اثباتها و ردها

ایمره لاکاتوش
ترجمه : فرید بویا

چکیده

مؤلف در این کتاب از یک کلاس خیالی صحبت می‌کند. در این کلاس دانش‌آموزان و معلم مشغول بحث بر روی یک مسئله هستند. هر کدام از دانش‌آموزها، طرز فکر خاص خود را دارد. معلم نیز به عنوان شخص دانا، میان آنها داوری می‌کند. در این کتاب، فضای کلاس همان فضای علمی جامعه است. هر دانش آموز نماینده یک یا چند دانشمند با طرز فکر مشابه است، که حتی در بعضی موارد جملاتی را به زبان می‌آورد که دانشمند مذکور در کتاب خود یا جایی دیگر نقل کرده‌است. معلم، به مشابه یک جامعه علمی می‌ماند که بعضی طرز فکرها را به بعضی دیگر ترجیح می‌دهد و از بعضی دانش‌آموزها(دانشمندها) در رابطه با روششان سؤال می‌کند و آنها را زیر سؤال می‌برد. در حین پیش‌رفتن متن، طرز فکرها کم‌کم پخته‌تر می‌شوند و اشکالات وارد بر آنها کمتر می‌شود.

۱ یک مسئله و یک حدس

اشخاصی در کلاسی خیالی در حال بحث روی یک مسئله هستند : آیا رابطه‌ای منطقی بین تعداد رئوس(گوشه‌ها،v)، تعداد یالها(لبه ها،e) و تعداد وجه های(f) یک چند وجهی وجود دارد ؟ همانند رابطه‌ای که میان تعداد اضلاع و تعداد زاویه‌های یک چند ضلعی به صورت ($v=e$) وجود دارد ؟ آنها پس از مقدار زیادی سعی و خطا به این نتیجه می‌رسند که برای تمامی چند وجهی‌های منتظم، رابطه $v-e+f=۲$ برقرار است. یکی از آنها حدس می‌زند که این رابطه ممکن است برای تمام چندوجهی‌ها برقرار باشد. بقیه سعی می‌کنند که حدس او را رد کنند. آنها از راه‌های مختلف به حدس او هجوم می‌برند، ولی حدس محکم می‌ایستد. نتایج بدست‌آمده گمان این را می‌دهد که شاید این حدس قابل اثبات باشد.

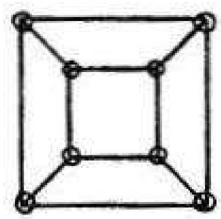
۲ یک اثبات

معلم : در جلسه قبل به یک حدس در مورد چند وجهی‌ها رسیدیم که طبق آن برای هر چند وجهی رابطه $v-e+f=۲$ برقرار است. با روشهای مختلف درستی آن را تحقیق کردیم. ولی هنوز آن را اثبات نکرده‌ایم. آیا کسی اثباتی پیدا کرده‌است؟

شاگرد سیگما: من به شخصه اعتراف می‌کنم که هنوز نتوانسته‌ام برای این قضیه اثباتی صریح پیدا کنم... با این حال درستی‌اش در حالت‌های بسیار زیادی تحقیق شده‌است و شکی نیست که این رابطه برای تمام احجام برقرار است. پس به نظر می‌رسد که گزاره به طور رضایت بخشی نمایش داده‌شده‌باشد. ولی اگر اثباتی دارید، خواهشاً آن را ارایه دهید.

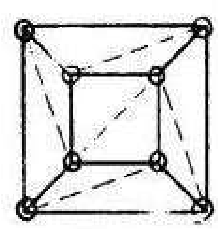
معلم: اتفاقاً من یک اثبات دارم. این اثبات مبنی بر این تجربه فکری است :

لم[1] ۱ : فرض کنید که چند وجهی خالی است و از لاستیک نرم و قابل انعطاف ساخته‌شده‌است. اگر ما یکی از وجه‌های آن را بُبریم، می‌توانیم وجه‌های باقیمانده را بکشیم و آنها را روی تخته سیاه بنشانیم، بدون اینکه به آنها صدمه بزنیم. وجه‌ها و یال‌ها ممکن است شکل اصلی خود را از دست‌بدهند، یال‌ها ممکن است دیگر خط راست نباشند و منحنی شده باشند، ولی v و e تغییر نخواهندکرد، پس رابطه $v-e+f=۲$ برای چند وجهی برقرار است، اگر و تنها اگر، رابطه $v-e+f=۱$ برای این شبکه مسطح برقرار باشد — یادتان هست که ما یک وجه را بُریدیم. (شکل ۱ شبکه مسطح را هنگامی که چندوجهی مورد نظر یک مکعب است، نشان می‌دهد)



شکل ۱

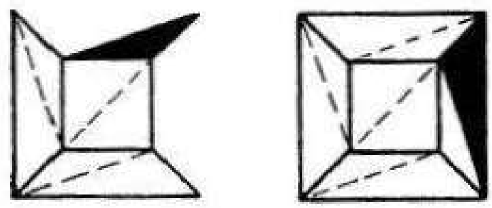
گام ۲ : حال ما شبکه خود که شبیه نقشه جغرافیا است را مثلث‌بندی می‌کنیم. برای چندضلعی‌های بدست‌آمده (که ممکن است از خطوط ناصاف تشکیل شده‌باشند)، تک‌تک قطررسم می‌کنیم (ممکن است قطرها هم ناصاف باشند). این کار را تا آنجا ادامه می‌دهیم که تمامی چندضلعی‌های باقیمانده مثلث شوند. با رسم هر قطر در شبکه، مقدارe و f هر کدام ۱ واحد اضافه می‌شود، لذا مجموع $(v-e+f)$ بی‌تغییر می‌ماند. (شکل ۲)



شکل ۲

[1] lemma

گام ۳ : از شبکه مثلث‌بندی‌شده، شروع به حذف تک‌تک مثلث‌ها می‌کنیم. در هنگام حذف یک مثلث، یا یک یال و یک ناحیه(وجه) را حذف می‌کنیم(شکل ۳ (آ))، یا دو یال و یک رأس و یک ناحیه را حذف می‌کنیم(شکل ۳ (ب)). پس رابطه $v-e+f=2$ قبل از حذف مثلث‌ها برقرار است، اگر و تنها اگر پس از حذف مثلث‌ها برقرار باشد. درآخر، تنها یک مثلث باقی‌می‌ماند. رابطه $v-e+f=2$ به وضوح برای یک مثلث برقرار است. لذا ما حدس خود را ثابت کرده‌ایم[۲].



(ب) (آ)

شکل ۳

شاگرد دلتا: شما باید دیگر این را یک قضیه بدانید. دیگر هیچ موضوع حدس‌گونه‌ای در مورد آن وجود ندارد.

شاگرد آلفا: من یک چیز را متوجه نمی‌شوم. من می‌توانم درک کنم که این تجربه قابل انجام بر روی یک مکعب یا یک چهاروجهی است، اما چگونه می‌توانم مطمئن باشم که بر روی هر چندوجهی قابل انجام است؟ برای مثال، آیا شما مطمئن هستید که هر چندوجهی، بعد از بریده‌شدن یک وجه، قابل نشاندن روی صفحه است؟ من به گام اول مشکوکم.

شاگرد بتا: آیا شما مطمئن هستید که در مثلث‌بندی نقشه، با اضافه کردن هر یال همواره یک ناحیه اضافه می‌شود؟ من به گام دوم مشکوکم.

شاگرد گاما: آیا شما مطمئن هستید که (در گام سوم) فقط دو حالت وجود دارد؟ آیا مطمئن هستید که در پایان (این گام) تنها یک مثلث باقی می‌ماند؟ من به گام سوم مشکوکم.

معلم : البته که مطمئن نیستم.

آلفا: پس حالا وضعیتمان از قبل بدتر است! به جای تنها یک حدس حالا حداقل ۳ حدس داریم! و شما اسم این را اثبات می‌گذارید!

معلم : اعتراف می‌کنم که واژه سنتی "اثبات" برای این "تجربه فکری" کمی، و البته به درستی، گمراه‌کننده است. من فکر نمی‌کنم که این (تجربه فکری) درستی این حدس را ثابت کند.

دلتا: پس (تجربه فکری) چکار می‌کند؟ فکر می‌کنید یک اثبات ریاضی چه چیزی را ثابت می‌کند؟

[۲] این اثبات متعلق به کوشی است.

معلم : این یک پرسش ظریف است که ما بعداً به آن جواب خواهیم‌داد. تا آن زمان، پیشنهاد می‌کنم که واژه فنی و مقدس "اثبات[۳]" را برای یک "تجربه فکری[۴]" یا همان "شبه آزمایش[۵]" نگه دارید — که به تجزیه حدس اولیه به زیرحدس‌ها یا لِم ها اشاره می‌کند، که باعث نشاندن حدس در یک قالب(شاید خیلی دور از موضوع) می‌شود. برای مثال "اثبات" ما، حدس اصلی در مورد کریستال‌ها و احجام را بر اساس ورقه‌های لاستیکی بیان می‌کند. دکارت و اویلر، پدران این حدس، قطعاً این (طرز فکر) را حتی در خواب هم ندیده‌بودند.

۳ ایراد گرفتن از اثبات بوسیله مثال های نقض موضعی که کلی نیستند

معلم: این تجزیه حدس (به زیر حدس ها) که توسط اثبات به آن اشاره شده‌بود، گستره‌های جدیدی برای تحقیق درستی، باز می‌کند. تجزیه باعث شده که حدس در فضای بازتری مورد انتقاد قرار گیرد. ما حالا به جای یک شانس، حداقل ۳ شانس برای مثال نقض داریم!

گاما: من قبلاً هم عدم علاقه خود نسبت به لم سوم ابراز کرده‌ام. فکر می‌کنم که ممکن است حالت‌های دیگری به هنگام حذف یک مثلث وجود داشته‌باشد.

معلم: مورد شک بودن دلیل بر معیوب بودن نیست.

گاما: حال آیا مثال نقض، عیب[۶] محسوب می‌شود؟(یا آن هم عیب نیست)

معلم: یقیناً. حدس‌ها به شک و عدم علاقه توجهی نمی‌کنند، ولی قطعاً نمی‌توانند به مثال نقض بی‌توجه باشند.

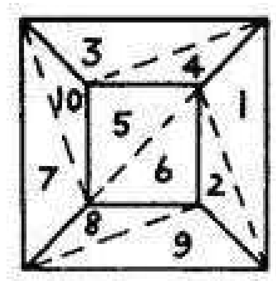
تتا: حدس‌ها به وضوح با کسانی که آن‌ها را ارائه داده‌اند، فرق دارند.

گاما: من یک مثال نقض ابتدایی ارائه می‌دهم. شبکه مثلثی را که به وسیله انجام دو گام اول بر روی یک مکعب ایجاد می‌شود را در نظر بگیرید.(شکل ۲) حال اگر من یک مثلث از وسط(و نه از حاشیه) شبکه بردارم، من یک مثلث(وجه) برداشته‌ام بدون اینکه هیچ یال یا رأسی حذف شود. پس لم سوم غلط است — نه تنها برای مکعب، بلکه برای هر چندوجهی بجز چهاروجهی(که در شبکه مسطح خود تنها مثلث های مرزی دارد). پس اثبات شما قضیه اویلر را تنها برای چهاروجهی ثابت می‌کند. ولی ما از قبل می‌دانستیم که چهاروجهی در رابطه اویلر صدق می‌کند، پس چرا آن‌را(دوباره) اثبات کنیم؟

معلم: حق با توست. اما دقت کن که مکعب که مثال نقض برای لم سوم بود، مثال نقض برای حدس اصلی نیست. تو ضعف بحث ما — اثبات — را نشان دادی، ولی حدس ما را باطل(رد) نکردی.

آلفا: پس با این حساب اثبات خود را دور خواهیدریخت؟

[۳] proof
[۴] thought-experiment
[۵] quasi-experiment
[۶] criticism



شکل ۴

معلم: خیر. عیب لزوماً نابودی نیست. من اثباتم را اصلاح می‌کنم تا بتواند در برابر عیب وارد شده مقاومت کند.

گاما: چگونه؟

معلم: بگذارید قبل از اینکه توضیح بدهم چگونه، شما را با این اصطلاحات آشنا کنم. "مثال نقض موضعی[۷]" را مثال نقضی می‌نامم که یک لم(و نه لزوماً حدس کلی) را رد می‌کند. "مثال نقض کلی[۸]" را مثال نقضی می‌نامم که حدس اصلی را رد می‌کند. پس مثال نقضی که تو آوردی، یک مثال نقض موضعی است و نه کلی. مثال نقض موضعی، عیب اثبات را بیان می‌کند، نه عیب حدس را.

گاما: پس حدس ممکن است درست باشد، ولی اثبات شما آنرا ثابت نمی‌کند.

معلم: ولی من به راحتی می‌توانم اثباتم را دقیق‌تر کنم و اشکال آن را رفع کنم. برای این کار من لم اشتباه را با یک لم کمی تغییر یافته جایگزین می‌کنم، که مثال نقض تو آن را رد نخواهدکرد. من دیگر ادعا نمی‌کنم که هر مثلثی که برداشته‌شود یکی از آن دو حالت شکل می‌گیرد. من تنها می‌گویم که در هر مرحله این حکم برای مثلث‌های مرزی برقرار است. بایستی قبول داشته‌باشید که تنها با یک تلاش جزئی اثبات دقیق شد.

گاما: من فکر نمی‌کنم که ملاحظه‌ی شما آن قدر هم جزیی بود، بلکه در واقع بسیار مبتکرانه بود. برای روشن شدن موضوع، نشان می‌دهم که این(علی رغم تصحیح) غلط است. شبکه مسطح شکل ۴ را در نظر بگیرید و مثلث‌ها را به ترتیب از ۱ تا ۸ جدا کنید. هنگام جدا کردن مثلث شماره ۸، مثلث ۸ یک مثلث مرزی است، در صورتی که هیچ یک از دو حالت ذکر شده برایش رخ نمی‌دهد: ۲ یال و یک ناحیه حذف می‌شوند، که در این صورت مجموع v-e+f تغییر می‌کند و دو مثلث جدا از هم ۹ و ۱۰ خواهیم داشت.

