یک ثابت، داریم $Nrd(PQ^{-1})\in k[x]$. اما نشان دادیم که این درست نیست پس $A[X,\phi]$ از مرتبه‌ی ماکسیمال در $A(X,\phi)$ روی $k[x]$ است. □

حال فرض کنید f چندجمله‌ای تکین تحویل‌ناپذیر در $k[x]$ باشد. نماد $k(x)_f$ را برای میدان کامل حاصل از $k(x)$ در نقطه‌ی متناظر با f در نظر می‌گیریم و $O_{<f>}$ را حلقه در این نقطه.

لم ۱۳.۲. $O_{<f>}\mathrm{span}L_{<f>}$ در حلقه‌ی $A[X,\phi]$ دارای مرتبه‌ی ماکسیمال در جبر

$$A(X,\phi)\otimes_{k(x)}k(x)_f$$

روی $O_{<f>}$ می‌باشد.

اثبات. به کمک لم ۱۲.۲ حاصل می‌شود. □

لم ۱۴.۲. دو $A[X,\phi]$-مدول چپ $A[X,\phi]/fA[X,\phi]$ و $L_{<f>}/fL_{<f>}$ یکریختند.

فرض کنید $M_m(D_f)$ جبر ماتریس‌های از درجه‌ی $m\geq 1$ روی حلقه‌ی تقسیم D_f باشد و داشته‌باشیم $A(X,\phi)\otimes_{k(x)}k(x)_f\cong M_m(D_f)$. فرض کنید $\bar{D_f},\bar{k(x)}_f$ به ترتیب حلقه‌های تقسیم کاهش‌یافته‌ی D_f و $k(x)_f$ باشند. قرار دهید $t=[\bar{D_f},\bar{k(x)}_f]$ و $i(f)=\sqrt{e^{-1}t}$، که در آن e درجه انشعابی D_f روی $k(x)_f$ است.

[20] Hamilton-Cauley
[21] Gauss's lemma

لم ۱۵.۲. فرض کنید $aP_1^{\alpha_1}\dots P_s^{\alpha_s} \in Nrd(A(X,\phi))$ که $a \in k^*$ و $P_j(j = 1,\dots,s)$ چندجمله‌ای‌های تکین تحویل‌ناپذیر مجزا در $k[x]$ باشند. در این صورت $i(P_j)$ مقسوم‌علیه α_j است.

اثبات. فرض کنید s_f و e_f به ترتیب درجه و درجه انشعابی D_f روی $k(x)_f$ باشند. برای هر زیرمیدان ماکسیمال L از D_f درجه انشعابی L روی $k(x)_f$ درجه e_f را می‌شمارد و زیرمیدان ماکسیمالی وجود دارد که درجه آن e_f است. بنابراین $N_{L/k(x)_f}(L^*) \subset \langle f^{s_f e_f^{-1}} \rangle U_f$ که U_f گروه یکال‌های حلقه‌ی $O_{<f>}$ است و $\langle f^{s_f e_f^{-1}} \rangle$ گروه دوری تولید شده توسط $f^{s_f e_f^{-1}}$ است. بنابراین $N(D_f) \subset \langle f^{s_f e_f^{-1}} \rangle U_f$. با توجه به $Nrd(A(X,\phi)) \subset Nrd(D_f)$، همه چیز ثابت شده‌است. $\square$

برای هر B–مدول M، $\lambda_B(M)$ را طول سری ترکیبی آن در نظر می‌گیریم.

لم ۱۶.۲. فرض کنید P چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر باشد که f را عاد می‌کند. در این صورت $Nrd(P) = \alpha f^{i(f)}$ که $\alpha \in k$.

اثبات. بنا به لم ۱۱.۲ کافی است نشان دهیم تجزیه‌ی f به عامل‌های تحویل‌ناپذیر وجود دارد که طولی برابر $n.i(f)^{-1}$ دارد. می‌دانیم آخرین عدد مطابق است با

$$\mu = \lambda_{A[X,\phi]}(A[X,\phi]/fA[X,\phi])$$

. با توجه به لم ۱۴.۲، $\mu = \lambda_{A[X,\phi]}(L_{<f>}/fL_{<f>})$ و $ni(f)^{-1}$، و آخرین عدد حداقل $\lambda_{L_{<f>}}(L_{<f>}/fL_{<f>})$ و حداکثر $ni(f)^{-1}$ است. حال چون $L_{<f>}$ از مرتبه‌ی ماکسیمال است، $L_{<f>} \cong M_m(O_{D_f})$ که O_{D_f} ارزش[22] حلقه‌ی D_f است. بنابراین

$$L_{<f>}/fL_{<f>} \cong M_m(O_{D_f})/fM_m(O_{D_f}) \cong M_m(O_{D_f}/fO_{D_f})$$

حال به راحتی دیده‌می‌شود که طول سری ترکیبی آخرین مدول برابر است با $ni(f)^{-1}$. $\square$

درجه‌ی چندجمله‌ای f در $k[x]$ را با $\deg f$ نشان می‌دهیم.

