مجله‌ی ریاضی شریف
سال اول، شماره دوم

قضیه ضریب جهانی برای همولوژی

علی کلامی

چکیده

این مقاله به بحث در مورد قضیه ضریب جهانی برای همولوژی [1] و معرفی مختصری از جبر همولوژیکی می‌پردازد. که با دنباله‌های دقیق [2] متنوع شروع می‌شود، سپس ضرب تانسوری و تصویر مدول‌ها را تعریف خواهیم‌کرد، که موضوع مورد توجه، گروه‌های همولوژی، و جایگزینی برای محاسبه گروه‌های همولوژی در بعدهای بالاتر می‌شود.
یک مجتمع زنجیری از گروه‌های آبلی G_n داده‌شده‌است، آیا می‌توان برای محاسبه گروه‌های همولوژی $H_n(C;G)$ از مجتمع زنجیری [3] به همراه ضرب تانسوری با G جمله‌هایی از G و $H_n(C)$ استفاده کرد؟

۱ مقدمه

در توپولوژی جبری دیدیم که با استفاده از همولوژی منفرد می‌توان بین فضاهای توپولوژی مختلف تفاوت قائل شد، با این وجود ممکن است که بخواهید همولوژی با ضرایب دلخواه را محاسبه کنید. بنابراین به قضیه‌ای نیاز داریم که بین همولوژی با ضرایب دلخواه و همولوژی با ضریب $\mathbb{Z}$ رابطه برقرار کند.
در بخش ۲، به یادآوری پیش نیازهای مورد نیاز از جبر می‌پردازیم. در بخش ۳، مفهوم Tor را تعریف و قضیه ضریب جهانی برای همولوژی را اثبات می‌کنیم. در بخش آخر، به محاسبه دو مثال خواهیم‌پرداخت.

۲ درآمدی بر جبر

۱.۲ دنباله‌های دقیق

تعریف ۱.۲. یک جفت از همریختی‌های $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ در B دقیق است اگر $Im(f) = Ker(g)$. یک دنباله $\cdots \to A_{i-1} \to A_i \to A_{i+1} \to \cdots$ دقیق است اگر برای هر A_i بین دو همریختی دقیق باشد.

قضیه ۲.۲. یک دنباله $0 \to A \xrightarrow{f} B$ دقیق است اگر وتنها اگر f یک‌به‌یک باشد. به عبارت دیگر، یک دنباله $B \xrightarrow{g} C \to 0$ دقیق است اگر وتنها اگر g پوشا باشد.

اثبات. دقیق بودن در A نتیجه می‌دهد که $Ker(f)$ با تصویر همریختی $0 \to A$ برابر باشد، که صفر است. این با یک به یک بودن همریختی f هم ارز است.
به طریق مشابه، هسته همریختی $C \to 0$ برابر است با C، و $g(B) = C$ اگر وتنها اگر g پوشا باشد. □

[1] Universal Coeffcient Theorem for Homology
[2] Exact Sequences
[3] Chain Complex

نتیجه ۳.۲. یک دنباله $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ دقیق است اگر و تنها اگر f یک به یک و g پوشا باشد، و $Im(f) = Ker(g)$. می‌گوییم B یک گسترش از C توسط A است. این دنباله دقیق را یک دنباله کوتاه دقیق [4] می‌نامیم.

مثال ۴.۲. دو $\mathbb{Z}$-مدول، $A = \mathbb{Z}$ و $C = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید، با آن‌ها می‌توان دو دنباله‌ای کوتاه دقیق متفاوت ساخت. اول، $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$ که $f(a) = (a, 0)$ و $g(a, c) = c$.

$\mathbb{Z}$-مدول $\mathbb{Z}$ همچنین یک گسترش از $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ به $\mathbb{Z}$ است. دنباله

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$$

در نظر بگیرد، که نگاشت n، z را به nz می‌فرستد، در حالی که p نگاشت تصویر است. توجه داشته باشید که حتی هرچند A و C در مثال مدول‌های مشابه‌ای هستند، $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ با $\mathbb{Z}$ یکریخت نیست، حال دو دنباله دقیق می‌سازیم که هم‌ارز نباشد.