معلم: می‌توانم با گفتن این جمله که "منظورم از یک مثلث مرزی، مثلثی بود که حذفش شبکه را ناهم‌بند نکند"، آبروی خود را حفظ کنم. ولی اخلاق علمی و صداقت ذهنی اجازه استفاده ناجوانمردانه از جملاتی راکه با "منظورم از ..." شروع می‌شوند، نمی‌دهد. پس من اعتراف می‌کنم که بایستی نسخه دوم عملیات حذف مثلث را با یک نسخه سوم جای‌گزین کنم: در هر مرحله مثلثی را برمی‌دارم که حذف آن، مقدار v-e+f را تغییر ندهد.

[۷] local counterexample
[۸] global counterexample

کاپا: در کمال تواضع قبول دارم که لم مربوط به این عملیات(حذف مثلث) صحیح است: اگر ما مثلث‌ها را یک‌به‌یک طوری حذف کنیم که در هر مرحله v−e+f تغییر نکند، آنگاه v−e+f تغییر نمی‌کند.

معلم: نه(منظورم آن نیست). لم جدید این است که مثلث های شبکه ما می‌توانند طوری شماره‌گذاری شوند که با حذف آن‌ها به ترتیب، تا رسیدن به مثلث آخر، مقدار v−e+f تغییر نکند.

کاپا: ولی چگونه می‌توان این ترتیب را ساخت، با فرض اینکه حتی واقعا چنین ترتیبی وجودداشته‌باشد؟ نسخه اولیه تجربه فکری شما، دستور العمل(پیدا کردن ترتیب) را میداد: مثلث‌ها را به هر ترتیب دلخواه بردارید. نسخه تصحیح شده(دوم) هم این کار را میکرد: مثلث های مرزی را به هر ترتیب دلخواه بردارید. حال شما می‌گویید که بایستی به یک ترتیب خاص عمل کنیم، ولی نمی‌گویید که طبق کدام الگو، یا اینکه اصلاً این ترتیب وجود دارد یا خیر. پس تجربه فکری فرو می‌ریزد. شما "تحلیل اثبات[۹]" — که همان لیست لم‌هاست — را بهبود بخشیدید، ولی تجربه فکری که شما اسمش را "اثبات" گذاشتید، دیگر وجود ندارد و ناپدید شده‌است.

رو: فقط گام سوم ناپدیدشده‌است.

کاپا: علاوه براین، آیا شما(واقعاً) لم را بهبود بخشیدید؟ دو نسخه اول لم که ساده بودند، حداقل قبل از اینکه رد شوند درست به نظر می‌رسیدند؛ نسخه طولانی و وصله پینه شده جدید حتی ممکن هم به نظر نمیرسد. آیا واقعاً فکر می‌کنید که ممکن از رد شدن فرار کند(رد نشود)؟

معلم: گزاره‌های "ممکن" و یا حتی "بدیهتاً درست" معمولاً خیلی زود رد می‌شوند. این حدس‌های پیچیده و (ظاهراً)غیر ممکن و آبدیده شده در عیبجویی هستند که ممکن است درست باشند.

امگا: اگر حدس‌های پیچیده شما رد شدند و شما این دفعه نتوانستید آنها را با حدس‌های رد نشده دیگر جایگزین کنید چه؟ اگر موفق به بهبود صحبت‌های خود به وسیله وصله پینه نشدید چه؟ شما این دفعه توانستید با تعویض یکی از لم‌های خود از دست یک مثال نقض موضعی که کلی نبود فرار کنید. اگر دفعه بعدی نتوانستید فرار کنید چه؟

معلم: سؤال خوبی است، برنامه فردا(این سؤال) خواهدبود.

۴ ایراد گرفتن از اثبات بوسیله مثال های نقض کلی

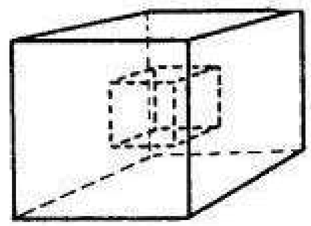
آلفا: من یک مثال نقض دارم که هم لم اول شما و هم خود حدس اصلی را نقض می‌کند.

معلم: صحیح! چه جالب. بگو ببینیم.

آلفا: حجمی را در نظر بگیرید که به وسیله دو مکعب محصور شده‌است — دو مکعب که یکی در داخل دیگری است، ولی با آن تماس پیدا نمی‌کند (شکل ۵). این مکعب توخالی، لم شماره یک را نقض می‌کند، چرا که با بریدن هیچ کدام از وجه‌ها، چه داخلی و چه خارجی، چندوجهی قابل نشاندن روی صفحه نمی‌شود. علاوه بر آن، برای هر

[۹] proof analysis

مکعب v−e+f=۲ است، پس برای این شکل v−e+f=۴ می‌شود.



شکل ۵

معلم: مثال خوبی بود. بگذارید اسمش را مثال نقض ۱ بگذاریم. خب حالا چه؟

۱.۴ رد حدس: روش تسلیم[۱۰]

گاما: جناب معلم، خونسردی شما من را متحیر می‌کند. یک مثال نقض همان قدر(خوب) یک حدس را رد می‌کند که ده مثال نقض آن را رد می‌کنند. حدس و اثباتش به کلی اشتباه از کار درآمدند. تسلیم شوید! باید تسلیم شوید. حدس اشتباه را دور بریزید و آن را فراموش کنید و یک مسیر جدید را امتحان کنید.

معلم: قبول دارم که با مثال نقض آلفا، ضربه سختی بر حدس وارد شد. ولی این درست نیست که اثبات "به کلی اشتباه" بود. اگر فعلاً، پیشنهاد قبلی من مبنی بر استفاده واژه "اثبات" برای یک "تجربه فکری" که باعث تجزیه حدس اصلی به چند زیرحدس می‌شود را قبول کنید، دیگر نیازی ندارید که هرجا سخن از آن آمد، از "تضمین درستی" سخن بگویید. اثبات من یقیناً فرمول اویلر را از دیدگاه اول ثابت کرد، ولی نه لزوماً از دیدگاه دوم. شما فقط به اثبات‌هایی علاقه دارید که آن چیزی که قرار است ثابت کنند را ثابت می‌کنند. من به (همه)اثبات‌ها علاقه دارم، حتی اگر نتوانند کار مورد نظر را انجام دهند. کریستف کلمب (که قرار بود به هند برسد)به هند نرسید، ولی چیز بسیار جالبی کشف کرد.

آلفا: پس بنا بر فلسفه شما — یک مثال نقض موضعی(و نه کلی) ایراد به اثبات است و نه به حدس — مثال نقض کلی ایراد به حدس است و نه لزوماً به اثبات. شما قبول می‌کنید که حدس خود را تسلیم کنید، ولی از اثبات خود دفاع می‌کنید. ولی اگر حدس اشتباه است، اثبات آن دقیقا چه چیزی را ثابت می‌کند؟!

گاما: مقایسه‌ای که با کریستف کلمب انجام دادید (اینجا) فرو می‌ریزد. قبول کردن یک مثال نقض بایستی به معنای تسلیم کامل باشد.

[۱۰] method of surrender

۲.۴ رد مثال نقض: روش تحریم هیولاها[۱۱]

دلتا: ولی چرا مثال نقض را قبول کنیم؟ ما حدس خود را ثابت کردیم — الان یک قضیه است. قبول دارم که با این چیز به اصطلاح "مثال نقض" تناقض دارد. یکی از آن‌ها بایستی کنار رود. ولی چرا قضیه کنار برود هنگامی که ثابت شده‌است؟ این "ایراد" است که باید کنار رود. این ایراد، جعلی است(معتبر نیست). یک جفت مکعب در دل هم، یک چندوجهی نیست؛ یک هیولا است. یک حالت غیر عادی، نه یک مثال نقض.

گاما: چرا نه؟ یک چندوجهی حجمی است که سطحش از چندضلعی‌ها تشکیل شده‌باشد. و مثال نقض من چنین خاصیتی دارد.

معلم: بگذارید اسمش را تعریف ۱ بگذاریم.

دلتا: تعریف تو صحیح نیست. یک چندوجهی بایستی یک رویه باشد که: وجه، رأس و یال داشته‌باشد و قابلیت تغییر شکل و نشانده‌شدن روی صفحه را داشته‌باشد. چند وجهی هیچ ربطی به مفهوم "حجم" ندارد، چند وجهی یک رویه تشکیل شده از یک دستگاه از چند ضلعی‌ها است.

معلم: این را تعریف ۲ بنامید.

دلتا: پس تو در واقع به ما ۲ تا چندوجهی نشان دادی — یکی کاملاً در داخل دیگری. یک زن باردار با یک بچه در شکم خود، یک مثال نقض برای گزاره "انسان‌ها یک سر دارند" نیست.

آلفا: عجب! مثال نقض من یک مفهوم جدید از چندوجهی به وجود آورد. یا اینکه جرأت این را داری که بگویی همواره منظورت از چندوجهی، یک رویه بوده‌است؟

معلم: بگذارید فعلاً تعریف شماره ۲ دلتا(از چندوجهی) را قبول کنیم. آیا می‌توانی باز هم فرض ما را رد کنی؟

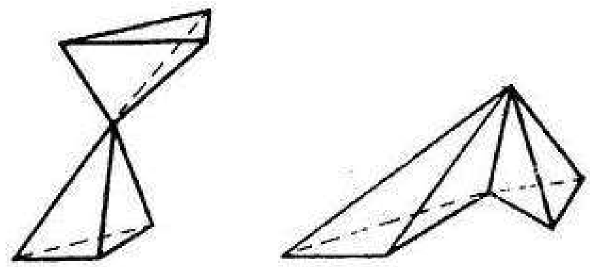
آلفا: یقیناً. دو چهاروجهی که در یک یال با هم اشتراک دارند(شکل ۶(آ)). یا دو چهاروجهی که در یک رأس با هم اشتراک دارند(شکل ۶(ب)). هر دوی این‌ها هم‌بند هستند، تنها یک رویه دارند و برای هر دوی آن‌ها $v-e+f=3$ است.

معلم: آن‌ها را مثال نقض های ۲ الف و ۲ ب بنامید.

دلتا: تخیلات منحرفت را تحسین می‌کنم، ولی قطعاً من نگفتم هر سیستمی از چندضلعی‌ها یک چندوجهی است. وقتی می‌گویم چندضلعی، منظورم یک سیستم از چندضلعی‌هاست که (۱) در هر یال دقیقاً دو وجه اشتراک داشته‌باشند و (۲) از داخل هر چندضلعی بتوان به داخل هر چندضلعی دیگر بدون برخورد با هیچ رأسی رفت. شکل اول تو با شرط ۱ ناسازگار است و رد می‌شود و شکل دوم تو با شرط ۲.

معلم: تعریف ۳.

[۱۱] the method of monster-barring



شکل ۶

آلفا: ابتکار منحرفت را تحسین میکنم که با ساختن تعریف پشت تعریف مانع از رد شدن ایده های ضعیف خود می‌شوی. چرا یک چندوجهی را صرفاً یک سیستم از چندضلعی‌ها تعریف نمی‌کنی که برای آن رابطه ۲=v−e+f برقرار باشد؟ این تعریف دقیق ...

کاپا: تعریف P.

آلفا: ... اختلاف را برای همیشه از میان خواهدبرد. دیگر نیازی برای بررسی موضوع نخواهدبود.

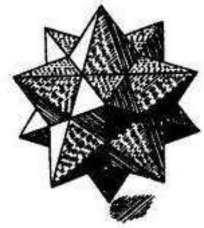
دلتا: ولی هیچ قضیه‌ای در دنیا وجود ندارد که به وسیله هیولاها نقض نشود.

معلم: ببخشید که بحثتان را قطع می‌کنم. همانطور که دیدید، رد کردن به وسیله مثال نقض، به معنی و تعریف اشیاء مورد بحث بستگی دارد. اگر بخواهیم که یک مثال نقض بی‌طرفانه (برای یک حدس)عیب باشد، بایستی در مورد تعاریف و معانی با هم تفاهم داشته‌باشیم. برای رسیدن به چنین تفاهمی، می‌توان هنگامی که سوء تفاهمی بر سر تعریف یک شیء پیش می‌آید، برای شیء مورد نظر یک تعریف دقیق ارائه داد. من به شخصه، واژه "چندوجهی" را تعریف نکردم. فرض کردم که شماها با مفهوم آن "آشنایی" دارید، یعنی می‌توانید چندوجهی را از غیرش تشخیص دهید — چیزی که بعضی منطقدان‌ها آن را دانستن بسط مفهوم چندوجهی می‌خوانند. این طور که پیداست، بسط مفهوم چندوجهی اصلاً واضح نبود: هنگامی که مثال های نقض یافت می‌شوند، تعاریف به طور مکرر پیشنهاد می‌شوند و مورد بحث قرار می‌گیرند. پیشنهاد می‌کنم که فعلاً تمامی تعاریف را با هم در نظر بگیریم و بحث در مورد اختلاف تعاریف و اختلاف نتایج حاصل از پذیرفتن هریک ازآنها را به بعد موکول کنیم. آیا کسی می‌تواند مثال نقضی ارائه بدهد که حتی با سخت‌گیرترین تعریف هم سازگار باشد؟

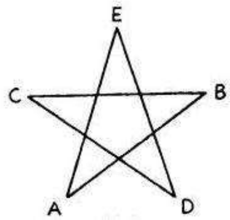
کاپا: با تعریف P ؟

معلم: بدون تعریف P.

گاما: من می‌توانم. به مثال نقض ۳ توجه کنید: یک چندوجهی ستاره‌گون[۱۲]، که اسمش را جوجه تیغی[۱۳] می‌گذارم (شکل ۷). این شکل از ۱۲ ستاره ۵رأسی[۱۴] تشکیل شده‌است (شکل ۸). ۱۲ رأس، ۳۰ یال و ۱۲ وجه پنج ضلعی دارد — می‌توانید خودتان چک کنید. از آنجا که قضیه دکارت-اویلر برای این شکل برقرار نیست و در اینجا $v-e+f=-6$ است، این قضیه نمی‌تواند درست باشد.



شکل ۷



شکل ۸

دلتا: چرا فکر می‌کنی که جوجه تیغی تو یک چند وجهی است؟

گاما: مگر نمی‌بینی؟ این یک چندوجهی است که وجوهش، ۱۲تا ستاره ۵رأسی هستند. در تعریف آخر تو نیز صدق می‌کند: این یک سیستم از چندضلعی‌ها به طوری که (۱) در هر یال دقیقاً دو چندضلعی اشتراک داشته باشند و (۲) از هر چندضلعی می‌توان به چندضلعی‌های دیگر رفت، بدون اینکه مجبور به عبور از رأسی باشیم.

