مثلث بندی در شبکه‌های ساده

ابوالفضل طاهری

یکی از مسائل مهم در شبکه، بدست آوردن فاصله بین گره‌ها[۱] در شبکه می‌باشد. اما بدست آوردن این فاصله‌ها کار چندان آسانی نیست و بعلاوه کاری پرهزینه می‌باشد. با توجه به این مساله ترجیح داده‌می‌شود که با بدست آوردن فاصله تعداد محدودی از گره‌ها در شبکه از یکدیگر، سایر فاصله‌ها را با استفاده از این مقادیر معلوم تقریب بزنیم. مثلث‌بندی شبکه یکی از متدهایی است که برای این کار ارایه‌شده‌است.

مثلث‌بندی شبکه براساس ساختار متریک فاصله، و نامساوی مثلثی در این نوع ساختارها عمل می‌کند. به این ترتیب که با نشاندن شبکه در یک فضای متریک، گره‌هایی را به عنوان گره‌های راهنما معرفی می‌کند که فاصله آن تا سایر نقاط معلوم است. حال با استفاده از این گره‌های راهنما و نامساوی مثلثی، فاصله‌ی دو گره را تخمین می‌زنند. مطالعات اخیر نشان می‌دهد که خطای شدید در نامساوی مثلثی چندان معمول نیست، و بنابراین می‌توان شبکه را با یک فضای متریک متناهی مدل کرد و از این روش در آن استفاده کرد.

این کار به وسیله‌ی کلاینبرگ[۲]، اسلیوکینز[۳]، وکسلر[۴] شروع شد و در نهایت هدف کاهش تعداد نقاط راهنما بود و انتخاب این نقاط به طوری که این کار بهینه شود. هدف این مقاله که بر اساس [۱] می‌باشد نیز ادامه این کار می‌باشد. در اینجا با ارایه متریک‌های خاص قضایایی را ثابت می‌کنیم که نشان می‌دهد به کران بهینه برای مجموعه‌های راهنما رسیده‌ایم.

مفاهیم اولیه

تعریف ۱. *مجموعه‌ی X را به همراه تابع $d: X\times X\to \mathbb{R}^+$ را فضای متریک می‌گوییم اگر d دارای سه خاصیت زیر باشد: فرض کنید $x,y,z\in X$ باشد:*

۱) $d(x,y)\geq 0, d(x,y)=0 \iff x=y$

۲) $d(x,y)=d(y,x)$

۳) $d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)$

این فضا را با (X,d) نمایش می‌دهیم.

مثلث‌بندی در فضای متریک متناهی

فرض کنید (X,d) فضایی متریک باشد که $|X|=n$ است. برای هر $x\in X$ مجموعه‌ی $S_x\subset X$ را تمام نقاطی می‌گیریم که فاصله‌ی آن‌ها تا x معلوم است. این مجموعه را مجموعه‌ی راهنمای x می‌نامیم. به یک چنین متناظرسازی بین اعضای X و

[۱] node
[۲] Kleinberg
[۳] Slivkins
[۴] Wexler

زیرمجموعه‌های آن یک مثلث‌بندی فضای X می‌گوییم. یک مثلث‌بندی از X دارای مرتبه‌ی s است اگر $\max_{x\in X} \mid S_x \mid \leq s$ باشد.

برای هر مثلث‌بندی از X داریم:

$$\forall b \in S_x \cap S_y ; \mid d(x,b) - d(y,b) \mid \leq d(x,y) \leq d(x,b) + d(y,b)$$

حال با توجه به این نامساوی‌ها تعریف می‌کنیم:

$$D(x,y)^+ = \min_{b\in S_x\cap S_y}\{d(x,b)+d(b,y)\}, D(x,y)^- = \max_{b\in S_x\cap S_y}\{d(x,b)-d(b,y)\}$$

حال با توجه به این مفاهیم، یک (ϵ,δ)-مثلث‌بندی را، مثلث‌بندی می‌گیریم که نامساوی $\frac{D(x,y)^+}{D(x,y)^-} \leq ۱+\delta$ برای تمام x و y به جز کسر ϵ از این زوج‌ها صادق باشد. ϵ را ضعف این مثلث‌بندی و δ را دقت آن می‌گوییم.

