اثبات‌هایی بر قضیه‌ی اساسی جبر

احمدرضا حاج سعیدی

چکیده

این مقاله، جمع آوری نه چندان دقیق از اثبات هایی از قضیه اساسی جبر است که سعی شده است که از ایده ها و روش های مختلفی بهره گیرد. اولین اثبات از اطلاعات کمتری نسبت به بقیه اثبات ها استفاده می کند و تنها ایده کار استقراست! در روش‌های بعدی از مفاهیم توابع مختلط، توپولوژی جبری، توپولوژی دیفرانسیل و نظریه‌ی گالوا[۱] بهره می گیریم که سعی شده است که در حد آشنایی و یادآوری، آن ها را بیان کنیم.

قضیه‌ی اساسی جبر. هر چندجمله‌ای غیرثابت باضرایب مختلط در $\mathbb{C}$ ریشه دارد.
یا به عبارتی هر چندجمله‌ای غیرثابت در $\mathbb{C}[x]$، به چندجمله‌ای‌های درجه ۱ تجزیه می‌شود .

روش ۱

نکته جالب این اثبات این است که استقرای ریاضی، اصلی ترین ایده ی آن است:

لم ۱. *اگر هر چندجمله‌ای در $\mathbb{R}[x]$ در $\mathbb{C}$ دارای ریشه باشد، قضیه‌ی اساسی جبر صحیح است.*

اثبات. فرض کنیم $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ و $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. در این صورت تعریف می‌کنیم $\bar{p}(x) = \sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i x^i$. مشخص است که $p(\alpha) = 0$ اگر و تنها اگر $\bar{p}(\bar{\alpha}) = 0$. به سادگی می‌توان دید که $p(x).\bar{p}(x) \in \mathbb{R}[x]$. پس $p(x).\bar{p}(x)$ ریشه‌ای مثل $\alpha \in \mathbb{C}$ دارد. لذا یکی از $p, \bar{p}$ در $\mathbb{C}$ دارای ریشه است و لذا هر دو دارای ریشه در $\mathbb{C}$ هستند. □

لم ۲. *چندجمله‌ای‌های درجه ۲ و درجه فرد در $\mathbb{R}[x]$، در $\mathbb{C}$ دارای ریشه‌اند.*

اثبات. اثبات این لم ساده است و به خواننده واگذار می‌شود. □

لم ۳. *اگر F یک میدان بوده و $p(x) \in F[x]$، آن‌گاه میدانی مانند E شامل F یافت می‌شود که $p(x)$ در E به چندجمله‌ای‌های درجه ۱ تجزیه می‌شود.*

اثبات. کافی است نشان دهیم میدان E شامل F یافت می‌شود که p در E ریشه دارد؛ چرا که می‌توان با تکرار این روش، $p(x)$ را تجزیه کرد. چون $F[x]$ یک U.F.D. است، می‌توان در آن $p(x)$ را به ضرب عوامل تحویل‌ناپذیر تجزیه کرد. کافی است نشان داد که دست‌کم یکی از این عوامل در توسیعی از F ریشه دارد. پس بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که چندجمله‌ای $p(x)$ در $F[x]$ تحویل‌ناپذیر است. حال اگر قرار دهیم $E = \frac{F[x]}{(p(x))}$ آن‌گاه E یک میدان خواهد بود و با در نظر گرفتن $\alpha = x + (p(x))$ داریم:

$$p(\alpha) = p(x + (p(x)) = p(x) + (p(x)) = (p(x)) = 0_E$$

لذا $p(x)$ در E ریشه دارد. □

[۱] Galois Theory

حال به روش اول می‌پردازیم. اثبات را با استقرا انجام می‌دهیم. فرض کنید $p(x)$ یک چندجمله‌ای درجه d با ضرایب حقیقی باشد. با در نظر گرفتن d به صورت $(2k+1)2^n$، استقرا را روی n در نظر می‌گیریم. بنا به لم ۲، این حکم برای $n=0$ برقرار است. حال فرض کنید برای $n<N\in\mathbb{N}$، حکم برقرار باشد. بنا به لم ۳ می‌توان میدان E شامل $\mathbb{R}$ یافت به طوری که $x_1,\dots,x_N\in E$ موجود باشد که

$$p(x)=\prod_{i=0}^{N}(x-x_i)$$

فرض کنید $k\in\mathbb{N}$. در این صورت تعریف کنید $q_k(x)=\prod_{i<j}(x-x_i-x_j-kx_ix_j)$. می‌توان به سادگی دید که $q_k(x)$ یک چندجمله‌ای در $\mathbb{R}[x]$ است(چون ضرایب $q_k(x)$ به صورت چندجمله‌ای‌هایی حقیقی متقارن از $x_1,\dots,x_d$ هستند و لذا می‌توان ضرایب $q_k(x)$ را به صورت حاصلضربی از ضرایب چندجمله‌ای $p(x)$ بیان کرد).