دلتا: ولی (حالا)تو نمی‌دانی که یک چندضلعی چیست! یک چند ضلعی یک سیستم از یالهاست به طوری که (۱) در هر رأس دقیقاً دو یال اشتراک داشته‌باشند و (۲) یال ها، بجز در رأس ها، هیچ جا یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

معلم: بگذارید اسمش را تعریف ۴ بگذاریم.

گاما: نمی‌دانم که چرا شرط دوم را می‌گذاری. تعریف صحیح بایستی فقط شرط اول را داشته‌باشد.

معلم: تعریف ′۴.

گاما: شرط دوم هیچ ربطی به ذات چندضلعی ندارد. ببین: اگر من یکی از یال‌ها را (از محل تقاطع)کمی خم کنم، آنگاه ستاره ۵رأسی حتی با تعریف تو هم یک چندضلعی است. تو فرض می‌کنی که یک چندضلعی حتماً باید با گچ روی تخته سیاه کشیده‌شده‌باشد، در صورتی که بایستی آن را یک یک ساختمان چوبی فرض کنی: در این صورت واضح است که نقطه مشترکی که از آن صحبت می‌کردی، یک نقطه نیست، بلکه دو نقطه یکی بالای دیگری هستند(که هنگام تصویر شدن بر روی صفحه، روی هم افتاده اند). تو به وسیله مفهوم نشانده‌شدن چندضلعی در صفحه گمراه شده‌ای(در صورتی که لزوماً چنین شرطی نیست) — بایستی بگذاری که (چندضلعی)بال‌هایش را در فضا بگستراند.

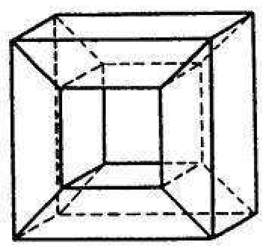
[۱۲] star-polyhedron
[۱۳] Urchin
[۱۴] star pentagon

دلتا: می‌توانی بگویی که مساحت یک ستاره ۵رأسی چقدر است؟ یا اینکه می‌گویی بعضی از چندضلعی‌ها اصلاً مساحت ندارند؟

گاما: مگر خود تو نبودی که می‌گفتی مفهوم چندوجهی هیچ ارتباطی با مفهوم حجم و احجام ندارد؟ حال چرا مفهوم چندضلعی را به مفهوم مساحت ربط می‌دهی؟ ما قبول کردیم که چندوجهی یک رویه بسته با تعدادی یال و رأس است — حال چرا قبول نمی‌کنی که یک چندضلعی، صرفاً یک منحنی بسته با تعدادی رأس است؟ ولی اگر به عقایدت پایبندی، من می‌توانم مساحت یک ستاره ۵رأسی را تعریف کنم.[۱۵]

معلم: بگذارید فعلاً این دعوا را کنار بگذاریم، و همانند قبل پیش برویم. دو تعریف آخر، ۴ و ′۴، را در نظر بگیرید. آیا کسی می‌تواند مثال نقضی بدهد که با هر دو تعریف چندضلعی‌ها سازگار باشد؟

آلفا: این هم یک مثال نقض. یک قاب عکس همانند شکل ۹ را در نظر بگیرید. این یک مثال نقض است که با هرکدام از تعاریفی که تا به حال گفته‌شده‌است، سازگار است. با این حال، اگر رئوس، یال‌ها و وجه‌های آن را بشمارید، می‌بینید که $v-e+f=0$.



شکل ۹

معلم: مثال نقض ۴.

بتا: این پایان کار حدس ماست. واقعاً افسوس دارد، چرا که برای حالت‌های خیلی زیادی درست بود و کار می‌کرد. ولی ظاهراً فقط وقتمان را تلف کردیم.

آلفا: دلتا؟ (چه شده؟) من واقعاً متعجب شدم. چیزی نمی‌گویی؟ نمی‌توانی این مثال نقض را (با یک تعریف جدید)رد کنی؟ فکر می‌کردم که هیچ قضیه‌ای در دنیا نباشد که تو نتوانی با یک حقه زبانی مناسب آن را از رد شدن نجات دهی. حال تسلیم شده‌ای؟ آیا بالاخره قبول کردی که چندوجهی‌های غیر اویلری نیز وجود دارند؟ احسنت!

دلتا: تو واقعا بایستی یک اسم مناسب برای موجودات غیر اویلریت پیدا کنی و آنها را "چندوجهی" صدا نکنی و ما را گمراه نکنی. ولی من کم‌کم دارم از هیولاهای تو خسته می‌شم و به اونا دیگه علاقه‌ای ندارم. من از "چندوجهی"های

[۱۵] به مقالات میستر(Meister) مراجعه کنید.

رقّت‌آور تو، که فرمول زیبای اویلر برای آنها برقرار نیست، متنفرم. من در ریاضیات به دنبال نظم و هماهنگی هستم، درحالیکه تو فقط بی نظمی و آشفتگی منتشر می‌کنی. روش‌های ما قابل انطباق نیستند.

آلفا: تو یک محافظه کار از مد افتاده هستی! تو هرج و مرج طلب‌ها را به خاطر شرارتشان در خراب کردن "نظم" و "هماهنگی" ات سرزنش می‌کنی، و مشکلات را با پیشنهادهای زبانی حل می‌کنی.

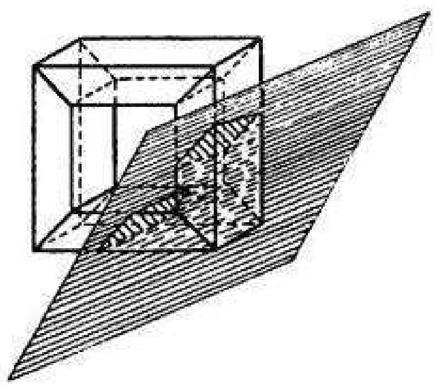
معلم: بیایید جدیدترین تعریف نجات دهنده را بشنویم.

آلفا: منظورتان آخرین حقه زبانی است؟ آخرین انقباض از مفهوم چندوجهی! دلتا به جای اینکه مسائل را حل کند، آنها را منحل می‌کند.

دلتا: من مفاهیم را منقبض نمی‌کنم. این تو هستی که مفاهیم را بسط میدهی. برای مثال، این قاب عکس اصلاً یک چندوجهی معتبر نیست.

آلفا: چرا؟

دلتا: یک نقطه دلخواه در "تونل" موجود در قاب(جایی که عکس قرار است باشد) انتخاب کن. یک صفحه از آن بگذران. خواهی دید که هر صفحه ای که انتخاب کنی، قاب عکس را در دو چند ضلعی کاملاً جدا از هم قطع می‌کند(شکل ۱۰).

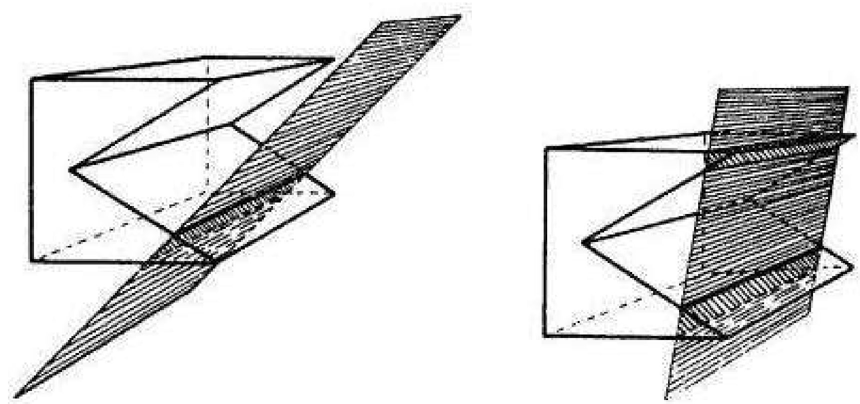


شکل ۱۰

آلفا: خب حالا چه؟

دلتا: وقتی که یک چندوجهی معتبر داریم، برای هر نقطه در فضا، حداقل یک صفحه وجود دارد که از آن نقطه میگذرد و چندوجهی را دقیقاً در یک چندضلعی قطع می‌کند. در مورد چندوجهی‌های محدب، برای هر صفحه و نقطه، این خاصیت برقرار است. در مورد چندوجهی‌های مقعر معمولی، برای بعضی نقاط، بعضی صفحات

هستند که چند سطح مقطع (با چندوجهی)دارند، ولی همواره صفحاتی هم وجود دارند که تنها یک سطح مقطع دارند(شکل‌های ۱۱(آ) و ۱۱(ب)). در مورد این قاب عکس، اگر نقطه را در درون تونل انتخاب کنیم، هر صفحه گذرنده از آن، دو سطح مقطع خواهد داشت. حال تو چگونه می‌توانی آنرا چندوجهی بنامی؟



(ب) (آ)

شکل ۱۱

معلم: مثل اینکه یک تعریف دیگر داریم، این دفعه یک تعریف ضمنی. آنرا تعریف ۵ بنامید.

آلفا: یک سری مثال نقض، یک سری تعریف متناظر با آنها. تعاریفی که هیچ چیز جدیدی ندارند، صرفا آیاتی در باره یک مفهوم قدیمی هستند، که به نظر می رسد به اندازه تعداد مثال نقض ها،شرط پنهان دارد(که آنرا از نقض شدن نجات میدهد). گزاره "برای هر چندوجهی $v-e+f=2$ است" به نظر غیر قابل بحث میرسد، یک حقیقت کهن و "جاودانه". عجیب است که روزگاری این یک حدس زیبا بود، پر از هیجان و مبارزه افکار. حال به خاطر تغییرها و تحریف‌های عجیب شما در تعاریف، این به یک سنت بی ارزش تبدیل شده‌است، یک تعصب پست.[از کلاس خارج می‌شود.]

دلتا: نمیفهمم چطور شخص قابلی مثل آلفا باید استعدادش را با عیبجویی از دیگران تلف کند. به نظر میرسد که او غرق در ساختن هیولاها باشد. ولی هیولاها هرگز باعث رشد ن‌می‌شوند، چه در دنیای واقعی و چه در دنیای افکار. تکامل همواره یک الگوی منظم دارد.

گاما: علم ژنتیک حرف تو را رد می‌کند. نشنیده ای که جهش‌های ژنتیکی که باعث تولید گیاهان و جانوران غیر عادی(هیولا) می‌شوند، نقش مهمی در تحولات عظیم سیر تکامل دارند؟ (نسل شناسان) این موجودات تکامل یافته و عجیب و غریب را "هیولاهای امیدوار" مینامند. به نظر من، مثال نقض‌های آلفا، گرچه هیولا بودند، ولی "هیولای امیدوار" بودند.

دلتا: به هرحال. آلفا تسلیم شد. دیگر هیولا نخواهیم دید.

گاما: من یک هیولای جدید دارم. این هیولا با تمامی شرایط در تعاریف ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ و ۵ مطابقت دارد، ولی برای آن $v-e+f=1$ است. این(مثال نقض ۵) یک استوانه ساده است. ۳ تا وجه دارد(بالا، پایین و کنار یا پوشه[۱۶])، ۲ تا یال دارد(۲ دایره در بالا و پایین) و رأسی ندارد. بر طبق تعاریف تو، این یک چندوجهی معتبراست: (۱) دقیقاً دو چندضلعی در هر یال برخورد دارند و (۲) از درون هر چند ضلعی به درون هر چندضلعی دیگر می‌توان رفت، بدون اینکه از یال یا رأسی بگذریم. و البته بایستی قبول کنی که چندضلعی‌ها هم معتبر هستند: (۱) دقیقاً دو یال در هر رأس برخورد دارند و (۲) یال‌ها هیچ نقطه اشتراکی با هم جز در رأس‌ها ندارند.

دلتا: آلفا مفاهیم را (فقط)بسط میداد، ولی تو (آنقدر آنها را بسط میدهی که)آنها را میدَری! "یال"های تو یال(معتبر) نیستند! هر یال دقیقاً دو رأس دارد!

معلم: تعریف ۶ ؟

گاما: ولی چرا وجود "یال هایی" با ۰ یا ۱ رأس را تکذیب می‌کنی؟ تو (در بحث‌های قبلی)مفاهیم را منقبض میکردی، ولی الان داری آنها را نابود می‌کنی، طوری که به زحمت چیزی (از مفهوم چندوجهی)باقی میماند!

دلتا: چرا پوچ بودن این به اصطلاح ابطال‌های خود را نمیبینید؟ تا به امروز، هر چندوجهی جدید(یا هر مفهوم جدید دیگر) که ابداع میشد، به نحو خودش در جایی کاربرد داشت ؛ امروزه چندوجهی ها(و مفاهیم جدید دیگر) فقط به خاطر عیبجویی از استدلال‌های پدرانمان ابداع می‌شوند، و هیچ فایده دیگری ندارند. بحث ما تبدیل به موزه جنین(هیولا)های ناقص الخلقه شده که چندوجهی‌های نجیب، در صورت داشتن یک گوشه بسیار کوچک از این موزه نیز بایستی بسیار خوشحال باشند!

گاما: من فکر می‌کنم که اگر میخواهیم در باره موضوعی عمیق شویم و آنرا بهتر بشناسیم، بایستی آنرا مطالعه کنیم نه در حالت عادی بلکه در حالت بحرانی و غیر عادی. اگر میخواهید بدن عادی و سالم را بشناسید، آنرا هنگامی که غیر عادی و مریض است مطالعه کنید. اگر میخواهید توابع را بشناسید، نقاط تکین آنها را مطالعه کنید. اگر میخواهید چندوجهی‌های معمولی را مطالعه کنید، چندوجهی‌های تندرو و غیرعادی را مطالعه کنید. اینگونه است که شخص می‌تواند تحلیل ریاضی را تا عمیق ترین نقاط و قلب موضوع پیش ببرد. حتی اگر در مورد هیولاها حق با تو باشد، آیا پوچ بودن روش "موقتی[۱۷]" خود را نمیبینی؟ اگر میخواهی بین "هیولاها" و "مثال‌های نقض" یک حد تعیین کنی، نمی‌توانی این حد را دائماً(هنگام یافت مثال نقض) تغییر دهی.