تعریف ۲. *بعد دوگان فضای متریک (X,d) را کوچکترین عدد k تعریف می‌کنیم که، هر گوی به شعاع r را بتوان با ۲^k گوی به شعاع $r/۲$ پوشاند. فضای با بعد دوگان k را ۲^k-دوگان می‌نامیم. اگر $k = O(۱)$ باشد فضا را دوگان می‌نامیم.*

کلاینبرگ برای نتایج تجربی که بدست‌آمده‌بود، توضیحی تحلیلی ارائه کرد. او نشان داد که هر ۲^k-دوگان، (ϵ,δ)-مثلث‌بندی را می‌پذیرد که مرتبه‌ی آن به n وابسته نیست. بعد از کلاینبرگ، اسلیوکینز نشان داد که هر فضای متریک با بعد دوگان k، (ϵ,δ)-مثلث‌بندی را می‌پذیرد که مرتبه‌ی آن به صورت $\delta^{O(k)}(\log n)^۲$ است. او بعد این کران را بهتر کرد و آن را به $\delta^{O(k)}\log n$ رساند.
با این روند سوالی که برای او مطرح شد این بود که آیا $O(\log n)$ لازم است؟

در ادامه می‌خواهیم به این سوال پاسخ دهیم و نشان دهیم مثلث‌بندی ارائه شده توسط اسلیوکینز با در نظر گرفتن یک ثابت بهینه است.

معرفی متریک‌های خاص

تعریف ۳. *متریک زیر را روی $\mathbb{R}^k$ تعریف می‌کنیم و آن را متریک مینکوسکی[۵]، می‌گوییم و با l_p نمایش می‌دهیم:*

$$\forall x,y\in\mathbb{R}^k ; d(x,y) = \left(\sum (x_i-y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

همچنین برای ∞ تعریف می‌کنیم:

$$\forall x,y\in\mathbb{R}^k ; d(x,y) = \max \mid x_i - y_i \mid$$

تعریف ۴. *برای تبدیل گراف G به یک فضای متریک، مجموعه راس‌های آن را نقاط فضا در نظر گرفته و فاصله بین نقاط را طول کوتاهترین مسیر بین آن‌ها می‌گیریم. معادلا متناظر با هر فضای متریک متناهی می‌توان گراف G را ساخت. این متریک را متریک روی گراف G می‌نامیم. اگر گراف ساخته شده درخت باشد، متریک را متریک درختی می‌گوییم.*

تعریف ۵. *فرض کنید $X = \{۰,۱,\ldots,n-۱\}$ باشد. X را با متر $d(x,y) = \min\{\mid x-y\mid, n-\mid x-y\mid\}$، متریک دوری نامیده می‌شود.*

تعریف ۶. *اگر به جای شرط ۳ در مورد متر فضاهای متریک، یعنی خاصیت مثلثی، شرط*

$$d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(z,y)\}$$

را قرار دهیم، فضا را ابرمتریک می‌نامیم.

[۵] Minkowski

متریک‌های یک بعدی

قضیه‌ای که در اینجا مطرح می‌شود نشان می‌دهد که ما به $\log n$ نیاز داریم و بنابراین پاسخ سوال اسلیوکینز مثبت است.

قرارداد می کنیم:

$$[M] = \{۰, ۱, \ldots, M - ۱\}$$

قضیه ۷. *برای هر $n \geq ۲$، فضای متریک یک بعدی با اندازه‌ی n وجود دارد به طوری که برای هر (ϵ, δ)-مثلث‌بندی که $\delta < ۱$، دارای مرتبه‌ی $\Omega(\log n)$ است.*

اثبات. بدون کاسته شدن از کلیت حکم فرض می‌کنیم که n توانی از ۲ است. فضای (X, d) را فضای متریک دوری از اندازه n بگیرید. حال ثابت می‌کنیم این فضا شرایط مسئله را دارد و بنابراین حکم ثابت می‌شود.