لم ۱۷.۲. فرض کنید P چندجمله‌ای تکین تحویل‌ناپذیر در $A[X,\phi]$ باشد. در این صورت برای هر چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر $f \in k[x]$ داریم

$$Nrd(P) = (-1)^{(r+1)i(f)\det f} N_{k(y)/k}(y)^{i(f)\deg f[k(y):k]^{-1}} f^{i(f)}$$

اثبات. فرض کنید $\alpha f_1^{u_1 i(f_1)} \dots f_s^{u_s i(f_s)}$ تجزیه‌ی $Nrd(P)$ به عامل‌های اول مجزا باشد. بنا به لم ۱۶.۲ چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر P_j وجود دارد به طوری که $Nrd(P_j) = \alpha_j f_j^{i(f_j)}$. بعلاوه $\beta \in k$ وجود دارد با این ویژگی که $\beta Nrd(P) = Nrd(P_1^{u_1}\dots P_s^{u_s})$. با اثر دادن ملاحظه‌ی ۴.۲ و نتیجه‌ی ۸.۲ در تساوی فوق بدست می‌آید $P \sim P_1 \sim \dots \sim P_s$ بنابراین $s = 1$ و $u_1 = 1$. حال قرار دهید $P = (1 + a_{e-1}X^{-1} + \dots + a_0 X^{-e})X^e$ که در آن $a_i \in A$. بنابراین $Nrd(P) = Nrd(1+a_{e-1}X^{-1}+\dots+a_0X^{-e})Nrd(X^e)$. متغیر X^{-1} را بگیرید و لم ۶.۲ را استفاده کنید، خواهیم‌داشت $Nrd(1 + a_{e-1}X^{-1} + \dots + a_0X^{-e}) = 1 + x^{-1}q(x^{-1})$. این نتیجه می‌دهد که ضریب پیش‌رو $Nrd(P)$ توان eام ضریب پیش‌رو در $Nrd(X)$ است.

برای کامل شدن اثبات کافی است درجات را نسبت به X به کمک تساوی $e = i(f)\deg f.r.n^{-1}$ مقایسه کنیم. بدست می‌آید:

$$Nrd(X) = (-1)^{n(r+1)r^{-1}} N_{k(y)/k}(y)^{nr^{-1}[k(y):k]^{-1}} x^{nr^{-1}}$$

$\square$

قضیه ۱۸.۲. بگیرید:

$$T = \cup_f (-1)^{(r+1)i(f)\deg f} N_{k(y)/k}(y)^{i(f)\deg f[k(y):k]^{-1}} f^{i(f)}$$

که اجتماع روی تمام چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر f است. بگیرید

$$G = N_{Z(A)/k}(Nrd_A(A^*))$$

و فرض کنید E منوید تولید شده توسط T، G و مجموعه‌ی $(k[x]/fk[x])^{-n}$ باشد. در این صورت $Nrd(L_f) = E \cup \{0\}$ و $Nrd(A(X,\phi)^*)$ زیرگروه تولید شده توسط T و G است. ($L_f = L_{<f>} \cap A(X,\phi)$)

[22] valuation

اثبات. به سادگی می‌توان دید که مجموعه‌ی $k[x]^n$ در $E \cup \{0\}$ قرار دارد. حال حکم برای هر تجزیه چندجمله‌ای دلخواه P به اعضای A که چندجمله‌ای‌هایی تکین و تحویل‌ناپذیرند در $A[X, \phi]$ برقرار است. مطلب فوق از لم ۱۷.۲ نتیجه می‌شود. □