اکنون $q_k(x)$ یک چندجمله‌ای با درجه‌ی $d(d-1)/2$ می‌باشد و $d(d-1)/2=2^{N-1}\times(2k+1)(2^N(2k+1)-1)$، و لذا طبق فرض استقرا $q_k(x)$ در $\mathbb{C}$ ریشه دارد، یعنی به ازای i و jای $x_i+x_j+kx_ix_j$ عددی مختلط است.

اکنون چون k می‌تواند هر عدد طبیعی دلخواهی باشد، بنا به اصل لانه‌کبوتری، k و k' طبیعی و i,jای یافت می‌شوند که $x_i+x_j+kx_ix_j$ و $x_i+x_j+k'x_ix_j$ اعدادی مختلط‌اند و لذا x_ix_j و x_i+x_j نیز مختلط‌اند و در نتیجه x_i و x_j مختلط‌اند.

پس $p(x)$ نیز ریشه‌ی مختلط دارد و حکم اثبات می‌شود.

در ۳ اثبات بعدی، از روش‌هایی در توابع مختلط استفاده می‌شود.

روش ۲

در این روش با استفاده از قضیه‌ی لیوویل، قضیه‌ی اساسی جبر را اثبات می‌کنیم.

قضیه (لیوویل[2]): هر تابع تحلیلی و کراندار در $\mathbb{C}$، ثابت است.

اثبات این قضیه را می‌توانید در [1] ببینید.

لم ۴. *اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای غیرثابت در $\mathbb{C}[x]$ باشد،*

$$\lim_{|z|\to\infty}|p(z)|=\infty$$

اثبات. فرض کنید $p(z)=\sum_{i=0}^{n}a_iz^i$ و $a_n\neq 0$:

$$\lim_{|z|\to\infty}|p(z)|=\lim_{|z|\to\infty}z^n\,\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\dots+\frac{a_0}{z^n}\right|=\infty\times|a_n|=\infty$$

□

حال به اثبات روش دوم می‌پردازیم.

فرض کنید $p(z)$ در $\mathbb{C}$ ریشه نداشته باشد. لذا $p(z)$ و $\frac{1}{p(z)}$ هر دو روی $\mathbb{C}$ تحلیلی‌اند. پس

$$\lim_{|z|\to\infty}\left|\frac{1}{p(z)}\right|=0$$

پس به ازای $R>0$ برای $|z|>R$ باید $|p(z)|>1$ و در نتیجه $\frac{1}{p(z)}$ روی $|z|>R$ کراندار است. از طرفی $\frac{1}{p(z)}$ در ناحیه فشرده‌ی $|z|\leq R$ نیز کراندار است. پس $\frac{1}{p(z)}$ در کل $\mathbb{C}$ کراندار است پس بنا بر قضیه لیوویل $\frac{1}{p(z)}$ و در نتیجه $p(z)$ تابعی ثابت است که تناقض است.

[2] Liouville

روش ۳

در این روش از قضیه‌ی روشه استفاده می‌شود.

قضیه (روشه[۳]): فرض کنید f و g دو تابع تحلیلی درون یک مجموعه‌ی باز که شامل دایره‌ی C و درون آن است، باشد. اگر برای هر $z \in C$، $|g(z)| < |f(z)|$ در این صورت تعداد ریشه‌های f و $f+g$ (با حساب تکرر) درون دایره‌ی C برابرند.

اثبات این قضیه را می‌توانید در [۱] ببینید.

حال به کمک این قضیه اثباتی برای قضیه‌ی اساسی جبر ارائه می‌دهیم.

با فرض $f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ و $R > \max(2\frac{\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|}{|a_n|}, 1)$ و $g(z) = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i$ به سادگی دیده می‌شود که فرض قضیه‌ی روشه برای f و g روی دایره به مرکز ۰ و شعاع R برقرار است لذا f و $f+g = a_n z^n$ درون این دایره به یک تعداد ریشه دارند یعنی f، n ریشه دارد.