معلم: فکر می‌کنم که ما نباید استراتژی دلتا را در راستای مقابله با مثال نقض‌های کلی قبول کنیم، گرچه بایستی برای اجرای دقیق و عالی آن به او تبریک بگوییم. می‌توانیم به شایستگی اسم روش او را "روش تحریم هیولاها" بگذاریم. با استفاده از این روش، شخص می‌تواند هر مثال نقض برای حدس اصلی را با یک تعریف دوباره از چندوجهی، اجزای سازنده چندوجهی، یا اجرای سازنده اجزای سازنده چندوجهی، حذف کند، گاهی زیرکانه ولی همیشه "فی البداهه". ما بایستی به مثال‌های نقض احترام بیشتری بگذاریم، نه اینکه سرسختانه آنها را اخراج و تحریم کنیم و آنها را هیولا بنامیم. شاید بزرگترین اشتباه دلتا، تبعیض متعصبانه اش در تعبیر اثبات ریاضی باشد: او فکر

[۱۶] jacket
[۱۷] ad hoc

می‌کند که یک اثبات، لزوماً آن چیزی را که برای ثابت شدنش تنظیم شده، ثابت می‌کند(و نه چیز دیگری را). تفسیر من از اثبات، اجازه میدهد که یک حدس اشتباه "ثابت" شود، یعنی به زیرحدس هایی تجزیه شود. اگر حدس اشتباه باشد، آنگاه من قطعاً توقع دارم که یکی از زیرحدس‌ها اشتباه باشد. ولی همین تجزیه ممکن است همچنان جالب باشد! من ناراحت نمی‌شوم اگر مثال نقضی برای یک حدس "ثابت" شده پیدا شود ؛ من حتی علاقه مندم که یک حدس اشتباه را "ثابت" کنم!

تتا: من دیگه نیستم.

کاپا: او از کتاب مقدس پیروی می‌کند: "همه چیز را بررسی کنید، خوبها را نگه دارید."

۳.۴ بهبود حدس با استفاده از روش‌های تحریم استثناءها[۱۸] : تحریم جزء به جزء[۱۹] در مقابل عقب نشینی استراتژیک[۲۰] و نمایش مطمئن[۲۱]

بتا: استاد، فکر می‌کنم که شما میخواهید از آن سخنرانی‌های عجیبتان برای ما انجام دهید. با عرز پوزش به خاطر کم صبری، یک چیزی در سینه ام مانده است و بایستی آنرا بیرون بریزم.

معلم: ادامه بده. [آلفا دوباره وارد کلاس می‌شود.]

بتا: من بعضی از صحبت‌ها و استدلال‌های دلتا را احمقانه تشخیص میدهم، ولی به این باور رسیده ام که همه آنها از یک جای معقول و مستدل سرچشمه میگیرند. به نظر من، حدس ما درست است، ولی فقط در یک محدوده خاص، که استثناءها در آن نیستند. من با این کار که این استثناءها را "هیولا" یا "موجودات ناقص الخلقه" بنامیم مخالفم. این کار به این تصمیم اسلوب شناسانه(بد) منجر می‌شود که آنها را به نوبه خودشان مثال هایی جالب و شایسته بررسی تلقی نکنیم. ولی من با واژه "مثال نقض" هم مخالفم ؛ این اسم به درستی آنها را با مثال‌های تأیید کننده قضیه هم ارزش میخواند، ولی به یک نوعی بوی جنگ و دشمنی میدهد، به طوری که بعضی ها، مثل گاما، هنگام مواجهه با آنها وحشت می‌کنند و به این فکر میفتند که اثبات هایی زیبا و مبتکرانه را تماماً رها کنند. نه: آنها فقط "استثناء" هستند.

سیگما: حرف دل من را زدی. واژه "مثال نقض" نوعی تأثیر پرخاشگرانه دارد و به آنهایی که اثبات را ابداع کرده اند بی احترامی می‌کند. "استثناء" واژهٔ درست است. (به نظر من)به طور کلی سه نوع قضیه ریاضی وجود دارد :
۱. قضیه هایی که همواره درست هستند و هیچ محدودیت و استثنائی ندارند ؛ به طور مثال، مجموع زوایای داخلی هر مثلث مسطح دو برابر اندازه زاویه قائمه است.
۲. قضیه هایی که بر پایه یک یا چند اصل غلط بنا شده اند و هیچ جوره نمی‌توان آنها را قبول کرد.
۳. قضیه هایی که با اینکه بر اصول درست بنا شده اند، ولی با این حال محدودیت هایی و استثناءهایی در بعضی حالات دارند...

[۱۸] exception-barring methods
[۱۹] piecemeal exclusions
[۲۰] strategic withdrawal
[۲۱] playing for safety

اپسیلون: چی؟؟

سیگما: شخص نباید قضیه‌های غلط را با قضیه هایی که چند استثناء دارند، اشتباه بگیرد. همانطور که مَثَل میگوید: "استثناء، قاعده را ثابت می‌کند.[۲۲]"

اپسیلون (به کاپا): این کودن کیه؟ اون باید بره یکم منطق یاد بگیره.

کاپا (به اپسیلون): و یکم چندوجهی‌های غیر اویلری (یاد بگیره).

دلتا: باعث شرمساری است، ولی بایستی اعتراق کنم که در این مورد خاص، من و آلفا در یک جبهه هستیم. ما در مورد اینکه یک قضیه یا درست و یا غلط است تفاهم داشتیم و فقط در مورد قضیه اویلر با هم اختلاف داشتیم که درست است یا غلط. ولی سیگما از ما میخواهد که به وجود قضیه هایی "اصولاً" درست ولی شامل بعضی "استثناءها" اعتراف کنیم. قبول وجود مسالمت آمیز قضیه‌ها و استثناءها در کنار هم، همان رسیدن به هرج و مرج و بی نظمی در ریاضیات است.

آلفا: موافقم.

اتا: نمیخواستم که صحبت‌ها و استدلال‌های زیبای دلتا را قطع کنم، ولی فکر می‌کنم که مختصر توضیحی راجع به چگونگی پیشرفت ذهنی ام در طول زندگی، مفید باشد. در دوران مدرسه من یک — همانطور که شما اسمش را گذاشته اید — "هیولا تحریم کُن"[۲۳] بودم، نه برای دفاع در مقابل افرادی مثل آلفا، بلکه برای دفاع در مقابل افرادی مثل سیگما. یادم هست که زمانی در یک مجله داشتم در مورد قضیه اویلر میخواندم: "ریاضیدان‌های خبره اثبات هایی برای درستی قضیه در حالت کلی ارائه کرده اند. با این حال استثناءهایی وجود دارد... لازم است که به این استثناءها توجه(بیشتری) شود، چرا که حتی در بین مؤلف‌های جدید هم کمتر کسی آنها را عمیقاً میشناسد." با اینکه در کتاب‌ها و سخنرانی‌های هندسه همواره گفته می‌شود که قضیه زیبای اویلر $v-e+f=۲$ "محدودیت هایی دارد"، یا اینکه "به نظر نمیرسد صحیح باشد"، با این حال شخص هیچ گاه دلیل اصلی (وجود)این استثناءها را نمیفهمد. من این "استثناءها" را خیلی دقیق مطالعه کردم و ملاحظه کردم که آنها با تعاریف اصلی مفاهیم موجود در مسئله همخوانی ندارند. پس اثبات و قضیه دوباره برقرار می‌شوند و وجود همزمان و هرج و مرج گونه قضایا و استثناءها از میان میرود.

آلفا: می‌توانی بگویی که به خاطر شخصیت هرج و مرج طلب سیگما، این کار(تحریم هیولا) را کردی، ولی این نه تنها توجیه کافی نیست، بلکه حتی بهانه خوبی هم نیست. چرا با پذیرفتن اعتبار مثال نقض‌ها و رد کردن قضیه و اثبات هرج و مرج را برطرف نمی‌کنی؟

اتا: چرا باید اثبات را رد کنم؟ من هیچ چیز اشتباهی در آن نمیبینم. تو میبینی؟ تحریم هیولا(من) به نظرم منطقی تر از تحریم اثبات(تو) می آید.

معلم: این بحث نشان داد که تحریم هیولا، همراهان بیشتری را جذب خواهد کرد، اگر از دیدگاه اتا به آن نگاه

[۲۲] The exception proves the rule.
[۲۳] monster-barrer

شود. ولی بیایید به بتا و سیگما برگردیم. بتا مثال‌های نقض را استثناء نامید. سیگما با او موافق بود و...

بتا: خوشحالم که سیگما با من موافق بود، ولی من با نظر سیگما موافق نیستم. یقیناً ۳نوع قضیه وجود دارد: صحیح، نومیدانه غلط و امیدوارانه غلط. این نوع آخر قضیه‌ها را می‌توان با افزودن یک شرط محدود کننده که استثناءها را ذکر می‌کند، به قضیه‌های صحیح تبدیل کرد. من هیچگاه به فرمول‌ها یک محدوده درستی نامشخص نسبت نمیدهم. در حقیقت، اکثر فرمول‌ها صحیح هستند، اگر بعضی شرایط برقرار باشند. با یافتن این شرایط و البته مشخص کردن دقیق معانی واژه هایی که استفاده می‌کنم، تمامی شک و بلاتکلیفی را از بین میبرم. پس همانطور که میبینید، من هرگز از وجود مسالمت آمیز فرمول‌های بهبود نیافته(نوع آخر) و استثناءها حمایت نمی‌کنم. من فرمول هایم را بهبود میبخشم و آنها را به فرمول‌های بی نقص، همانند فرمول‌های نوع اول سیگما تبدیل می‌کنم. در واقع من روش تحریم هیولاها را قبول دارم، تا جایی که به من محدوده درستی حدس اصلی را نشان بدهد ؛ و من آنرا رد می‌کنم، در جایی که از آن به عنوان یک روش زبانی برای نجات قضیه‌های "دلپسند" استفاده شود. این دو قابلیت روش دلتا بایستی از هم جدا نگه داشته شوند. من اسم روشم را، که مشخصه اش اولین قابلیت روش قبلی است، روش "تحریم استثناءها" میگذارم. من از این روش استفاده می‌کنم تا دقیقاً محدوده ای که در آن قضیه اویلر برقرار است را پیدا کنم.

معلم: این "محدوده دقیق" که قولش را داده بودی چیست؟ "فرمول دقیق" تو چیست؟

بتا: برای تمامی چندوجهی هایی که حفره[۲۴] (همانند مکعب‌های در هم) یا تونل[۲۵] (همانند قاب عکس) نداشته‌باشند، v−e+f=۲ است.

معلم: مطمئنی؟

بتا: بله، مطمئنم.

معلم: در مورد چهاروجهی‌های دوقلو چه میگویی؟

بتا: ببخشید. برای تمامی چندوجهی هایی که حفره یا تونل یا ساختمان چندگانه نداشته‌باشند، v−e+f=۲ است.

معلم: میفهمم. من با خط مشی تو در رابطه با بهبود حدس، به جای قبول یا رد آن، موافقم. من آن را هم به روش تسلیم و هم به روش تحریم هیولاها ترجیح میدهم. با این حال، من دو ایراد در آن میبینم. اول اینکه ادعای تو مبنی بر اینکه روشت نه تنها حدس‌ها را بهبود میبخشد، بلکه آنها را بی نقص می‌کند، غیر قابل دفاع است.

بتا: صحیح؟

معلم: بایستی اعتراف کنی که هر نسخه جدید از حدس تو، حذف فی البداهه یک سری مثال نقض است که به تازگی یافت شده اند. هنگامی که در مقابل مکعب‌های درون هم به مشکل بر میخوری، چندوجهی‌های حفره دار را حذف می‌کنی. وقتی که قاب عکس را مشاهده می‌کنی، چندوجهی‌های تونل دار را حذف می‌کنی. من ذهن باز و هوشیار تو را تحسین می‌کنم؛ مشاهده این استثناءها (و نتیجه گرفتن از آنها)بسیار خوب است، ولی فکر می‌کنم که

[۲۴] cavity
[۲۵] tunnel

ارزشش را داشته‌باشد که کمی اسلوب در روشت — که در آن کورمالانه به دنبال استثناءها میگردی — تزریق کنی. این خوب است که اعتراف می‌کنی گزاره "تمامی چندوجهی‌ها اویلری اند" فقط یک حدس است. ولی چرا به گزاره "تمامی چندوجهی‌های بدون حفره و تونل اویلری اند" شأن یک قضیه را میدهی(که دیگر حدس نیست)؟ چگونه می‌توانی مطمئن باشی که تمامی استثناءها را پیدا کرده ای؟

بتا: آیا می‌توانید یکی را که من در نظر نگرفتم بگویید؟

آلفا: جوجه تیغی من؟

گاما: و استوانه من؟

معلم: من حتی به یک استثناء خاص برای نشان دادن (درستی)استدلالم نیاز ندارم. استدلال من در مورد "احتمال" وجود چنین استثناءهایی بود.

بتا: ممکن است حق با شما باشد. نمی‌توان دائماً موضع خود را (به هنگام ظهور یک مثال نقض جدید)عوض کرد. نمی‌توان گفت که: اگر هیچ استثنائی رخ نداد، قضیه را کلاً درست مینامیم. ولی اگر بعداً در هر زمانی استثنائی رخ داد، آنگاه برای آن استثناء هم قائل شویم. بگذارید ببینم. ابتدا حدس زدیم که برای همه چندوجهی‌ها $v-e+f=2$ است، چونکه آنرا برای مکعب، هشت وجهی، هرم و منشور درست یافتیم.قطعاً این روش خام نتیجه گیری کل از جزء قابل قبول نیست. جای تعجب نیست که استثناءها ظاهر شدند ؛ بلکه حیرت آور است که چرا خیلی بیشتر از این‌ها قبل تر یافت نشد. به نظر من این به این خاطر بود که ما بیشتر سرگرم چندوجهی‌های محدب بودیم. به محض اینکه چندوجهی‌های دیگر پدیدار شدند، تعمیم هایمان دیگر صحیح نبودند. پس به جای اینکه استثناءها را جزء به جزء تحریم کنم، یک خط مرز معتدل ولی مطمئن میکشم: "تمامی چندوجهی‌های محدب، اویلری هستند." امیدوارم که قبول داشته‌باشید که این دیگر هیچ چیز حدس گونه ای ندارد و یک قضیه است.