حال فرض کنید B حلقه‌ی تقسیم مرکزی روی k از درجه n شامل A باشد به طوری که

$$D = A + At + \cdots + At^{r-1}$$

که $i_t\,|_A = \phi$ و $t^r = y$. در این صورت $X^r - y$ چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر در $A[X, \phi]$ است. در واقع اگر این چنین نباشد پس $X^r - y = f_1 f_2$ است که درجه چندجمله‌ای‌ها کمتر از r است. دو طرف تساوی فوق را در $X = t$ حساب کنید بدست می‌آید $f_1(t)f_2(t) = 0$، اما $f_1(t)$ و $f_2(t)$ هیچکدام در D صفر نمی‌شوند. بنابراین $X^r - y$ تحویل‌ناپذیر است. به علاوه از آنجایی که $X^r - y = y(x-1)$، ایده‌آل $(X^r - y)A[X, \phi]$ دوطرفه است. بنابراین

$$A[X, \phi]/(x-1)A[X, \phi] \cong D$$

برای زیرمجموعه‌ی $S \subset A[X, \phi]$، $\bar{S}$ را مجموعه‌ی تصویر تمام اعضای S تحت هم‌ریختی که توسط چندجمله‌ای ارزیابی در $X = t$ از $A[X, \phi]$ به D حاصل می‌شود، درنظر می‌گیریم.

لم ۱۹.۲. فرض کنید k/M توسیعی جدایی‌پذیر باشد. در این صورت برای هر $P \in A[X, \phi]$ داریم

$$N_{k/M}(Nrd(\bar{P})) = \overline{N_{k(x)/M(x)}(Nrd(P))}$$

اثبات. از آنجایی که $A(X, \phi) \otimes_{k(x)} k(x)_{x-1}$ یک حلقه‌ی تقسیم بدون انشعاب است و نرم کاهش یافته با توسیع‌های مرکز تغییر نمی‌کند بنابراین $\overline{N_{k(x)/M(x)}(P)} = N_{k/M}(\bar{P})$. مشابها برای $P \in k[x]$ بدست می‌آید $Nrd(\bar{P}) = \overline{Nrd(P)}$. □

نتیجه ۲۰.۲. با نمادگذاری لم قبلی داریم:

$$N_{k/M}(Nrd(D)) = \overline{N_{k(x)/M(x)}(Nrd(A[X, \phi]))}$$

اثبات. فرض کنید $\alpha \in N_{k/M}(Nrd(D))$. عنصر $d \in D$ وجود دارد به طوری که $\alpha \in N_{k/M}(Nrd(d))$. اگر a تصویر وارون d در $A[X, \phi]$ باشد در این صورت دیده‌می‌شود که $\alpha \in \overline{N_{k(x)/M(x)}(Nrd(a))}$. بنابراین یک طرف برقرار می‌شود. شمول قسمت دوم از لم ۱۹.۲ نتیجه می‌شود. □

اگر D حلقه‌ی تقسیم با مرکز k از درجه p^m ($p^m \neq 2$ و p اول است) شامل زیرمیدان ماکسیمال L باشد و زنجیر

$$k = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_m = L$$

را داشته باشیم که هر کدام از توسیع‌ها دوری از درجه‌ی p است. مرکزساز L_j در D را با A_j نشان می‌دهیم و ϕ_j خودریختی از A_j است که تحدید آن به L_j مولد گروه گالوای توسیع L_j/L_{j-1} خواهد بود. فرض کنید $y_j \in A_j$ و ϕ_j^p خودریختی درونی حاصل از y_j باشد و $y_j^{\phi_j} = y_j$. در این صورت $A_j(X_j, \phi_j)$ متناظر است با حلقه‌ی تقسیم توابع گویای ناجابه‌جایی. برای چندجمله‌ای تکین و تحویل‌ناپذیر دلخواه $f \in k[x]$، $L_j(f)$ مجموعه‌ی تمام چندجمله‌ای‌های تکین تحویل‌ناپذیر در $L_{j-1}[x]$ است به طوری که $N_{L_{j-1}(x)/k(x)}(l) = f^{\mu_j(l)}$ برای $l \in L_j(f)$. همچنین مجموعه‌ی $N(f) = \cup_{j=1}^m N_j(f)$ را داریم که در آن

$$N_j(f) = \cup_{l \in L_j(f)} N_{L_j(y_j)/k}(y_j)^{i(l).\deg l.[L_j(y_j):L_j]^{-1}}.f^{i(l)\mu_j(l)}$$

و $N(f(1))$ مجموعه‌ی مقدارهای اعضای $N(f)$ در $x = 1$ است.

قضیه ۲۱.۲. بگیرید $D(N) = \cup_{f \neq x-1} N(f(1))$. در این صورت $Nrd(D^*)$ منوید تولید شده توسط $D(N)$ و $N_{L/k}(L^*)$ است.