قرار می‌دهیم $M = \log n - ۳$. حال فرض خلف می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم که (X, d)، $(۰, \delta)$-مثلث‌بندی دارد که:

$$\forall x \in X; x \to S_x, \mid S_x \mid = k \leq \frac{M}{۸}$$

برای هر $x \in X, j \in [M]$ تعریف می‌کنیم:

$$A(x, j) = \{b \in S_x; ۲^{j-۱} \leq d(x, b) \leq ۲^{j+۱}\}$$

حال $x \in X$ را ثابت در نظر بگیرید، در این صورت b حداکثر در دو تا از $A(x, ۰), \ldots, A(x, M - ۱)$ اتفاق می‌افتد، در نتیجه $\sum_{j \in [M]} ۱_{A(x,j)} \leq ۲ \mid S_x \mid \leq \frac{M}{۴}$. بنابراین اگر $j' \in [M]$ نیز به طور تصادفی انتخاب شود، خواهیم داشت:

$$\forall x \in X; Pr_{j'}[A(x, j')] \leq \frac{۱}{۴}$$

تعریف می‌کنیم $y' = (x' + ۲^{j'}) \mod n$. با این تعریف y' یک توزیع یکنواخت روی X و مستقل از j' دارد. پس داریم $Pr_{j',x'}[A(j', y')] \leq \frac{۱}{۴}$، و در نتیجه خواهیم‌داشت:

$$Pr_{j',x'}[A(x', j') \vee A(y', j')] \leq \frac{۱}{۲}$$

با توجه به احتمال بدست‌آمده، وجود دارد $j \in [M]$ و $x \in X$ به طوری که هیچ یک از $A(x, j)$ و $A(y, j)$ اتفاق نمی‌افتد.

ادعا می‌کنیم $D(x, y)^+ \geq ۲d(x, y)$. ادعا حکم را ثابت می‌کند چرا که همواره $D(x, y)^- \leq d(x, y)$ و در نتیجه $\delta \geq ۱$ بدست می‌آید که تناقض با فرض است. بنابراین X نمی‌تواند چنین مثلث‌بندی داشته باشد و حکم ثابت می‌شود. پس کافی است ادعا را ثابت کنیم.

اثبات ادعا: داریم $j \leq M \leq \log n - ۱$ بنابراین داریم:

$$\mid x - ((x + ۲^j) \mod n) \mid = \mid (x - (x + ۲^j)) \mid n \mid = \mid -۲^j \mid = ۲^j$$

$$d(x, y) = \min\{۲^j, n - ۲^j\} = ۲^j$$

حال $b \in S_x \cap S_y$ را در نظر بگیرید، حداقل یکی از $d(x, b)$ یا $d(y, b)$ باید بزرگتر یا مساوی با $\frac{۱}{۲}d(x, y) = ۲^{j-۱}$ باشد(بنا به نامساوی مثلثی در فضاهای متریک). مثلا فرض می‌کنیم $d(x, y) \geq ۲^{j-۱}$. این واقعیت که $d(x, j)$ اتفاق نمی‌افتد نتیجه می‌دهد $d(x, b) \geq ۲^{j+۱}$. بنابراین $d(x, b) + d(y, b) \geq ۲^{j+۱} = ۲d(x, y)$. چون b دلخواه بود ادعا ثابت می‌شود. □

قضیه ۸. *برای هر $n \geq ۲$، فضای متریک یک بعدی با اندازه n وجود دارد به طوری که برای هر (ϵ, δ)-مثلث‌بندی که $\delta < ۱$، دارای مرتبه $\Omega(\log \frac{۱}{\epsilon})$ است.*

اثبات. اثبات این قضیه کاملا شبیه به قضیه قبل است و تنها در مواردی جزئی تفاوت‌هایی داریم. □

متریک‌های دوگان

در این قسمت منظور از $l_۲^k$ فضای اقلیدسی k بعدی با متر مینکوسکی می‌باشد. از $\| . \|$ برای نرم این فضا استفاده می‌کنیم. برای هر $A \subset X$ و $x \in X$ تعریف می‌کنیم $d(x,A) = \inf_{p\in A} \| x-p \|$. لم‌های زیر را بدون اثبات می‌آوریم و از آن‌ها در اثبات قضیه‌ها استفاده می‌کنیم.