گاما: استوانه من چه؟ این محدب است!

بتا: حرفت خنده دار است!

معلم: بیایید فعلاً استوانه را فراموش کنیم. می‌توانیم بدون آن هم مقداری ایراد وارد کنیم. در این نسخه جدید و بهبود یافته روش تحریم استثناءها که بتا آنرا خیلی چابک در جواب به عیب جویی من ابداع کرد، عقب نشینی جزء به جزء جایش را به یک عقب نشینی استراتژیک به مکانی داده است که امید است یک دژ محکم برای حدس باشد. تو داری یک نمایش مطمئن پیاده می‌کنی. ولی آیا واقعاً آنقدر که ادعا می‌کنی (به درستی حرفت)مطمئن هستی؟ تو همچنان هیچ تضمینی نداری که دیگر هیچ استثنائی در محدوده ات نخواهد بود. از آن طرف، ممکن است که خیلی افراطی عقب نشینی کرده باشی و تعداد زیادی چندوجهی اویلری را پشت دیوارها جا گذاشته باشی. حدس اولیه ما یک اغراق بود، ولی قضیه "تکمیل شده" تو از نظر من خیلی شبیه دست کم گرفتن است، با این حال نمی‌توانی مطمئن باشی که اغراق هم نیست.

ولی من میخواهم که ایراد دومم را هم وارد کنم: استدلال تو به اثبات مراجعه نمی‌کند ؛ در هنگام حدس زدن محدوده درستی حدس، ظاهراً هیچ نیازی به اثبات نداشتی. مطمئنّاً فکر نمی‌کنی که اثبات‌ها زائد و اضافی هستند.

این طور فکر می‌کنی؟

بتا: من هرگز چنین حرفی نزدم.

معلم: نه نزدی. ولی تو ملاحظه کردی که اثبات ما، حدس اصلی را ثابت نمی‌کند. حال آیا حدس بهبود یافته تو را ثابت می‌کند؟

بتا: خب...

اتا: استاد، بابت این سخنرانی از شما ممنونم. شرمساری بتا، به وضوح برتری روش بدنام شده تحریم هیولاها را نشان میدهد. به خاطر اینکه ما بر این باوریم که اثبات، آن چیزی را ثابت می‌کند که قرار است ثابت کند و جوابمان صریح و بدون ابهام است. ما اجازه نمیدهیم که مثال نقض‌های نافرمان، اثبات‌های قابل احترام را آزادانه ویران کنند، حتی اگر در لباس مبدل یک استثناء "نجیب" باشند.

بتا: من اصلاً شرمسار نمی‌شوم اگر مجبور باشم که اسلوبم را در مواجهه با عیب جویی به زحمت درست کنم، بهبود ببخشم و — ببخشید استاد — بی نقص کنم. حرف من این است. من حدس اصلی را رد می‌کنم، چرا که استثناءهایی برایش وجود دارد. همچنین اثبات را هم رد می‌کنم، چرا که همان استثناءها، برای حداقل یکی از لم‌ها هم استثناء هستند. (در اصطلاحات شما اینطوری ترجمه می‌شود: یک مثال نقض کلی حتما یک مثال نقض موضعی نیز هست.) آلفا در این مرحله متوقف می‌شود، چرا که رد حدس نیازهای ذهنی او را به طور کامل ارضاء می‌کند. ولی من ادامه میدهم. با ایجاد یک محدوده مناسب برای حدس و اثبات، من حدس را بی نقص میسازم، که حالا دیگر صحیح می‌شود، و اثبات اساساً معتبر را بی نقص میسازم، که دیگر "محکم" می‌شود و به وضوح دیگر هیچ لم غلطی نخواهد داشت. به عنوان مثال، مشاهده کردیم که هر چندوجهی بعد از حذف یک وجه قابل نشاندن روی صفحه نیست. ولی برای هر چندوجهی محدب چنین کاری را می‌توان انجام داد. من می‌توانم به درستی حدس بی نقص شده و محکم اثبات شده ام را یک "قضیه" بنامم. دوباره میگویم: "تمامی چندوجهی‌های محدب اویلری هستند." برای چندوجهی‌های محدب، تمامی لم‌ها به وضوح درست هستند و اثبات، که قبلاً در دامنه اشتباه خود محکم نبود، در دامنه محدود شده برای چندوجهی‌های محدب محکم خواهد بود.پس استاد، من سؤال شما را جواب دادم.

معلم: پس لم ها، که زمانی قبل از پیدایش استثناءها درست به نظر میرسیدند، دوباره به وضوح درست به نظر میرسند... تا اینکه یک استثناء دیگر پیدا شود. اعتراف می‌کنی که "تمام چندوجهی‌ها اویلری اند" حدس (خالی)بود ؛ همین الان هم اعتراف کردی که "تمام چندوجهی‌های بدون حفره و تونل اویلری اند" هم حدس بود ؛ چرا اعتراف نمی‌کنی که "تمام چندوجهی‌های محدب اویلری هستند" هم حدس است؟!

بتا: این دفعه "حدس" نیست، بلکه "بصیرت" است!

معلم: من از "بصیرت" گستاخانه ات متنفرم. من به حدس زدن هوشیارانه احترام میگذارم، به خاطر اینکه از بهترین طبیعت‌های آدمی سرچشمه میگیرد: شجاعت و فروتنی.

بتا: من یک قضیه ارائه کردم: "تمام چندوجهی‌های محدب اویلری اند." شما فقط پند و موعظه دادید. آیا می‌توانید یک مثال نقض ارائه دهید؟

معلم: نمی‌توانی مطمئن باشی که این کار را نخواهم کرد. تو حدس اصلی را بهبود بخشیدی، ولی نمی‌توانی ادعا کنی که آنرا بی نقص کردی — که به استحکام کامل در اثبات خود رسیدی.

بتا: شما می‌توانید؟

من نیز نمی‌توانم. ولی من فکر می‌کنم که روش من برای بهبود حدس‌ها از روش تو بهتر باشد، چرا که من یک پیوستگی و فعل و انفعال واقعی بین اثبات‌ها و مثال نقض‌ها برقرار می‌کنم.

بتا: آماده یادگیری هستم.

۴.۴ روش تعدیل هیولاها[۲۶]

رو: می‌شود من هم در بحث شرکت کنم؟

معلم: یقیناً.

رو: قبول دارم که بایستی روش "تحریم هیولاها" دلتا را، به عنوان یک اسلوب کلی، رد کنیم، چرا که اصلاً "هیولا"ها را جدی نمیگیرد. بتا نیز "استثناء"ها را جدی نمیگیرد، چرا که او صرفاً آنها را لیست می‌کند و سپس به یک جای امن عقب نشینی می‌کند. لذا هر دوی این روشها، تنها به یک سری از اشیاء ویژه و محدود علاقه دارند. روش من بین اشیاء تبعیض قائل نمی‌شود. می‌توانم نشان دهم که با نگاه دقیقتر و بررسی بیشتر، استثناءها دیگر استثناء نخواهند بود و قضیه اویلر برای آنها برقرار خواهد بود.

معلم: جدی؟

آلفا: چطور ممکن است که مثال نقض ۳ من، جوجه تیغی(شکل ۵)، یک چندوجهی اویلری باشد؟ در حالیکه ۱۲ وجه به شکل ستاره ۵رأسی دارد...

رو: من هیچ "ستاره ۵رأسی" نمیبینم. آیا متوجه نیستید که این چندوجهی در واقع وجه هایش مثلث هستند؟ ۶۰ وجه مثلثی داریم، همچنین ۹۰ یال و ۳۲ رأس که لذا "مشخصه اویلر" برای آن ۲ می‌شود. ۱۲ ستاره ۵رأسی، ۳۰ یال و ۱۲ رأس یک خیال بود. هیولاها وجود ندارند، این ما هستیم که تعبیرهای وحشتناک انجام میدهیم.شخص بایستی ذهن خود را از توهمات منحرف کننده پاک کند، بایستی یاد بگیرد که چگونه درست ببیند و آنچه را که میبیند درست تعریف کند. روش من "درمانی" است: هرگاه — به اشتباه — یک مثال نقض دیدید، به شما یاد میدهم که چگونه آنرا به صورت یک مثال تأیید کننده ببینید. من خیالات وحشتناک شما را تعدیل می‌کنم...

آلفا: استاد! خواهشاً هر چه زودتر روش خود را ارائه دهید، قبل از اینکه رو، ما را شستشوی مغزی بدهد!

معلم: بگذارید ادامه دهد.

[۲۶] the method of monster-adjustment

رو: منظورم را رساندم.

گاما: می‌توانی راجع به اشکالات روش دلتا بیشتر توضیح بدهی؟ هر دوی شما هیولاها را اخراج کردید...

رو: دلتا گول توهمات شما را خورد. او قبول کرد که جوجه تیغی تو، ۱۲ وجه، ۳۰ یال و ۱۲ رأس دارد و غیر اویلری است. ولی چنین تعبیری(وجوه ستاره گون) از جوجه تیغی اشتباه است. این نقش جوجه تیغی بر روی یک ذهن سالم و خالص نیست، بلکه نقش منحرف شده آن بر روی یک ذهن مریض و رنجور است.

کاپا: اما چگونه می‌توانی ذهن‌های سالم را از ذهن‌های ناسالم و تعابیر منطقی را از تعابیر وحشتناک تشخیص بدهی؟

رو: چگونه ممکن است که آنها را غاطی کنی؟

سیگما: ببین رو، آیا واقعاً فکر می‌کنی که آلفا هیچ گاه جوجه تیغی خود را به شکل یک چندوجهی با وجوه مثلثی ندیده است؟ البته که ممکن است دیده باشد. ولی یک بررسی دقیقتر(از جوجه تیغی) نشان میدهد که این وجوه مثلثی، ۵ تا ۵ تا در یک صفحه مشترک هستند و یک پنج ضلعی منتظم را — همانند قلب — درمیان خود و در وسط جسم مخفی دارند. این ۵ مثلث، به همراه پنج ضلعی منتظم وسطشان، ستاره ۵رأسی معروف را میسازند، که بنا به گفته پاراسلسوس[۲۷]، نشانه سلامت است...

رو: خرافات!

سیگما: لذا راز جوجه تیغی برای ذهن سالم آشکار می‌شود: (جوجه تیغی)یک جسم منظم است که تابحال زیاد بدان فکر نشده‌است. (فکر کردن به)تقارن‌های زیبای آن ممکن است رازهای توازن طبیعت را برایمان آشکار سازد...

آلفا: از دفاعت ممنونم سیگما. باز دوباره متقاعد شدم که دشمنان کمتر از دوستان آدم را شرمنده می‌کنند. البته وجوه چندوجهی من می‌تواند مثلث یا ستاره ۵رأسی تعبیر شود. میخواهم که هر دو تعبیر را بطور مساوی بپذیرم...

کاپا: واقعاً؟

دلتا: ولی مطمئناً (فقط)یکی از آنها تعبیرِ درست است!

آلفا: میخواهم هر دو تعبیر را بطور مساوی بپذیرم، ولی یکی از آنها مسلماً یک مثال نقض کلی برای حدس اویلر است. چرا فقط تعبیری که با عقاید رو سازگار است را بپذیریم؟ بهرحال. استاد می‌شود خواهش کنم که حالا روش خود را توضیح دهید؟

[۲۷] Paracelsus

۵.۴ بهبود حدس با روش تلفیق لم[۲۸]. حدس برخاسته از اثبات در مقابل حدس ساده

معلم: بیایید به (مثال نقض) قاب عکس برگردیم. من به شخصه آنرا یک مثال نقض کلی درست برای حدس اویلر میدانم، و البته یک مثال نقض موضعی درست برای لم اول اثباتم.

گاما: ببخشید استاد، ولی قاب عکس چگونه لم اول را نقض می‌کند؟

معلم: یک وجه را بردارید و سعی کنید که آنرا روی صفحه بنشانید. موفق نخواهید شد.

آلفا: بگذارید کمی کمکتان کنم. فقط آن چندوجهی هایی که قابل نشاندن روی سطح کره هستند، بعد از حذف یک وجه قابل نشاندن روی صفحه میباشند(و برعکس).

واضح است که اگر یک چندوجهی روی کره نشانده شده باشد، حذف یک وجه از آن باعث نشانده شدن آن روی صفحه می‌شود؛ و برعکس، هر چند وجهی با یک وجه حذف شده نشانده شده روی صفحه را می‌توان مچاله کرد و روی کره منهای قطب شمال آن نشاند و وجه حذف شده را روی قطب نشاند. ولی قاب عکس هیچگاه قابل نشاندن روی کره نیست؛ آنرا فقط روی چنبره[۲۹] می‌توان نشاند.

معلم: بسیار خوب. حالا، برعکس دلتا، من این قاب عکس را بعنوان عیب برای حدس قبول می‌کنم. لذا من حدس اولیه را غلط اعلام می‌کنم، ولی فوراً یک نسخه محدود و اصلاح شده از آن را ارائه میدهم: حدس دکارت-اویلر برای چندوجهی‌های "ساده" برقرار است. یک چند وجهی "ساده" است، اگر بعد از حذف یک وجه، بتوان آنرا روی صفحه نشاند. لذا مقداری از حدس اولیه را حفظ کرده ایم. داریم: "مشخصه اویلر"برای چندوجهی‌های "ساده" برابر ۲ است.این فرضیه نه با مکعب‌های درهم، نه با چهاروجهی‌های دوقلو و نه با جوجه تیغی، با هیچکدام نقض ن‌می‌شود، چرا که هیچکدام از آنها "ساده" نیستند.

لذا در حالیکه روش تحریم استثناءها، دامنه حدس اصلی و لم رد شده را به یک دامنه مشترک و مطمئن محدود می‌کند، و لذا مثال نقض را هم برای حدس و هم برای لم عیب می‌داند، روش تلفیق لم من از اثبات حمایت می‌کند ولی دامنه حدس اصلی را به دامنه لم رد شده محدود می‌کند. در واقع، هنگام مواجهه با یک مثال نقض که هم کلی و هم موضعی است،شخصی که از روش تحریم استثناءها استفاده می‌کند، بایستی هم لم‌ها و هم حدس اصلی را اصلاح کند، در صورتیکه من(کسیکه از روش تلفیق لم استفاده می‌کند) فقط حدس اصلی را اصلاح می‌کنم و لم‌ها ثابت میمانند. متوجه هستید؟

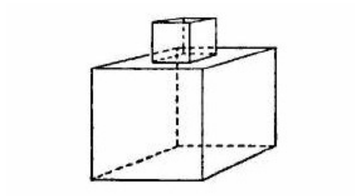
آلفا: بله، فکر می‌کنم. برای اینکه نشان دهم که فهمیده ام، حدس شما را رد می‌کنم.