بنابر اهمیت دنباله کوتاه دقیق سعی می‌کنیم یک دنباله‌ای بلند دقیق [5] را به دنباله‌های کوتاه دقیق بشکنیم. یک دنباله دقیق از R-مدول‌ها

$$\cdots \to A_{n+2} \to A_{n+1} \to A_n \to A_{n-1} \to A_{n-2} \to \cdots$$

اگر

$$C_n \cong Ker(A_n \to A_{n-1}) \cong Im(A_{n+1} \to A_n)$$

به عنوان مثالی از ساختار جبری R-مدولی، یک گروه آبلی است، هم هسته [6] از هر همریختی وجود دارد بطوری که $C_n \cong Coker(A_{n+2} \to A_{n+1})$. آنگاه یک دیاگرام جابه‌جایی به صورت زیر بدست‌می‌آوریم، در حالی که همه دنباله‌های مورب یک دنباله کوتاه دقیق هستند:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & \\
 & & & C_{n+1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & C_{n-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
\cdots \arrow[rr] & & A_{n+2} \arrow[ur] \arrow[rr] & & A_{n+1} \arrow[rr] \arrow[dr] & & A_n \arrow[ur] \arrow[rr] & & A_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \cdots \\
 & C_{n+2} \arrow[ur] & & & & C_n \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & C_{n-2} \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] & & & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & & 0
\end{tikzcd} \tag{1}$$

درنتیجه، جمله‌های میانی، دنباله‌های کوتاه دقیق هستند که در میان دیاگرام همپوشانی دارند، و یک دنباله دقیق را تشکیل می‌دهند.

تعریف ۵.۲. اگر $0 \to A \to B \to C \to 0$ و $0 \to A' \to B' \to C' \to 0$ دو دنباله کوتاه دقیق از مدول‌ها باشند. یک همریختی از دنباله‌های کوتاه دقیق یک سه تایی f, g, h از همریختی مدول‌ها است بطوریکه دیاگرام زیر جابه‌جایی می‌شود:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{2}$$

[4] Short Exact Sequence
[5] Long Exact Sequence
[6] Cokernel

اگر f, g, h همه یکریختی باشند، آنگاه این یکریختی، از دنباله‌های کوتاه دقیق است، که B و B' گسترش‌های یکریختی هستند.
دو دنباله دقیق را هم‌ارز گوییم اگر بصورت زیر باشند:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d, "\approx"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad (۳)$$

تعریف ۶.۲. اگر $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ دنباله کوتاه دقیق از R–مدول‌ها است. دنباله از هم جدا یا مجزا [۷] گوییم اگر $B = A \oplus C$ و هر دو یکریختی باشند. یک نگاشت $s : C \to B$ را یک قطعه [۸] از g می‌نامیم اگر $g \circ s = id$.
اگر s هم یک همریختی باشد، آنگاه آن را یک همریختی از هم جدا می‌نامیم.

از هم جدا بودن با هریک از رابطه‌های زیر معادل است:
(a) یک همریختی $p : B \to A$ وجود داشته باشد که $p \circ f = 1 : A \to A$.
(b) یک همریختی $s : C \to B$ وجود داشته باشد که $g \circ s = 1 : C \to C$.

مثال ۷.۲. دنباله دقیق $0 \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0$ از هم جدا است، بنا بر تعریف. درمقابل، دنباله $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$ از هم جدا نیست زیرا یک همریختی نا بدیهی از $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ندارد.

۲.۲ ضرب تانسوری مدول‌ها

تعریف ۸.۲. برای حلقه R، اگر M مدول راست و N مدول چپ باشند. ضرب تانسوری مدول‌ها [۹] $M \otimes N$ روی R یک گروه آبلی $M \times N$است بطوریکه که:

$$(m_1 + m_2, n) \sim (m_1, n) + (m_2, n)$$

$$(m, n_1 + n_2) \sim (m, n_1) + (m, n_2)$$

$$(mr, n) \sim (m, rn)$$

برای هر $m, m_1, m_2 \in M$ و $r \in R$.