لم ۹. *$x,b \in \mathbb{R}_۲^k$ و $۰ < \delta < \frac{۱}{۲}$ را ثابت در نظر بگیرید. آنگاه خط L به طول $\| x-b \|$ وجود دارد به طوری که هر $y \in \mathbb{R}^k$ که دارای شرایط*

$$\| x-b \| + \| b-y \| \leq (۱+\delta) \| x-y \| \quad , \quad \| x-b \| \geq \| y-b \| \qquad (۱)$$

باشد، در فاصله‌ی $۵\sqrt{\delta} \| x-b \|$ خط L است. به عبارتی $d(x,L) \leq ۵\sqrt{\delta} \| x-b \|$.

لم ۱۰. *$a,b \in \mathbb{R}_۲^k$ و $۰ < \delta < \frac{۱}{۲}$ و $Y \subset \mathbb{R}^k$ ناتهی و متناهی را ثابت در نظر بگیرید. در این صورت نقاط $y_۱, \ldots, y_{\frac{۱}{\delta}} \in Y$ وجود دارد که هر $y \in Y$ که در (۱) صدق می‌کند داخل $\cup_{t=۱}^{\frac{۱}{\delta}} B(y_t, ۱۲\sqrt{\delta})$ قرار می‌گیرد.*

لم ۱۱. *فرض کنید $k \geq ۲$ است و $B(x,r)$ گوی بسته به شعاع r حول $x \in \mathbb{R}^k$ باشد. اگر تعریف کنیم $\hat{B}(x,r) = \mathbb{Z}^k \cap B(x,r)$، آنگاه برای هر $r \geq ۶\sqrt{k}, \alpha \geq ۲$ و $x \in \mathbb{R}^k$ داریم:*

$$(\alpha - \frac{۱}{۴})^k \leq \frac{| \hat{B}(x,\alpha r) |}{| \hat{B}(x,r) |} \leq (\alpha + \frac{۱}{۲})^k$$

قضیه ۱۲. *برای هر $\delta < \frac{۱}{۲}$، $n \geq (\frac{k}{\delta})^k$ و $k \geq ۲$، متریک از اندازه n با بعد دوگان $O(k)$ وجود دارد به طوری که برای هر $(۰,\delta)$-مثلث‌بندی، دارای مرتبه حداقل $(c\delta)^{\frac{-k}{۲+۱}} \log(n^{\frac{۱}{k}})$ است که در آن c ثابت است.*

اثبات. فضای (X,d) را متریک $I^۲$ روی چنبره گسسته k بعدی در نظر بگیرید. این فضا به این صورت تعریف می‌شود؛ فرض کنید $m = n^{\frac{۱}{k}}$ و بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم که m عددی صحیح و توانی از ۲ است. قرار می‌دهیم $X = [m]^k$ و متریک زیر را روی آن تعریف می‌کنیم:

$$d_i(x,y) = \min\{| x_i - y_i |, m - | x_i, y_i |\}, d(x,y) = [\sum_i (d_i(x,y))^۲]^{\frac{۱}{۲}}$$

متریک تعریف شده دارای بعد دوگان $O(k)$ است.
قرار می‌دهیم $M = \log m$. حال فرض خلف می گیریم که (X,d) یک $(۰,\delta)$-مثلث‌بندی دارد که دارای مرتبه‌ی $\frac{\delta}{۶۴k}(۲۴\sqrt{\delta})^{-k} \log n$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\forall x,y \in X; A(x,y) = \{b \in S_x : d(x,b) + d(y,b) \leq (۱+\delta)d(x,y), d(x,b) \geq d(y,b)\}$$

ادعا ۱ : فرض کنید $x,y \in X$ باشد. اگر هیچکدام از $A(x,y)$ و $A(y,x)$ اتفاق نیفتد، آنگاه $D(x,y)^+ > (۱+\delta)d(x,y)$

اثبات ادعا: فرض خلف بگیرید، یعنی فرض کنید $D(x,y)^+ \leq (۱+\delta)d(x,y)$ اتفاق بیفتد. حال اگر $b \in S_x \cap S_y$ باشد به طوری که $D(x,y)^+ = d(x,b) + d(y,b)$ باشد، نتیجه می‌شود که یا $d(x,b) \geq d(y,b)$ یا $d(x,b) \leq d(y,b)$ اتفاق می‌افتد و بنابراین یا $A(x,y)$ یا A(y،x) اتفاق می‌افتد که تناقض است و بنابراین ادعا ثابت می‌شود.