معلم: روشم را یا حدس بهبود یافته ام را؟

آلفا: حدس بهبود یافته را.

معلم: پس احتمالاً هنوز روش من را درک نکرده ای. ولی مثال نقض ات را بیاور ببینیم.

[۲۸] the method of lemma-incorporation
[۲۹] Torus

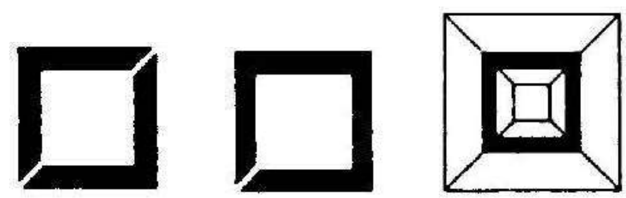


شکل ۱۲

آلفا: یک مکعب را در نظر بگیرید که یک مکعب کوچکتر روی آن نشسته است(شکل ۱۲). این چندوجهی با تمامی تعاریف ما — تعریف ۱، ۲، ۳، ۴، ′۴ و ۵ — سازگار است و لذا یک چندوجهی واقعی است. و ساده است، چرا که می‌توان با حذف یک وجه آنرا روی صفحه نشاند. پس بنا بر حدس بهبود یافته شما، بایستی مشخصه اویلرش برابر ۲ باشد. با اینحال ۱۶ رأس، ۲۴ یال و ۱۱ وجه دارد و مشخصه اویلرش برابر ۳ میباشد. این یک مثال نقض کلی برای حدس بهبود یافته شما، و همچنین برای اولین حدس بتا با استفاده از روش تحریم استثناءها است. این چندوجهی، با وجود اینکه هیچ حفره یا تونلی ندارد و ساختمان چندگانه هم ندارد، باز هم اویلری نیست.

دلتا: بیایید این مکعب کاکُل دار[30] را مثال نقض ۶ بنامیم.

معلم: تو حدس بهبود یافته من رو ابطال کردی، ولی روش بهبود من را نابود نکردی. بایستی دوباره اثبات را بررسی کنم، و ببینم که چرا در مورد چندوجهی تو غلط از آب در آمد. حتماً یک لم دیگر غلط است.



(ج) (ب) (آ)

شکل ۱۳

بتا: البته که اینطور است. من همیشه به لم دوم شک داشته ام. این لم فرض می‌کند که در هنگام مثلث بندی نقشه، با کشیدن یک قطر، همواره تعداد یالها و ناحیه‌ها یکی اضافه می‌شود. ولی این درست نیست. اگر شبکه مسطح مکعب کاکل دار را بکشیم، یک ناحیه حلقه-مانند[31]مشاهده می‌کنیم(شکل ۱۳ (آ)). در این ناحیه، کشیدن هیچ قطری باعث اضافه شدن ناحیه‌ها نمی‌شود(شکل ۱۳ (ب)). بایستی حتماً ۲ قطر رسم کنیم تا ناحیه‌ها یکی اضافه شود(شکل ۱۳ (ج)).

[30] crested cube
[31] ring-shaped

معلم: آفرین. حالا من باید حدسم را محدودتر کنم...

بتا: میدانم که میخواهید چکار کنید. میخواهید بگویید که "چندوجهی‌های ساده با وجوه مثلثی اویلری اند". میخواهید از شر مثلث بندی خلاص شوید؛ و شما این لم را (مثل لم قبل)به یک شرط تبدیل می‌کنید.

معلم: خیر، اشتباه می‌کنی. قبل از اینکه اشتباهت را بگویم، میخواهم کمی راجع به روشت(تحریم استثناءها) حرف بزنم. وقتی دامنه حدست را به یک حوزه "امن" محدود می‌کنی، هیچ بررسی درستی از اثبات انجام نمیدهی. در واقع، روش تو اصلا نیازی به این کار ندارد. این جمله غیر حرفه ای که "در ناحیه محدود من، لمها همگی درست هستند، هرچه که میخواهند باشند"، تو را راضی می‌کند، ولی مرا نه. من لمی که توسط مثال نقض رد شده بود را به درون حدس میاورم، لذا اثبات را به دقت بررسی می‌کنم و یک نسخه تصحیح شده از لم را ارائه میدهم. لمهای رد شده لذا در حدس بهبود یافته من ظاهر می‌شوند. روش تو، تو را مجبور نمی‌کند که به زحمت بیفتی و اثبات را به دقت بررسی کنی، چرا که اثبات اصلاً در حدس بهبود یافته تو ظاهر نمی‌شود، آن طور که در حدس من ظاهر می‌شود. حال به پیشنهاد فعلی ات برمیگردم. لمی که بوسیله ناحیه حلقه-مانند نقض شد، این نبود که "همه وجوه مثلث هستند"، بلکه این بود که "هر ناحیه با کشیدن هر قطری به دو ناحیه تقسیم می‌شود". من این لم را به شرط تبدیل می‌کنم. بیایید هر ناحیه که این شرط را دارد(با اضافه کردن هر قطر، به دو ناحیه تقسیم می‌شود) را "واقعاً همبند"[۳۲] بنامیم. در این صورت، بهبود دوم من به این صورت خواهد بود: برای یک چندوجهی ساده، که تمام وجوهش "واقعاً همبند" هستند، $v-e+f=۲$. علت اشتباه عجولانه ات درباره من، روشت است. روش تو به تو نمی آموزد که اثبات را به دقت تحلیل کنی. تحلیل اثبات، بعضی اوقات ساده و بعضی اوقات واقعاً دشوار است.

بتا: درک می‌کنم. بایستی یک نکته به حرفهای شما اضافه کنم. فکر می‌کنم که یک طیف کامل از گرایش‌های "استثناء تحریم کننده[۳۳]" بر من آشکار شده‌است. بدترین آنها، فقط استثناءها را تحریم می‌کند، بدون اینکه به اثبات توجهی کند. اینها به هنگام مواجهه همزمان با اثبات و مثال نقض، نمیدانند که چکار کنند. برای این استثناء تحریم کننده ها، اثبات و مثالهای نقض کاملاً مجزا از هم و بی ارتباط هستند. ممکن است بعضی از آنها ادعا کنند که اثبات تنها در دامنه محدود شده کار می‌کند، و لذا هیچ تناقضی وجود ندارد؛ اما شروطی که مطرح کرده اند(و دامنه را محدود کرده است)، همچنان به اثبات بی ارتباط است.
دسته دیگری هستند که از دسته اول بهتر هستند. آنها یک بررسی سریع از اثبات انجام میدهند و (همانند من)برای شروطی که قرار است برای ایجاد دامنه امن بگذارند، الهام میگیرند. بهترین دسته ولی آنهایی هستند که اثبات را به دقت بررسی و تحلیل می‌کنند، و بر مبنای آن، یک توصیف دقیق از دامنه‌های ممنوعه(آنهایی که دیگر نباید جزء دامنه باشند) میدهند. در واقع، روش شما، از این لحاظ یک نوع تحریم استثناء است...

آیوتا: ...و این رابطه منطقی و بنیادی بین اثباتها و ردها را نشان میدهد.

معلم: امیدوارم که الان دیگر همه شما بتوانید درک کنید که اثباتها، با اینکه ممکن است حدس را به درستی اثبات نکنند، ولی یقیناً به بهبود حدس کمک می‌کنند. استثناء تحریم کننده‌ها نیز آنرا بهبود میبخشند، ولی بهبود آنها مستقل از اثبات است و ممکن است هیچگاه به اثبات منتهی نشود. روش ما، بوسیله ثابت کردن بهبود میبخشد. این پیوستگی ذاتی منطق اکتشاف[۳۴] و منطق توجیه[۳۵]، مهمترین جلوه روش تلفیق لم است.

[۳۲] simply-connected
[۳۳] exception-barrer
[۳۴] logic of discovery
[۳۵] logic of justification

بتا: حالا حرفهای عجیب شما راجع به اثبات یک حدس غلط و همچنین بی تفاوتی در مواجهه همزمان با اثبات و رد را میفهمم.

کاپا (در کنار): ولی چرا اسمش را اثبات میگذارید، در حالیکه هر کاری می‌کند بجز اثبات؟

معلم: دقت کن که تعداد بسیار کمی از افراد چنین تمایلی دارند. بیشتر ریاضیدانان به خاطر تعصب‌ها و پیشداوری‌های خود، نمی‌توانند همزمان یک حدس را اثبات و رد کنند. آنها یک حدس را یا رد و یا ثابت می‌کنند. علاوه بر این، اگر حدس مربوطه متعلق به خودشان باشد، هرگز قادر نیستند که بوسیله رد کردن آن، آنرا بهبود ببخشند. آنها قصد دارند حدسهای خود را بدون رد کردن بهبود بخشند؛ هیچگاه از نادرستی آنها کم نکنند و فقط کم کم به درستی آنها اضافه کنند؛ و لذا علم را از ترس از مثال نقض خالی سازند. این زمینه کاری بهترین استثناء تحریم گرها است: آنها با یک "نمایش مطمئن" شروع می‌کنند و یک اثبات برای دامنه "امن" طراحی می‌کنند، و سپس یک بررسی جامع از حدس و اثبات خود انجام میدهند تا ببینند که آیا از همه شروطی که گذاشته اند استفاده کرده اند یا خیر. اگر نه، حدس اولیه خود را قویتر میسازند[۳۶] و با مشخص سازی لم‌ها و شرایطی که اثبات بر آنها استوار است(و حذف بقیه)، حدس خود را تعمیم میدهند[۳۷]. برای مثال، در مورد حدس ما، بعد از یک یا دو مثال نقض، آنها قضیه موقتی "تمامی چندوجهی‌های محدب اویلری اند" — که از روش تحریم استثناءها بدست آمده است — را ارائه میدهند، و بررسی حالت غیر محدب را به بعد موکول می‌کنند. سپس اثبات کوشی را به دقت بررسی می‌کنند و پس از اینکه متوجه می‌شوند از محدب بودن در اثبات استفاده نشده‌است، قضیه بدست آمده از تلفیق لم را ارائه میدهند! هیچ چیز معیوبی در این روش — که در ابتدا از "تحریم استثناء ابتدایی" و سپس بطور مکرر از "تحلیل اثبات" و "تلفیق لم" استفاده می‌کند — وجود ندارد.

بتا: البته که این روش عیوب را از بین نمیبرد، فقط راجع به آنها بحث نمی‌کند: بجای اینکه مستقیماً یک "حدس بیش از حد قوی"[۳۸] را نقد کند، یک "حدس بیش از حد ضعیف"[۳۹] را نقد می‌کند.

معلم: بتا! خوشحالم که توانسته ام متقاعدت کنم. رو و دلتا، شما چی فکر می‌کنید؟

رو: من به شخصه فکر می‌کنم که مسئله وجوه "حلقه-مانند" یک "شبه مسئله"[۴۰] است. این از آنجا ناشی می‌شود که شما از اجزای تشکیل دهنده این صفحه — که باعث لحیم شدن این دو مکعب شده‌است — تعبیر وحشتناکی کرده اید.

معلم: بشتر توضیح بده.

رو: این مکعب کاکل دار از دو مکعب لحیم شده به هم تشکیل شده، قبول؟

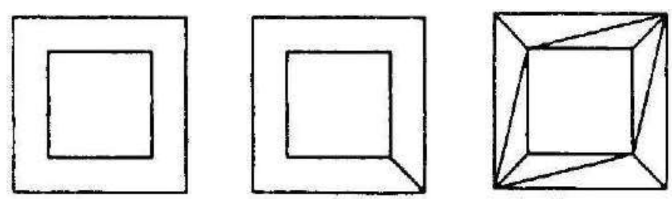
معلم: خب.

[۳۶] sharpen
[۳۷] generalise
[۳۸] over-statement
[۳۹] under-statement
[۴۰] pseudoproblem

رو: شما از "لحیم شدن"، تعبیر اشتباهی انجام داده اید. لحیم شدن، شامل یالهایی از رئوش مربع پایینی در مکعب بالایی به رئوس مربع بالایی مکعب پایینی است. لذا اصلاً ناحیه "حلقه-مانند"ی وجود ندارد!

بتا: وجه حلقه-مانند وجود دارد! این یالهایی که ازشان حرف میزنی هستند که وجود ندارند!

رو: آنها از چشمان آموزش ندیده تو مخفی هستند[۴۱].



(آ) جانکیرس (ب) ماتایسن (ج) چشمان آموزش ندیده

شکل ۱۴: سه نسخه از ناحیه حلقه-مانند(پاورقی را ببینید)

بتا: توقع داری که حرفهایت را جدی بگیریم؟ چیزی که ما میبینیم خرافات است ولی یالهای "مخفی" تو واقعی هستند؟

رو: به این بلور نمک نگاه کن. آیا یک مکعب است؟

بتا: یقیناً

رو: یک مکعب ۱۲ یال دارد، اینطور نیست؟

بتا: بله، همینطور است.

رو: ولی این مکعب اصلاً یال(قابل رویت) ندارد. آنها مخفی هستند و فقط در بازسازی منطقی تو از بلور ظاهر می‌شوند.

بتا: باید بهش فکر کنم. ولی یک چیز مسلم است. استاد به طرز فکر خود پسندانه من، مبنی بر اینکه روشم به یقین منتهی می‌شود، و البته فراموش کردن اثبات، ایراد گرفت. این ایراد دقیقاً به همان اندازه به روش تو وارد هستند.

معلم: دلتا، تو چی؟ چگونه میخواهی این ناحیه حلقه-مانند را اخراج کنی؟

[۴۱] جانکیرس(Jonquieres) معتقد بود که بایستی یک مثلث بندی کامل از ناحیه انجام شود(شکل ۱۴(آ))، در صورتی که ماتایسن(Matthiessen) تنها به اضافه کردن یک یال بسنده کرد(شکل ۱۴(ب)).