اثبات. فرض کنید T_i مجموعه‌ای برای $A_i(X_i, \phi_i)$ مشابه T که در قضیه‌ی ۱۸.۲ بیان کردیم باشد. با استفاده از قضیه‌ی ۱۸.۲ و لم ۱۷.۲ و نتیجه‌ی ۲۰.۲ داریم:

$$Nrd(D) = \bar{T}_1 \times \overline{N_{L_1(x_2)/k(x_2)}(T_2)} \cdots \overline{N_{L_{m-1}(x_m)/k(x_m)}(T_m)} N_{L_m/k}(L)$$

که بار به معنای ارزش چندجمله‌ای در ۱ است. این نشان می‌دهد که توان (-1) را در تعریف T_i می‌توانیم حذف کنیم. اما مشاهده می‌شود که هنگامی که p فرد است و هنگامی که $p = 2$ این توان به شکل توانی از $(-1)^{2^m(2^m+1)2^{-1}}$ است که برای $m > 1$ برابر ۱ است. □

می‌دانیم برای حلقه‌ی تقسیم D از درجه عدد اول همواره توسیع F از k با درجه‌ی عدد اول p وجود دارد به طوری که حلقه‌ی تقسیم $D \otimes_k F$ دارای زنجیر $F = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_m = L$ است که هر توسیع دوری از درجه‌ی p است و زیرمیدان ماکسیمال L است. حال با استفاده از قضیه‌ی ۱۸.۲ و گزاره‌ی ۲.۲ و نتیجه‌ی ۳.۲، نرم کاهش‌یافته را برای حلقه‌ی تقسیم دلخواه A محاسبه می‌کنیم.

فرض کنید D یک حلقه‌ی تقسیم مرکزی روی k از درجه p^m باشد (p اول) که دارای زیرمیدان Z از درجه‌ی p روی k است.
فرض کنید A مرکزساز Z در D و ϕ خودریختی از A باشد که روی Z، مولد گروه گالوای Z روی k باشد.
روی $A(X,\phi)$ بگیرید $L_{x-1} = L_{<x-1>} \cap A(X,\phi)$. حال تعریف کنید L^* گروه یکال‌های در L_{x-1} و

$$E = 1 + (x-1)L_{x-1}$$

$$L' = [L^*, L^*]$$

$$H = \{h \in L^* \mid Nrd(h) \in E\}$$

$$A' = [A(X,\phi)^*, A(X,\phi)^*]$$

$$S = SL(1, A(X,\phi))$$

$$N = (EL' \cap S)/L'$$

گزاره‌ی زیر محاسبه‌ی $SK_1(D)$ را به محاسبه‌ی گروه‌های وابسته با میدان $A(X,\phi)$ تبدیل می‌کند.

قضیه ۲۲.۲. دنباله‌ی دقیق زیر وجود دارد:

$$1 \to SK_1(A(X,\phi))/N \to SK_1(D) \to (Nrd(L^*) \cap E)/Nrd(E) \to 1$$

اثبات. از آنجایی که $x-1$ در $A[X,\phi]$ تحویل‌ناپذیر و مرکزی است، $A' = L'$. بعلاوه $L' = [D^*, D^*]$. بنابراین

$$SK_1(D) \cong \bar{H}/\bar{A}' \cong (H/E)(EA'/E) \cong H/EA'$$

زیرگروه $B = SE/EA'$ از گروه H/EA' را در نظر بگیرید. در این صورت

$$B \cong S/(S \cap EA') \cong SK_1(A(X,\phi))/N$$

بگیرید $G = H/ES$، داریم:

$$G \cong (HS)/(ES/S) \cong (Nrd(L^*) \cap E)/Nrd(E)$$

□

ملاحظه ۲۳.۲. $SK_1(A(X,\phi))$ محاسبه شده‌است.

مراجع

[1] V. I. Yanchevskii, *Reduced Norms of Simple Algebras Over Function Fields*, proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Issue 4, 1991.

[2] P. K. Draxl, *Skew Fields*. Cambridge University Press, 1983.

[3] Rowen Louis Halle, *Ring Theory*, Academic Press, 1991.

[4] Philippe Gille and Tamas Szamuely, *Central Simple Algebras and Galois Cohomology*, Cambridge, Studies in Advanced Mathematics, 2006.

[5] Benson Farb and R.Keith Dennis, *Noncommutative Algebra*, Springer-Verlag, 1993.

[۶] سیامک یاسمی و محمدرضا پورنکی، *مقدمه‌ای بر نظریه‌ی مدول‌ها*، موسسه‌ی انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، چاپ دوم، ۱۳۸۶.

[۷] علی کلامی، *قضیه‌ی ضریب جهانی برای همولوژی*. مجله ریاضی شریف، شماره دوم، سال اول.