روش ۴

این روش نیز از مفاهیم توابع مختلط و توپولوژی جبری بهره می‌گیرد.

اگر D زیرمجموعه ای از $\mathbb{C}$ باشد، دو خم بسته ی γ_1 و γ_2 از بازه $[0,1]$ به D را هوموتوپ می گوییم اگر تابع پیوسته $h : [0,1] \times [0,1] \to D$ موجود باشد که $h(x,0) = \gamma_1(x)$ و $h(x,1) = \gamma_2(x)$.

لم ۵. *دو خم بسته‌ی هموتوپ[۴] در $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ دارای یک عدد چرخش حول صفر هستند.*

لم ۶. *اگر γ_1 و γ_2 دو خم بسته در $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ باشند که روی $[0,1]$ تعریف شده‌اند و $|\gamma_2(t)| < |\gamma_1(t)|$ برای هر $t \in [0,1]$، آن‌گاه عدد چرخش γ_1 و $\gamma_1 + \gamma_2$ حول صفر یکسان است.*

برای دیدن اثبات این دو لم به [۲] مراجعه کنید.

به کمک این دو لم می‌توانیم اثبات دیگری برای قضیه ارائه دهیم. فرض کنید $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ و $g(z) = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i$. مانند اثبات روش سوم، می‌توان $R > 0$ای یافت که برای $|z| \geq R$، $|g(z)| < |p(z)|$. پس با فرض $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$، $\gamma_1(t) = p(Re^{2\pi it})$ و $\gamma_2(t) = g(Re^{2\pi it})$، γ_1 و γ_2 در شرایط لم ۶ صدق می‌کنند و لذا $\gamma_1(t)$ و $(\gamma_1+\gamma_2)(t) = a_n R^n e^{2\pi int}$ عدد چرخش یکسان، n، دارند. اگر $p(z)$ دارای ریشه در $\mathbb{C}$ نباشد،

$$h : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

$$(t,s) \to p(Rse^{2\pi it})$$

یک هموتوپی بین γ_1 و خم ثابت $p(0)$ است و لذا γ_1 باید عدد چرخش صفر داشته باشد که این تناقض است.

روش ۵

در این اثبات، از روش‌هایی در توپولوژی دیفرانسیل بهره می‌گیریم.

منظور از یک خمینه، یک زیر مجموعه از فضای اقلیدسی است که به طور موضعی وابرسان[۵] با زیرمجموعه‌های باز از فضای اقلیدسی است.

اگر M و N دو خمینه‌ی هموار و هم‌بعد در فضای اقلیدسی باشند و $f : M \to N$ هموار باشد:

۱) $x \in M$، نقطه‌ی عادی f نامیده می‌شود اگر $\mathrm{df_x}$ یک‌به‌یک و پوشا باشد؛ در غیر این صورت این نقطه بحرانی نامیده می‌شود.

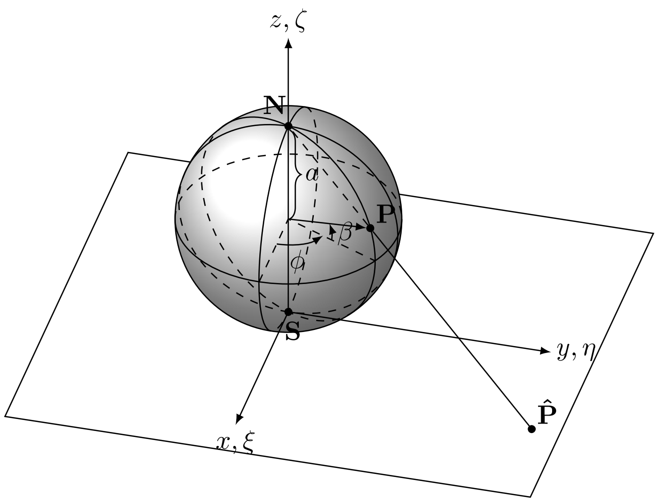
[۳] Rouché
[۴] homotopic
[۵] diffeomorphic

۲) $y \in N$ را مقدار عادی می‌نامیم اگر هیچ یک از اعضای $f^{-1}(y)$ نقطه‌ی بحرانی نباشد در غیر این صورت به آن مقدار بحرانی نامیده می‌گوییم.