دلتا: نمی‌کنم. شما مرا به روش خود آوردید. تنها چیزی که برایم جای تعجب دارد، این است که چرا شما لم سوم را نیز وارد حدس نمی‌کنید تا از درستی آن مطمئن شوید؟ من یک نسخه چهارم ارائه میدهم که امیدوارم آخرین نسخه از حدس باشد: "تمامی چندوجهی هایی که (۱) ساده هستند، (۲) تمامی وجوهشان واقعاً همبند هستند و (۳) طوری هستند که مثلثهای ایجاد شده هنگام مثلث بندی شبکه شان، می‌توانند طوری شماره گذاری شوند که اگر به ترتیب آنها را حذف کنیم، مقدار v-e+f تا قبل از حذف آخرین مثلث تغییر نکند، اویلری هستند". نمیدانم چرا شما این را به یکباره ارائه ندادید؟ اگر شما روشتان را جدی میگرفتید، بایستی هر کدام از لمها را بلافاصله به شرط تبدیل میکردید. چرا اینطور پیشروی تکه تکه[۴۲]؟

آلفا: محافظه کار، انقلابی می‌شود! پیشنهادت به نظرم غیرعملی است. چرا که ما بیش از ۳ لم داریم. چرا شروطی از قبیل (۴)" ۲=۱+۱ باشد" و (۵) "تمامی مثلثها ۳ یال و ۳ رأس داشته‌باشند" را اضافه نکنیم؟ ما یقیناً از این ۲ لم(و خیلی لمهای دیگر) استفاده می‌کنیم. به نظرم بهتر است تنها لمهایی را به شرط تبدیل کنیم که برایشان مثال نقضی پیدا شده‌است.

گاما: این روش بیش از حد اتفاقی و مبتنی بر شانس است و نمی‌تواند یک اسلوب کلی باشد. بایستی لمهایی را به شرط تبدیل کنیم که احتمال میدهیم برایشان مثال نقض وجود داشته‌باشد، لمهایی که نمی‌توان گفت قطعاً و یقیناً درست هستند.

دلتا: خیلی خوب. آیا کسی فکر می‌کند که لم سوم بدیهی است؟ بیایید آنرا تبدیل به یک شرط سوم کنیم.

گاما: ولی اگر شرایطی که برای لمهایمان ذکر می‌کنیم همگی مستقل نبودند چه؟ شاید اینطور باشد که اگر بعضی کارها قابل انجام باشد، بعضی کارهای دیگر "لزوماً" قابل انجام باشد. من به شخصه فکر می‌کنم که اگر یک چندوجهی ساده باشد، آنگاه حتماً یک ترتیب از مثلثهای شبکه(مثلث بندی شده) وجود دارد، که هنگام حذف مثلثها همواره v-e+f ثابت بماند. اگر اینطور باشد، آوردن لم اول در حدس، ما را از آوردن لم سوم در شرط معاف می‌کند.

دلتا: ادعا می‌کنی که شرط اول شرط سوم را نتیجه میدهد. می‌توانی آنرا اثبات کنی؟

اپسیلون: من می‌توانم[۴۳].

آلفا: اثبات این موضوع ممکن است جالب باشد، ولی مسئله اصلی چیز دیگری است: تا کجا باید حدسمان را بهبود ببخشیم؟ ممکن است اثباتی که ارائه میدهی درست باشد، ولی این اثبات تنها لم سوم را به تعدادی زیرلِم[۴۴] جدید تقسیم می‌کند. آیا بایستی اینها را هم به شرط تبدیل کنیم؟ کجا باید متوقف شویم؟

کاپا: در اثباتها یک بازگشت نامتناهی وجود دارد؛ لذا اثباتها نمی‌توانند ثابت کنند.اثبات کردن یک بازی است، وقتی از آن لذت می‌بریم، آنرا بازی می‌کنیم و وقتی خسته می‌شویم، آنرا رها می‌کنیم.

اپسیلون: نخیر، این یک بازی نیست، بلکه یک موضوع کاملاً جدی است. فرایند بازگشت نامتناهی را می‌توان

[۴۲] piecemeal engineering

[۴۳] اثبات اولیه متعلق به ریچارد(H. Reichardt) است. برای دیدن اثبات به مقالات فان در واردن(B. L. Van der Waerden) مراجعه کنید.

[۴۴] sub-lemma

با رسیدن به لم‌های بدیهی، که نیازی به تبدیل شدن به شرط ندارند، متوقف کرد.

گاما: من هم دقیقاً منظورم همین بود. ما نه آن لمهایی که از اصول بدیهتاً درست نتیجه می‌شوند را تبدیل به شرط می‌کنیم و نه آنهایی را که به کمک لمهای قبلی (و احتمالاً با کمک لمهای بدیهی)قابل اثباتند.

آلفا: قبول دارم. لذا وقتی که دو لم غیر بدیهی(و زیرلمهایشان) را به شرط تبدیل کردیم، می‌توانیم عملیات را متوقف کنیم. در واقع، من فکر می‌کنم که این روش بهبود، یعنی تلفیق لم، بدون خطا است. به نظرم این روش نه تنها حدس را بهبود میبخشد، بلکه آنرا کامل[۴۵] می‌کند. و البته یک چیز مهم از آن(روش) یاد گرفتم: این غلط است که وقتی یک "مسئله برای اثبات[۴۶]" داریم، اظهار کنیم که هدف، نشان دادن درستی یا نادرستی یک ادعا به طور قطعی است. هدف واقعی یک "مسئله برای اثبات" بایستی بهبود حدس و در نهایت، کامل کردن آن به صورت یک قضیه(که از ابتدا مشخص نیست) باشد.

حدس اولیه ما این بود که "همه چندوجهیها اویلریند".

روش تحریم هیولاها، با تعبیری مجدد از اجزاء حدس، از حدس اولیه دفاع میکرد، طوریکه در نهایت ما یک قضیه نسخه تحریم هیولا داشتیم: "تمامی چندوجهیها اویلری اند". ولی تعریف و تعبیر اجزای این قضیه با حدس اولیه چنان بطور پیچیده و ظریف فرق داشتند که به زحمت میشد از قضیه بدست آمده استفاده کرد و آنرا یک پیشرفت دانست.

روش تحریم استثناءها، یک عنصر خارجی(نسبت به اثبات) را معرفی کرد: تحدب. قضیه نسخه تحریم استثناء این بود: "همه چندوجهیهای محدب اویلریند".

روش تلفیق لم تنها مبتنی بر اثبات بود. این روش تقریباً تمام اثبات را در قضیه نسخه تلفیق لم میاورد: "تمام چندوجهیها با وجوه واقعاً همبند، اویلریند".

این نشان میدهد که شخص (هنگام حل مسئله)آن چیزی را ثابت نمی‌کند که قرار بوده ثابت کند. لذا هیچ اثباتی نباید با عبارت "همانطور که می‌خواستیم[۴۷]" تمام شود.

بتا: بعضی‌ها اعتقاد دارند که قضیه‌ها قبل از اثباتها کشف می‌شوند: "ابتدا بایستی حدسی زده شود تا ثابت شود". بعضی دیگر این را قبول ندارند و ادعا می‌کنند که اکتشاف بعد از نتیجه گیری از دانسته‌های قبلی و دقت خاص به بعضی از آنها، اگر خوش شانس باشیم، بدست می آید. یکی از دوستانم این مثال را میزد که بعضی‌ها معتقدند که زیپ اکتشاف در یک ساختمان (منطق)قیاسی، از پایین — که نتیجه است — به بالا — که فرض اولیه است — بسته می‌شود. بعضی‌ها عکس این را میگویند. نظر شما چیست؟

آلفا: نظر من این است که مثال تو در مورد اکتشاف کار نمی‌کند. اکتشاف همواره در یک جهت حرکت نمی‌کند، بلکه به صورت زیگ زاگ حرکت می‌کند: ابتدا حدسی زده می‌شود، مثال‌های نقض می آیند، حدس اولیه پس گرفته می‌شود، فرض‌ها بررسی می‌شوند و در نهایت فرض اولیه با یک قضیه جایگزین می‌شود. حدس اولیه و مثال‌های نقض، در ساختمان قیاسی نهایی ظاهر نمی‌شوند: زیگ زاگ اکتشاف در قضیه نهایی دیده نمی‌شود(تنها یک قضیه درست دیده می‌شود).

معلم: بسیار عالی. ولی دقت کنید که قضیه نهایی لزوماً با فرض اولیه متفاوت نیست. ما لزوماً با اثبات یک مسئله(اثبات در معنای مورد نظر معلم) آنرا بهبود نمیبخشیم. وقتی بهبود میبخشیم که ایده اثبات، جلوه هایی پنهان

[۴۵] perfect
[۴۶] problem to prove
[۴۷] Quod erat demonstrandum (Q.E.D.)

از حدس اولیه را کشف می‌کند، که سپس این جلوه‌های جدید در قضیه نهایی ظاهر می‌شوند. البته در تئوری‌های تکامل یافته[۴۸]، معمولاً چنین اتفاقی نمیافتد، ولی در تئوری‌های جوان و در حال رشد زیاد اتفاق میافتد. این بهم پیچیده شدن اکتشاف و توجیه، این بهم گره خوردن اثبات و بهبود، معمولاً در دسته دوم(تئوری‌های نو) ظاهر می‌شود.

کاپا (در کنار): تئوری‌های تکامل یافته و بالغ ممکن است که جوان شوند. اکتشاف همواره بر توجیه ارجحیت دارد.

سیگما: این دسته بندی متعلق به من است! در دسته بندی من، اولین دسته گزاره‌های بالغ بودند، سومین دسته گزاره‌های در حال رشد...

گاما (حرفش را قطع می‌کند): اصلاً قضیه غلط است. من یک مثال نقض دارم.

۵ ایراد گرفتن از اثبات بوسیله مثال‌های نقض کلی که موضعی نیستند. مسئله "دقت[۴۹]"

۱.۵ تحریم هیولا در دفاع از قضیه

گاما: همین الان متوجه شدم که استوانه من، مثال نقض ۵، نه تنها حدس اولیه، بلکه قضیه(نسخه تلفیق لم) را نیز نقض می‌کند. با اینکه در هردو شرط صدق می‌کند، ولی اویلری نیست.

آلفا: گامای عزیز، لطفاً حرفهای عجیب نزن. استوانه یک جُک بود نه یک مثال نقض. یک ریاضیدان واقعی هیچگاه استوانه را یک چندوجهی حساب نمی‌کند.

گاما: چرا به جوجه تیغی من، مثال نقض ۳، اعتراض نکردی؟ آیا جوجه تیغی از استوانه عجیبتر نبود؟ ولی نه، تو در آن زمان مشغول ایراد گرفتن به حدس اولیه بودی و از هرگونه ایرادی استقبال میکردی. حالا در حال دفاع از قضیه هستی و از ایرادها دوری می‌کنی! قبلاً، وقتی مثال نقضی بود، از خود میپرسیدی که چه چیزی در حدس غلط است، ولی الان از خود میرسی که چه چیزی در مثال نقض غلط است.

دلتا: آلفا، تو یک هیولا تحریم کن شده ای. خجالت نمیکشی؟

۲.۵ لمهای مخفی

آلفا: چرا. شاید یک مقدار عجول بوده ام. بگذارید ببینم. ما سه نوع مثال نقض داریم. در مورد نوع اول، که موضعی بودند ولی کلی نبودند، بحث کردیم. این مثال‌های نقض، قضیه را رد نمیکردند. مثال‌های نوع دوم، که هم موضعی و هم کلی هستند، نه تنها قضیه را رد نمی‌کنند، بلکه آنرا تأیید هم می‌کنند. حال ممکن است که یک نوع سوم هم داشته‌باشیم، که مثال هایی هستند که کلی هستند، ولی موضعی نیستند. این مثال ها، قضیه را رد می‌کنند. من فکر نمیکردم که چنین چیزی ممکن باشد. ولی الان گاما ادعا می‌کند که استوانه چنین شرطی را دارد. اگر نخواهیم که آنرا به عنوان یک هیولا بپذیریم(و آنرا رد کنیم)، بایستی قبول کنیم که یک مثال نقض کلی است: برای استوانه

[۴۸] mature
[۴۹] rigour

$v-e+f=1$ است. ولی آیا (این مثال نقض)از نوع دوم— که بی خطر هستند— نیست؟ شرط میبندم که حداقل در یکی از لمها صدق نمی‌کند.

گاما: بیایید چک کنیم. استوانه مسلماً در شرط اول صدق می‌کند: اگر وجه پایینی را برداریم، می‌توانیم آنرا روی صفحه بنشانیم.

آلفا: ولی اگر وجه کناری را برداریم، چیزی که بدست می آوریم دو تکه است!

گاما: خب که چی؟ شرط اول این بود که چندوجهی "ساده" باشد، یعنی "بعد از حذف یک وجه، قابل نشاندن روی صفحه باشد". استوانه این شرط را دارد، حتی اگر با حذف وجه کناری شروع کنیم. چیزی که تو میگویی این است که استوانه بایستی یک شرط اضافه داشته‌باشد، بایستی شبکه مسطح ایجاد شده هم‌بند باشد. ولی هیچ کس تابحال این شرط را ذکر نکرده‌است.

آلفا: همه منظورشان از قابل نشاندن روی صفحه، قابل نشاندن روی صفحه بصورت یک تکه بوده است. ما لم سوم را بصورت شرط در قضیه نیاوردیم، چرا که اثبات اپسیلون، لم سوم را از لم اول نتیجه می‌داد. ولی اگر به اثبات نگاه کنیم، میبینیم که بر این پایه استوار است که شبکه مسطح بدست‌آمده هم‌بند است! در غیر این صورت، برای شبکه مسطح بدست آمده $v-e+f=1$ نخواهدبود.

گاما: پس چرا اصرار به بیان صریح آن نکردی؟

آلفا: چونکه ما در حالت غیر صریح آنرا درک کردیم(نیازی به بیان مجدد نبود).

گاما: تو قطعاً درک نکردی. چراکه تو گفتی که "ساده" بودن همان "قابل نشاندن روی سطح کره" بودن است. استوانه قابل نشاندن روی سطح کره است، لذا بنا بر تعریف تو، در شرط اول صدق می‌کند.