توزیع μ را به این صورت تعریف می‌کنیم که $x \in X$ و $j \in \{\frac{M}{۲}, \ldots, M-۱\}$ را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم. همچنین y را به صورت تصادفی از $B(x,۲^j) \backslash B(x,۲^{j-۱})$ انتخاب می‌کنیم. با این توصیف y یک توزیع یکنواخت روی X است و بعلاوه y,j مستقل‌اند.

ادعا ۲ : $Pr_\mu[A(x,y)] \leq \frac{۱}{۴}$.

برای اثبات ادعا حکم قوی‌تر $Pr_\mu[A(x,y) \mid x = x'] \leq \frac{۱}{۴}$ را ثابت می‌کنیم. برای این کار، برای هر $x,y \in X$ و هر $b \in S_x$ تعریف می‌کنیم $A(x,y,b)$ رخداد

$$d(x,b) + d(y,b) \leq (۱+\delta)d(x,y), d(x,b) \geq d(y,b)$$

باشد. با توجه به این تعریف داریم:

$$A(x,y) = \cup_{b \in S_x} A(x,y,b) \Rightarrow Pr_\mu[A(x,y) \mid x = x'] \leq \sum_{b \in S_x} Pr_\mu[A(x,y,b) \mid x = x']$$

حال $x' \in X$ را ثابت بگیرید و $b' \in S_{x'}$ در نظر بگیرید. اگر $A(x', y, b')$ اتفاق بیفتد، داریم

$$\frac{1}{1+\delta} d(b', x') \leq d(x, y) \leq 2 d(b', x')$$

و همچنین $2^{j-1} < d(x, y) \leq 2^j$ که j به بازه $[\log d(b', x') - 1, \log d(b', x') + 2]$ محدود شده‌است. چون j صحیح است و مستقل از $x = x'$ انتخاب شده‌است، بنابراین احتمال انتخاب j در این بازه $\frac{8}{M}$ است.

فرض کنید j از یکی از این ۴ مقدار انتخاب شده‌باشد و $y \in B(x', 2^j) \backslash B(x', 2^{j-1})$ را به صورت تصادفی انتخاب می کنیم. مجموعه‌ی $B(x', 2^j)$ در X با مجموعه‌ی متناهی l_2^k یکریخت است و بنابراین بنا به لم ۱۰، مجموعه‌ی نقاط $y_1, \ldots, y_{\frac{1}{\delta}}$ وجود دارد به طوری که هر $y \in X$ که خاصیت $A(x', y, b')$ را حفظ می کند درون $\cup_{t=1}^{\frac{1}{\delta}} B(y_t, 6\sqrt{\delta} d(x', b'))$ قرار می گیرد. در نتیجه احتمال اینکه $y \in B(x', 2^j) \backslash B(x', 2^{j-1})$ باشد و خاصیت $A(x', y, b)$ را داشته‌باشد، بدست می‌آید:

$$\frac{\sum_{t=1}^{\frac{1}{\delta}} \mid B(y_t, 6\sqrt{\delta} d(x', b')) \mid}{\mid B(x', 2^j) \backslash B(x', 2^{j-1}) \mid} \leq \frac{1}{\delta} . \frac{\mid B(y_1, 6\sqrt{\delta} 2^{j+1}) \mid}{\frac{|B(x', 2^j)|}{2}} \leq \frac{2}{\delta} (24\sqrt{\delta})^k$$

که نامساوی آخر از لم ۱۱ حاصل می‌شود. با توجه به این نامساوی‌ها داریم:

$$Pr_\mu[A(x, y) \mid x = x'] \leq \mid S_x \mid . \frac{8}{M} . \frac{2}{\delta} (24\sqrt{\delta})^k \leq \frac{1}{4}$$

و ادعا ثابت می‌شود.