لم ۷. *اگر M خمینه‌ای هموار و فشرده در $\mathbb{R}^n$ و N خمینه‌ای هموار در $\mathbb{R}^n$ باشد و $f : M \to N$ تابعی هموار باشد، آن‌گاه $\#f^{-1}(y)$ ($\#A$ نشان دهنده‌ی تعداد اعضای مجموعه‌ی A است) روی مجموعه‌ی مقادیر عادی f متناهی و موضعا ثابت است.*

اثبات این لم را می‌توانید در [۳] ببینید. حال به کمک این لم اثباتی دیگر برای قضیه‌ی اساسی بیان می‌کنیم.

می‌توان $\mathbb{C}$ را با زیرمجموعه‌ی $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ از $\mathbb{R}^3$ یکسان گرفت. ($x + iy \mapsto (x, y, 0)$) فرض کنید $p(z)$ یک چندجمله‌ای باشد. همچنین می‌توان فرض کرد $p(z) : \mathbb{R}^2 \times \{0\} \to \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. اکنون فرض کنید $p(z)$ در $\mathbb{C}$ یا در همان $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ ریشه نداشته باشد. نگاشت کنج‌نگاری از قطب شمال را $h_N : S^2 - N \to \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ که $N = (0, 0, 1)$ در نظر بگیرید. (نگاشت کنج‌نگاری[۶] ، نگاشتی است که هر نقطه‌ی غیر از N در S^2 را به نقطه‌ای در $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ می‌برد به طوری که این دو نقطه و N در یک امتداد باشند)



به طور مشابه نگاشت کنج‌نگاری از قطب جنوب را تعریف می‌کنیم و با h_S نمایش می‌دهیم. تابع $f : S^2 \to S^2$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} N & x = N \\ h_N^{-1} p h_N(x) & x \neq N \end{cases}$$

به راحتی می‌توان دید که h_N یک وابرسانی است و لذا h_N و h_N^{-1} هموار است. پس تابع f در $S^2 - N$ هموار است. اما f در N نیز هموار است. برای دیدن این موضوع تعریف کنید:

$$\phi : \mathbb{R}^2 \times \{0\} \to \mathbb{R}^2 \times \{0\}$$

$$z \mapsto h_S f h_S^{-1}(z)$$

می‌توان دید که $\phi(z) = \frac{z^n}{\sum_{i=0}^{n} \bar{a}_{n-i} z^i}$ (توجه کنید که $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ بود.) پس ϕ در همسایگی ۰ هموار است و لذا $f = h_S^{-1} \phi h_S$ در N هموار است. پس $f : S^2 \to S^2$ هموار است.

از آن‌جا که برد $p(z)$ شامل صفر نیست پس برد f شامل S (که $S = (0, 0, -1)$ قطب جنوب است.) نیست. لذا S مقدار عادی است.

اگر $x \neq N$ آن‌گاه $\mathrm{df_x} = (\mathrm{dh_N^{-1}})_{\mathrm{p(h_N(x))}} \mathrm{o} (\mathrm{dp})_{\mathrm{h_N(x)}} \mathrm{o} (\mathrm{dh_N})_{\mathrm{x}}$ پس از آن‌جا که h_N موضعا وابرسانی است $\mathrm{df_x}$ تنها در نقاط متناظر با ریشه‌های $p'(z)$، یک‌به‌یک و پوشا نیست. پس f متناهی نقطه‌ی بحرانی دارد. لذا نقاط عادی (نقاطی که بحرانی نیستند!) f از حذف متناهی نقطه‌ی S^2 به وجود می‌آیند و لذا باز و همبند هستند. پس $\#f^{-1}(y)$ روی مجموعه مقادیر عادی باید مقداری ثابت باشد اما $\#f^{-1}(S) = 0$. یعنی برد f شامل متناهی نقطه است و این یعنی برد f متناهی است که غلط است.