آلفا: هممم... ولی بایستی قبول کنید که در شرط دوم— که میگوید هر ناحیه با رسم هر قطرش به دو ناحیه تقسیم می‌شود— صدق نمی‌کند. چگونه می‌توانید دایره ها یا پوشه را مثلث بندی کنید؟ آیا این ناحیه‌ها "واقعاً همبند" هستند؟

گاما: البته که هستند.

آلفا: ولی برای استوانه حتی یک قطر هم نمی‌توان کشید! یک قطر دو رأس غیر مجاور را بهم وصل می‌کند، ولی استوانه اصلاً رأس ندارد!

گاما: عصبانی نشو. اگر میخواهی نشان دهی که دایره واقعاً همبند نیست، یک قطر بکش که صفحه جدیدی ایجاد نکند.

آلفا: شوخی نکن. خیلی خوب میدونی که نمیتونم.

گاما: حالا قبول داری که گزاره "قطری از دایره وجود دارد که با کشیدن آن صفحه جدیدی ایجاد نمی‌شود" غلط است؟

آلفا: بله، قبول دارم. چه چیزی را می‌خواهی نشان دهی؟

گاما: پس باید قبول کنی که نقیض اش، یعنی گزاره "تمامی قطرهای دایره حین رسم شدن تشکیل یک ناحیه جدید میدهند" درست است، یعنی دایره "واقعاً همبند" است.

آلفا: نمی‌توانی از صور عمومی ات، یعنی "همه قطرهای دایره حین رسم شدن تشکیل یک ناحیه جدید میدهند" یک "نمونه"[۵۰] ارائه دهی، پس گزاره ات نمی‌تواند درست باشد، بلکه بی معنی است. درک تو از راستی[۵۱]، غلط است.

کاپا (در کنار): اول سر تعریف چندوجهی دعوا میکردند، حالا سر تعریف درستی!

گاما: ولی تو قبول کردی که نقیض آن گزاره غلط بود! آیا ممکن است که گزاره A بی معنی باشد، ولی نقیض آن، $\neg A$ ، کاملاً بامعنی و غلط باشد؟ درک تو از معنی[۵۲]، بی معنی است!
ببین، میدانم مشکلت در کجاست؛ ما می‌توانیم با یک تغییر جزئی در فرمول‌بندی، آنرا حل کنیم. بگذارید تعریف کنیم که یک ناحیه "واقعاً همبند" است، اگر "برای تمامی مقادیر x، اگر x یک قطر باشد، آنگاه x ناحیه را دو قسمت کند". نه دایره و نه پوشه، هیچکدام قطری ندارند، پس هر x می‌تواند یک "نمونه" برای شرطمان باشد و لذا هردو گزاره، بامعنی و درست هستند. پس دایره و پوشه هردو واقعاً همبند هستند.

آلفا: نه! اگر نتوانیم قطری بکشیم و نتوانیم شبکه را مثلث بندی کنیم، هرگز نمی‌توانیم به یک شبکه کاملاً مثلث بندی شده برسیم (و شروع به حذف مثلثها کرده) و حکم را نتیجه بگیریم. در این صورت، چگونه ادعا می‌کنی که استوانه در شرط دوم صدق می‌کند؟ آیا نمیبینی که بایستی یک شرط وجودی در لم(شرط) باشد؟ تعبیر درست ناحیه واقعاً همبند بایستی این باشد: "برای تمامی مقادیر x، اگر x یک قطر باشد، آنگاه x ناحیه را دو قسمت کند؛ و حداقل یک x داشته‌باشیم که قطر باشد." شاید فرمول بندی اولیه ما این را به صراحت نگفته باشد، ولی این فرض بطور ناخودآگاه بصورت یک "فرض مخفی" در آن آمده است. هیچکدام از وجوه استوانه این شرط را ندارند؛ لذا استوانه یک مثال نقض است که هم کلی و هم موضعی است، و قضیه را نقض نمی‌کند.

گاما: ابتدا تو لم اول را با مطرح کردن مفهوم همبندی اصلاح کردی، حالا هم لم دوم را با مطرح کردن این شرط وجودی! و تمام این حرفهای مبهم راجع به "فرض‌های مخفی" تنها این مسئله را مخفی می‌کند که استوانه من باعث شد که این اصلاحات را انجام دهی.

آلفا: کدام حرف مبهم؟ ما قبول کردیم که لمهای "بدیهتاً درست" را از قلم بیندازیم، یعنی آنها را "مخفی" کنیم. حال چرا نباید لمهای "بدیهتاً غلط" را مخفی کنیم؟ آنها دقیقاً به همان اندازه بدیهی و ملال‌آور هستند! آنها را در ذهن خود نگه دارید، ولی به زبان نیاورید. (وجود)یک لم مخفی، خطا محسوب نمی‌شود؛ بلکه یک اشاره مختصر به "دانش زمینه[۵۳]" ما میباشد.

[۵۰] instance
[۵۱] truth
[۵۲] meaning
[۵۳] background knowledge

کاپا (در کنار): دانش زمینه، جایی است که فکر می‌کنیم همه چیز را می‌دانیم، ولی در واقع هیچ چیز نمی‌دانیم.

گاما: تنها فرضهای آگاهانه ای که کردی، این بود که (۱) حذف یک وجه همواره یک شبکه همبند ایجاد می‌کند و (۲) هر ناحیه غیر مثلثی را می‌توان با رسم (بعضی از)قطرهایش به نواحی مثلثی تجزیه کرد. اینها در قسمت ناخودآگاه مغز تو بصورت "بدیهتاً درست" بودند، ولی استوانه باعث شد که آنها در مغز تو دگرگون شوند و بصورت بدیهتاً غلط در بیایند. اگر این را تکذیب می‌کنی، داری تاریخ را عوض می‌کنی تا آنرا از خطا پاک کنی.

تتا: آلفا! کمی قبل تر، تو شرطهای مخفی موجود در تعاریف دلتا را مسخره میکردی. حال خودت بعد از هر بار رد شدن قضیه، شرطهای مخفی به لمها اضافه می‌کنی و هربار با تغییر موضع خود سعی می‌کنی که آبروی خودت را حفظ کنی. خجالت نمیکشی؟

کاپا: هیچ چیز برای من، جذابتر از (تماشای) یک فرد متعصب(آلفا) در حال دفاع نیست. بعد از اینکه با شکاکیت با تعصبی‌های دیگر جنگید، خود آتشی می‌شود و به تعصب رو میاورد! او بی منطق عمل می‌کند: برای حذف مثال نقض گاما، ابتدا را با روشی که خودش آنرا ممنوع کرده بود(تحریم هیولا)و سپس با مطرح کردن لمهای مخفی، سعی می‌کند آنرا رد کند.

معلم: مشکل آلفا قطعاً این بود که بطور تعصبی با روش تلفیق لم برخورد کرد. او خیال میکرد که یک بررسی دقیق از اثبات باعث ایجاد یک "تحلیل اثبات" بی نقص می‌شود که تمامی لمهای غلط را بدست میدهد(همانطور که بتا خیال میکرد که می‌تواند تمامی مثال نقض‌ها را بیابد). او گمان میکرد که با آوردن این لمهای غلط در حدس، نه تنها به یک قضیه بهبود یافته دست میابد، بلکه قضیه بدست آمده بی نقص است، و خیالش از مثال‌های نقض راحت می‌شود. استوانه نشان داد که او اشتباه فکر میکرد، ولی بجای اینکه زیر بار اشتباه خود برود، او حالا یک تحلیل اثبات را کامل می‌داند، اگر تمامی لم‌های اشتباه را داشته‌باشد.

۳.۵ روش اثبات و ردها[۵۴]

گاما: پیشنهاد می‌کنم که استوانه را بعنوان یک مثال نقض درست برای قضیه بپذیریم. من یک یا چند لم جدید میاورم که بوسیله استوانه نقض می‌شوند. دقیقاً همان کاری که آلفا کرد، ولی بجای اینکه آنها را لمهای مخفی بنامم، آنها را به همه اعلام می‌کنم.

حال استوانه که یک مثال نقض گیج کننده و خطرناک(از نوع سوم) نسبت به تحلیل اثبات و قضیه قدیمی بود، یک مثال نقض بی خطر(نوع دوم) نسبت به تحلیل اثبات و قضیه جدید می‌شود.

آلفا فکر میکرد که دسته بندی اش از مثالهای نقض، مطلق است، ولی در واقع نسبی بود، نسبت به تحلیل اثباتی که انجام داده بود. با رشد و تکامل تحلیل اثبات، مثال نقض‌های نوع سوم تبدیل به مثال تقض‌های نوع دوم می‌شوند.

لاندا: درسته. یک تحلیل اثبات، "بادقت[۵۵]" یا "معتبر[۵۶]" است، و قضیه متناظر با آن درست است، اگر و تنها اگر هیچ مثال نقضی از نوع سوم برای آن موجود نباشد. من این معیار را "اصل انتقال کذب[۵۷]" مینامم، چرا که بر مبنای این معیار، همه مثال‌های نقض کلی، موضعی نیز هستند: کذب بایستی از حدس اولیه به لمها و از پیامدهای قضیه به مقدم‌های آن منتقل شود. اگر یک مثال نقض کلی موجود باشد که موضعی نباشد و این اصل را نقض کند،

[۵۴] The method of proof and refutations
[۵۵] rigorous
[۵۶] valid
[۵۷] Principle of Retransmission of Falsity

با اضافه کردن یک لم مناسب به تحلیل اثبات دوباره اصل را برقرار می‌کنیم. لذا اصل انتقال کذب برای یک تحلیل اثبات نوپا، یک اصل "تنظیمی[۵۸]" است، و یک مثال نقض از نوع سوم، یک عامل محرک برای رشد تحلیل اثبات است.

گاما: فراموش نکنید، حتی قبل از اینکه اولین مثال نقض پیدا شود، ما سه لم مشکوک را شناسایی کردیم و با تحلیل اثباتمان پیش رفتیم.

لاندا: درسته. تحلیل اثبات ممکن است حتی در مواجهه با چیزی بجز مثال نقض تکامل یابد، مثلاً یاد گرفته ایم که در مقابل اثباتهای "متقاعد کننده[۵۹]" واکنش(منفی) نشان دهیم.
در حالت اول، تمامی مثالهای نقض، از نوع سوم هستند و تمامی لمها، مخفی. آنها مارا به ساخت تدریجی تحلیل اثبات میرسانند و یکی یکی به مثال نقض‌های نوع دوم تبدیل می‌شوند.
در حالت دوم— هنگامی که مشکوک هستیم و بدنبال رد کردن هستیم— ممکن است که تحلیل اثبات را بهبود ببخشیم، بدون اینکه با مثال نقضی برخورد کنیم. حال دو حالت ممکن است. حالت اول اینکه موفق به رد کردن تحلیل اثبات— بوسیله مثال نقض‌های موضعی— شویم. خواهیم دید که اینها مثال‌های نقض کلی نیز خواهند بود.

آلفا: من قاب عکس را از همین روش بدست آوردم: بدنبال چندوجهی گشتم که بعد از حذف یک وجه، قابل نشاندن روی صفحه نباشد.

سیگما: در این صورت، نه تنها مثال‌های نقض یک عامل محرک برای (رشد)تحلیل اثبات هستند، بلکه تحلیل اثبات نیز یک عامل محرک برای (پیدایش)مثال‌های نقض است! چه اتحاد شومی بین دو دشمن!

لاندا: درسته. اگر یک حدس خیلی ممکن و یا حتی خیلی بدیهی بنظر میرسد، بایستی آنرا اثبات کرد: ممکن است به این نتیجه برسیم که بر پایه لمهایی خیلی پیچیده و مشکوک استوار است. رد کردن این لمهای مشکوک(پیدا کردن مثال نقض برایشان)، مثال نقض هایی غیر منتظره برای حدس اولیه میدهد.

سیگما: پیش به سوی ردهای بدست آمده از اثبات!

گاما: لذا خاصیت یک اثبات منطقی این نیست که باور(به درستی) تحمیل کند، بلکه این است که مواردی برای شک کردن پیشنهاد دهد.

لاندا: ولی بگذارید حالت دوم را بگویم: وقتی که هیچ مثال نقض موضعی برای لمها پیدا نمی‌کنیم.

سیگما: یعنی وقتی که مثال‌های نقض به تحلیل اثبات کمک نمی‌کنند! آنوقت چه اتفاقی می‌افتد؟

لاندا: اثبات احترامِ کامل پیدا می‌کند و لمها دیگر مشکوک نیستند. تحلیل اثبات ما بزودی فراموش می‌شود. بدون ایراد(مثال نقض) نمی‌توان شک را نگه داشت. توان ما برای جستجو کردن مثال نقض مثل یک چراغ میماند: اگر مثال نقضی پیدا نشود و سوخت آنرا تجدید نکند، بزودی خاموش می‌شود. در این صورت، همه توجه ما برای رد کردن، به قسمتهایی محدود می‌شود که قبلاً آنها را "بدیهتاً درست" میدانستیم.

[۵۸] regulative
[۵۹] convincing

تمام اینها حاکی از این است که اثبات و رد را نمی‌توان دو مقوله جدا از هم دانست. به همین خاطر، پیشنهاد می‌کنم که "روش تلفیق لم" را به "روش اثبات و ردها" تغییر نام بدهیم. بگذارید جلوه‌های اصلی این روش را در ۳ قانون اکتشافی بگویم :

قانون ۱. اگر یک حدس دارید، در پی اثبات و رد آن برآیید. اثبات را بدقت بررسی کنید و یک لیست از لمهای غیر بدیهی تهیه کنید(تحلیل اثبات)؛ مثال‌های نقضی هم برای حدس(کلی) و هم برای لمهای مشکوک(موضعی) پیدا کنید.

قانون ۲. اگر مثال نقض کلی دارید، حدس خود را دور بیندازید، به تحلیل اثبات خود یک لم مناسب اضافه کنید که با مثال نقض یافت شده نقض شود، و حدس دور انداخته‌شده را با یک حدس بهبود یافته — که لم اضافه شده را بصورت یک شرط در خود دارد — جایگزین کنید. هیچ مثال نقضی را هیولا معرفی نکنید. تمامی لمهای مخفی را صریحاً بیان کنید.

قانون ۳. اگر یک مثال نقض موضعی دارید، چک کنید که آیا یک مثال نقض کلی هست یا نه. اگر هست، می‌توانید براحتی قانون ۲ را برایش بکار ببرید.