با توجه به ادعای ثابت شده، اثبات قضیه را کامل می‌کنیم. چون x, y خاصیت تقارن در توزیع μ را دارند، می‌توانیم از ادعای ۲ استفاده کنیم و بدست آوریم $Pr_\mu[A(x, y) \vee A(y, x)] \leq \frac{1}{2}$.

با استفاده از قوانین احتمال $x, y \in X$ وجود دارد به طوری که نه $A(x, y)$ و نه $A(y, x)$ اتفاق بیفتد. حال با توجه به ادعای ۱، برای این دو نقطه داریم $D(x, y)^+ > (1 + \delta) d(x, y)$. از طرفی $D(x, y)^- \leq d(x, y)$، و بنابراین نتیجه می‌شود که $(0, \delta)$-مثلث‌بندی نداریم که تناقض است و حکم ثابت می‌شود. □

قضیه ۱۳. *برای هر* $k \geq 2, \delta < \frac{1}{2}, n \geq (\frac{k}{\delta})^k, \epsilon < \frac{1}{(3k)^k}$*، متریک از اندازه* n *با بعد دوگان* $O(k)$ *وجود دارد به طوری که برای هر* (ϵ, δ)*-مثلث‌بندی، دارای مرتبه حداقل* $\log (n^{\frac{-1}{2k}}) (c\delta)^{\frac{-k}{2+1}}$ *است که در آن* c *ثابت است.*

اثبات این قضیه مشابه اثبات قضیه ۱۲ است.

متریک‌های درختی و ابرمتریک‌ها

قضیه ۱۴. *خانواده‌ای از متریک‌های درختی(به طور مشابه ابرمتریک‌ها) از اندازه* n *وجود دارد به طوری که هر* $(\frac{1}{9}, \delta)$*-مثلث‌بندی دارای مرتبه* $(\Omega(n))^{\frac{1}{1+\delta}}$ *است.*

اثبات. فرض کنید T درخت دودویی کامل با ارتفاع $k \geq 1$ باشد و L مجموعه برگ‌های آن باشد. $\epsilon < \frac{1}{9}$ را ثابت بگیرید و فرض کنید متریک d (کوتاهترین مسیر) دارای (ϵ, δ)-مثلث‌بندی از مرتبه‌ی m باشد.

فرض می‌کنیم $n = 2^{k+1} - 1$ تعداد راس‌های T و L مجموعه برگ‌های آن باشد. می‌دانیم $\mid L \mid = 2^k > \frac{n}{4}$. راس‌هایی از T را که در عمق $q = \lceil \frac{k}{1+\delta} \rceil$ هستند را با $z_1, \ldots, z_{2^q}$ نمایش می‌دهیم. برای $j = 1, \ldots, 2^q$، زیردرختی از T را در نظر می‌گیریم که ریشه‌ی آن z_j است و آن را با T_j نشان می‌دهیم. برای $v \in L$، تعریف می‌کنیم $j(v) = \{j \in \{1, \ldots, 2^q\} : v \in T_j\}$.
می‌خواهیم نشان دهیم برای اکثر $v \in L$، مجموعه راهنما، اشتراک ناتهی با تعداد زیادی از 2^q درخت T_j دارد.

فرض کنید $L = L_1 \cup L_2$ افرازی از برگ‌های T مطابق با بچه‌های ریشه باشند. بنابراین $\mid L_1 \mid = \mid L_2 \mid = \frac{|L|}{2}$. فرض کنید $L^* = (L_1 \times L_2) \cup (L_2 \times L_1)$ و جفت برگ‌های $(x, y) \in L^*$ را به صورت تصادفی بگیرید. در این صورت (ϵ, δ)-مثلث‌بندی دارای خاصیت زیر است:

$$Pr_{(x,y) \in L^*}[D(x, y)^- < \frac{d(x, y)}{1+\delta}] \leq \frac{\epsilon n^2}{\mid L^* \mid} < 8\epsilon \tag{2}$$