[۶] Stereographic projection

روش ۶

این اثبات نیز از توپولوژی دیفرانسیل استفاده می‌کند. در این اثبات از درجه یک نگاشت هموار میان دو خمینه ی "جهت پذیر"[7] و قضایا مربوط به آن استفاده می کنیم. برای هر نقطه ی x از خمینه ی n-بعدی هموار M ، می توان زیرفضایی خطی(مماس) n-بعدی از فضای اقلیدسی شامل خمینه، تعریف کرد که فضای مماس بر M در نقطه ی x نامیده می شود و با T_xM نشان داده می شود. اگر بتوان به طور هموار! پایه ای برای فضاهای مماس(T_xM) پیدا کرد این خمینه را جهت پذیر می‌نامیم. برای اطلاعات بیش‌تر مرجع [۶] توصیه می‌شود.

تعریف ۸. *اگر $f : M \to N$ نگاشتی هموار میان دو خمینه هم‌بعد و جهت‌دار M و N باشد و M فشرده و N همبند است. فرض کنید $y \in N$ مقداری عادی باشد.در این صورت اگر $x \in f^{-1}(y)$، می‌گوییم $\mathrm{df_x}$ جهت نگهدار است، اگر این نگاشت پایه القا شده از جهت M روی T_xM به پایه‌ای هم‌جهت با پایه‌ی القایی از جهت N روی $T_{f(x)}N$ ببرد؛ در غیر این صورت آن را جهت برگردان می‌نامیم. درجه‌ی نگاشت f یا $deg f$ برابر است با تعداد نقاط $x \in f^{-1}(y)$ که $\mathrm{df_x}$ جهت نگهدار است منهای تعداد بقیه نقاط $f^{-1}(y)$.*

می‌توان نشان داد که این تعریف مستقل از مقدار عادی $y \in N$ است که در ابتدا انتخاب شد.

لم ۹. *فرض کنید M و N دو خمینه با شرایط قید شده در تعریف بالا باشند و $f, g : M \to N$ دو نگاشت هموار بگیرید. در این صورت اگر g, f هوموتوپ باشند آنگاه $deg(f) = deg(g)$.*

لم ۱۰. *فرض کنیم N و M خمینه با شرایط فوق باشند و $f : M \to N$ نگاشتی هموار باشد. اگر M مرز خمینه ای مانند X باشد و گسترشی هموار مانند $F : M \to N$ از $f : M \to N$ وجود داشته باشد، در این صورت $deg(f) = 0$.*

اکنون فرض کنیم $p(x) = x^n + \cdots + a_1x + a_0$ یک چندجمله ای درجه $n > 0$ مختلط باشد که در $\mathbb{C}$ ریشه ندارد. اگر $R > 0$ را مانند روش ۳ در نظر بگیریم، در این صورت با فرض این که B_R, S_R کره و گوی بسته به شعاع R حول 0 باشند. دقت کنید که S_R مرز خمینه ی B_R است. فرض کنید

$$H : S_R \times [0,1] \to S_1$$

$$H(x,t) = \frac{p(x) - t \times (a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0)}{\mid p(x) - t \times (a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0) \mid}$$

پس دو نگاشت

$$f : S_R \to S_1, f(x) = p(x)$$

و

$$g : S_R \to S_1, g(x) = \frac{x^n}{R^n}$$

هوموتوپ هستند. لذا چون نگاشت $\mathrm{dg_x}$ برای هر $x \in S_R$ جهت نگهدار است پس $deg(f) = deg(g) = n$. از طرفی نگاشت

$$F : B_R \to S_1 \text{،} F(x) = p(x)$$

گسترشی هموار از نگاشت f است. بنابراین $deg(f) = 0$ که این یک تناقض است. پس $p(x)$ در $\mathbb{C}$ ریشه دارد.

روش ۷

اکنون روشی جبری برای اثبات قضیه‌ی اساسی جبر به کار می‌گیریم. در این روش از مفاهیم نظریه‌ی گالوا بهره می‌گیریم. اگر E و F دو میدان باشند، به طوری که $F \subset E$ آنگاه E توسیع میدانی از F نامیده می شود . این توسیع میدانی را توسیع جبری می نامیم، اگر هر عضو E ریشه یک چندجمله ای در $F[x]$ باشد. اگر $X \subset F[x]$، توسیع میدانی E را میدان شکافنده[8] X می‌نامیم

[7] orientable
[8] Spliting field

اگر اعضای X روی E تجزیه شوند و این میدان یک میدان مینیمال نسبت به این ویژگی باشد. میدان N را بستار نرمال از توسیع جبری میدان E روی F می‌نامیم، اگر N میدان شکافنده‌ی مجموعه‌ی $\{min(F, a) : a \in E\}$ باشد که منظور ما از $min(F, a)$ چندجمله‌ای مینیمال a روی F است. بعد توسیع میدانی E به عنوان یک میدان برداری روی F را با $[E : F]$ نمایش می‌دهیم و درجه ی این توسیع میدانی می‌نامیم. همچنین $Gal(E/F)$ را گروه تمام اتومورفیسم‌های E می‌گیریم که روی F همانی هستند.