بعلاوه x را ثابت در نظر بگیرید. مجموعه‌ی S_x شامل راس‌هایی از حداکثر m زیردرخت $T_1, \dots, T_{2^q}$ است و نقطه‌ی y به صورت توزیع یکنواخت روی $\frac{|L|}{2}$ برگ و بنابراین $T_{j(y)}$ توزیع یکنواخت روی 2^{q-1} زیردرخت از $T_1, \dots, T_{2^q}$ است. در نتیجه داریم:

$$Pr_{(x,y)\in L^*}[S_x \cap T_{j(y)} \neq \emptyset] \leq \frac{m}{2^{q-1}} \tag{3}$$

وبه طور مشابه برای y داریم:

$$Pr_{(x,y)\in L^*}[S_y \cap T_{j(x)} \neq \emptyset] \leq \frac{m}{2^{q-1}} \tag{4}$$

ادعا: از $S_x \cap T_{j(y)} = S_y \cap T_{j(x)} = \emptyset$ نتیجه می‌دهد $D(x,y)^- < \frac{d(x,y)}{1+\delta}$.

با توجه به ادعای فوق و (۲)، (۳) و (۴) داریم:

$$1 - \frac{2m}{2^{q-1}} \leq Pr_{(x,y)\in L^*}[S_x \cap T_{j(y)} = S_y \cap T_{j(x)} = \emptyset] \leq Pr_{(x,y)\in L^*}[D(x,y)^- < \frac{d(x,y)}{1+\delta}] \leq 8\epsilon$$

و در نتیجه داریم $m \geq \Omega(2^q) > \Omega((\frac{n}{2})^{\frac{1}{1+\delta}})$. که این حکم را نتیجه می‌دهد.

حال ادعا را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $(x,y) \in L^*$ و $S_x \cap T_{j(y)} = S_y \cap T_{j(x)} = \emptyset$. با توجه به تعریف L^* داریم $d(x,y) = 2k$. همچنین برای هر $b \in S_x \cap S_y$ داریم $|\ d(x,b) - d(y,b)\ | < 2q$. با توجه به فرض نیز داریم $b \notin T_{j(x)} \cup T_{j(y)}$ و $j(x) \neq j(y)$.

فرض کنید w راس میانی در سه‌تایی $\{x,y,b\}$ باشد. داریم:

$$d(x,b) - d(y,b) = d(x,w) - d(y,w) = d(x,y) - 2d(y,w) = 2k - 2d(y,w) \tag{5}$$

حال چون w روی کوتاهترین مسیر بین $x,b \notin T_{j(y)}$ است نتیجه می‌شود $w \notin T_{j(y)}$. بنابراین $d(y,w) > k - q$. با توجه به (۵) داریم $d(x,b) - d(y,b) < 2q$. به طور مشابه دیده می‌شود $d(y,b) - d(x,b) < 2q$. و بنابراین:

$$|\ d(x,b) - d(y,b)\ | < 2q \Rightarrow D(x,y)^- < 2q = \frac{d(x,y)}{1+\delta}$$

و ادعا ثابت می‌شود. □

اثباتی که در بالا ارائه شد، می‌توان به ابرمتریک‌ها گسترش داد بنابراین قضیه برای ابرمتریک‌ها نیز برقرار است.

قضیه ۱۵. *خانواده‌ای از ابرمتریک‌ها از اندازه‌ی n با بعد دوگان ۱ وجود دارد به طوری که برای هر $(\epsilon, \frac{3}{4})$-مثلث‌بندی دارای مرتبه‌ی $\Omega(\log \frac{1}{\epsilon})$ است.*

اثبات. فرض کنید T درخت دودویی کامل با ارتفاع $k \geq 1$ است که یال‌های در عمق k آن طول ۱ و یال‌های در عمق $1 \leq j < k$ به طول 2^{k-j-1} است. فرض کنید L مجموعه برگ‌های T باشد و $n = |L| = 2^k$. متریک کوتاهتری مسیر، یک ابرمتریک روی برگ‌ها القا می‌کند. بعلاوه (L,d) دارای بعد دوگان ۱ است، زیرا یک گوی در این متریک متناظر با یک زیردرخت در T است. اگر کوچترین جد مشترک $x,y \in L$ در عمق $j \in \{0, \dots, k\}$ باشد، آنگاه:

$$d(x,y) = 2(1 + 2^0 + \dots + 2^{k-j-2}) = 2^{k-j}$$

قرار دهید $m = \log \frac{1}{\epsilon} - 3$. فرض کنید (L,d) یک $(\epsilon, \frac{3}{4})$-مثلث‌بندی از مرتبه $\frac{m}{4}$ دارد. برای $x \in L$ و $j \in [m]$ فرایند $A(x,j)$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که S_x شامل $b \in L$ است که فاصله‌ی آن از x دقیقا 2^{k-j} است. واضح است که برای هر $x \in L$، هر عضو راهنما در S_x، حداکثر برای یک j، در $A(x,j)$ اتفاق می‌افتد. حال اگر $j \in [m]$ را تصادفی انتخاب کنیم، داریم:

$$Pr_j[A(x,j)] \leq \frac{|\ S_x\ |}{m} \leq \frac{1}{4} \tag{6}$$

حال جفت برگ $(x,y) \in L \times L$ را با روند زیر تصادفی انتخاب می‌کنیم:

۱) x را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم.

۲) $j \in [m]$ را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم.

۳) y را به صورت تصادفی از تمام نقاطی که فاصله‌ی آن‌ها تا x دقیقا ۲^{k-j} است انتخاب می‌کنیم (معادلا کوچکترین جد مشترک x و y در عمق $j-۱$ است).

چون x, j به صورت مستقل انتخاب شده‌اند، بنا به (۶) داریم:

$$Pr_{x,j,y}[A(x,j)] \leq \frac{۱}{۴}$$

همچنین j مستقل از y است و داریم:

$$Pr_{x,j,y}[A(y,j)] \leq \frac{۱}{۴}$$

بنابراین نتیجه می‌شود:

$$Pr_{x,j,y}[A(x,j) \vee A(y,j)] \leq \frac{۱}{۲} \tag{۷}$$

ادعا: اگر هیچ یک از $A(x,j)$ و $A(y,j)$ اتفاق نیفتد، آنگاه $D(x,y)^+ \geq ۴d(x,y)$ و $D(x,y)^- = ۰$.
این ادعا حکم را ثابت می‌کند، چرا که با توجه به (۷)، وجود دارد $j = j_۰$ به طوری که:

$$Pr_{x,j,y}[A(x,j) \vee A(y,j) \mid j = j_۰] \leq \frac{۱}{۲}$$

به عبارت دیگر $۲\epsilon n^۲ \leq \frac{۱}{۲}n.\frac{n}{۲^{j_۰+۱}}$ زوج متمایز از برگ‌های $(x,y) \in L \times L$ وجود دارد که هیچ یک از $A(x,j)$ و $A(y,j)$ اتفاق نمی‌افتد و با توجه به ادعا $D(x,y)^+ \geq ۴d(x,y)$ و $D(x,y)^- = ۰$ و این یعنی اینکه مثلث‌بندی فوق $(\epsilon, \frac{۳}{۴})$-مثلث‌بندی نیست و حکم ثابت می‌شود. پس کافی است ادعا را ثابت کنیم.

برای اثبات ادعا، $b \in S_x \cap S_y$ بگیرید و فرض کنید z کوچکترین جد مشترک x, y باشد. بنابراین اگر b از نسل z باشد، آنگاه دقیقا یکی از $d(x,b)$ یا $d(y,b)$ باید برابر با $d(x,y) = ۲^{k-j}$ باشد، که با فرض در تناقض است. بنابرای b از نسل z نیست و در نتیجه:

$$d(x,b) = d(y,b) \geq ۲^{k-j+۱} \Rightarrow D(x,y)^+ \geq ۴d(x,y), D(x,y)^- = ۰$$

و ادعا ثابت می‌شود. □

مراجع

[1] Robert Krauthgamer, *On Triangulation of Simple Networks* , 2007.

[2] J. M. Kleinberg, A. Slivkins and T. Wexler, *Triangulation and Embedding Using Small Sets of Beacons* , In 45th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, Page 444-453, 2004.

[3] Anupam Gupta and R. Ravi, *Algorithmic Applications of Metric Embeddings* , Lecture Note.