یک توسیع متناهی E/F را گالوا می‌نامیم هرگاه هر عنصری از E که توسط تمامی اتومورفیسم‌ها متعلق به $Gal(E/F)$ ثابت نگاه داشته شود در F واقع باشد.

برای آشنایی با ابزارهای این اثبات مطالعه [۴] توصیه می‌شود.

لم ۱۱. *میدان $\mathbb{R}$ توسیع غیربدیهی با درجه‌ی فرد ندارد.*

اثبات. اگر $E \neq \mathbb{R}$ توسیع میدانی $\mathbb{R}$ باشد و $[E : \mathbb{R}]$ فرد باشد؛ با فرض $a \in E\backslash\mathbb{R}$، $[\mathbb{R}(a) : \mathbb{R}]$ نیز فرد خواهد بود. پس $\min(\mathbb{R}, a)$ چندجمله‌ای درجه فرد و تحویل‌ناپذیر روی $\mathbb{R}$ خواهد بود. اما طبق لم ۲ این ناممکن است. $\square$

لم ۱۲. *هیچ توسیع میدانی با درجه‌ی ۲ از $\mathbb{C}$ موجود نیست.*

اثبات. اگر چنین توسیعی موجود باشد باید به فرم $\mathbb{C}(a)$ باشد و $[\mathbb{C}(a) : \mathbb{C}] = ۲$. اما در این صورت a باید ریشه‌ی یک چندجمله‌ای درجه ۲ با ضرایب در $\mathbb{C}$ باشد که در نتیجه a یک عدد مختلط است و $\mathbb{C}(a) = \mathbb{C}$. بنابراین چنین توسیعی وجود ندارد. $\square$

حال می‌توانیم اثباتی جبری ارائه کنیم.

فرض کنید N بستار نرمال $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ باشد. می‌توان نشان داد که در این صورت به دلیل آن‌که مشخصه‌ی $\mathbb{R}$ صفر است $N/\mathbb{R}$ یک توسیع گالواست و بنابراین می‌توان از احکام مربوط به توسیع‌های گالوایی که در مرجع [۴] آمده‌اند استفاده کرد. اگر نشان دهیم $N = \mathbb{C}$ حکم ثابت شده است. فرض کنید $G = Gal(N/\mathbb{R})$. در این صورت

$$| G |= [N : \mathbb{R}] = [N : \mathbb{C}].[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = ۲[N : \mathbb{C}]$$

پس $| G |$ زوج است. فرض کنید P یک زیرگروه ۲−سیلوی G باشد و E میدان ثابت P باشد. بنابراین $[G : P]$ فرد است و از طرفی $[E : \mathbb{R}] = [G : P]$. اما مطابق لم ۱۱ باید $E = \mathbb{R}$. پس $G = P$ و لذا G یک ۲−گروه است. چون $Gal(N/\mathbb{C}) \leq Gal(N/\mathbb{R})$ پس $Gal(N/\mathbb{C})$ نیز یک ۲−گروه است. اگر M زیرگروه سره ماکسیمالی از $Gal(N/\mathbb{C})$ باشد، داریم $[Gal(N/\mathbb{C}) : M] = ۲$. اگر T میدان ثابت M باشد در این صورت $[T : \mathbb{C}] = ۲$. اما این با لم ۱۲ در تناقض است. پس $| Gal(N/\mathbb{C}) |= ۱$، یعنی $N = \mathbb{C}$.

مراجع

[1] Elias M. Stein, Rami Shakarchi, Complex Analysis, 2009.

[2] Henri Cartan, Elementary Theory of Analytic Functions of One Or Several Complex Variables, 1995.

[3] John Willard Milnor, Topology from the Differentiable Viewpoint, 1997.

[4] Patrick Morandi, Field and Galois Theory, 1996.

[5] http://planetmath.org/encyclopedia/ProofOfFundamentalTheoremOfAlgebra2.html

[6] Ian Pollack, Victor Guillemin, Differential Topology, 2010.