قضیه ۹.۲. اگر L, M, N مدول‌های راست باشند، وD مدول چپ باشد. اگر
$$0 \to L \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} N \to 0$$

دقیق باشد،آنگاه دنباله ایجاد شده از گروه‌های آبلی
$$L \otimes_R D \xrightarrow{\psi \otimes 1} M \otimes_R D \xrightarrow{\varphi \otimes 1} N \otimes_R D \to 0$$

دقیق است.

اثبات. برای نشان دادن پوشا بودن $1 \otimes \varphi$، می‌دانیم که φ پوشا است. آنگاه برای برخی از $m \in M$ داریم $n = \varphi(m)$. چون $n \otimes d = \varphi(m) \otimes d = \varphi(m \otimes d) \otimes 1$. این یعنی این که $(\varphi \otimes 1)$ یک همریختی پوشا از $M \otimes D$ به $N \otimes D$ است، موقعی که گروه‌های آبلی هستند. برای دقیق بودن در $M \otimes_R D$، کافی است تا نشان دهیم $\pi : M \otimes D / Im(\psi \otimes 1) \to N \otimes D$ یک یکریختی است. برای ساختن معکوس π یک نگاشت به صورت زیر را تعریف می‌کنیم:

---
[۷] Split
[۸] Section
[۹] Tensor Product of Modules

$$p : N \times D \to M \otimes D/Im(\psi \otimes ۱)$$

بوسیله $p(n,d) = m \otimes d$ بطوریکه $\varphi(m) = n$. اگر $\varphi(m) = \varphi(m') = n$، آنگاه $m - m' = \psi(l)$ برای هر $l \in L$ باتوجه به دقیق بودن در M. این دلالت دارد به این که $m \otimes d - m' = (m - m') \otimes \otimes d = \psi(l) \otimes d \in Im(\psi \otimes ۱)$، بنابراین p خوش تعریف است.زمانی که p روی هر کلاس هم ارزی ثابت است، p نگاشت زیر را القاء می‌کند

$$p' : N \otimes D \to M \otimes D/Im(\psi \otimes ۱)$$

که یک همریختی و معکوس π است. □

تعریف ۱۰.۲. یک چپ R-مدول D رامسطح [۱۰] می نامیم اگر آن هریک از دو شرط معادل زیر را داشته باشد:
(۱) برای هر مدول راست L, M, N اگر

$$\circ \to L \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} N \to \circ$$

دقیق باشد، آنگاه

$$\circ \to L \otimes D \xrightarrow{\psi \otimes ۱} M \otimes D \xrightarrow{\varphi \otimes ۱} N \otimes D \to \circ$$

دقیق باشد.
(۲) برای هر مدول راست L, M اگر ψ یک به یک باشد،آنگاه $۱ \otimes \psi$ یک به یک باشد.

نتیجه ۱۱.۲. مدول های آزاد مسطح هستند، نگاشت تصویر از مدول‌ها نیز مسطح هستند.

در نتیجه، برای هر R-مدول چپ D ، تابعگر $- \otimes D$ از رسته‌ای R-مدول راست به رسته‌ای گروه آبلی از راست دقیق است، در این صورت آن دقیق است اگر وتنها اگر D مدول مسطح باشد.اینجا به بیان تعدادی نتیجه می‌پردازیم:

نتیجه ۱۲.۲. (۱) برای هر R-مدول چپ D ،

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} D = D \qquad (۴)$$

(۲)برای هر $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \qquad (۵)$$

که d، ک.م.م از m و n است.
(۳) اگر M, M'، R -مدول راست و اگر N, N'، R -مدول چپ باشند. آنگاه یک گروه یکریختی یکتا به صورت زیر وجود دارد:

$$(M \oplus M') \otimes_R N \cong (M \otimes_R N) \oplus (M' \otimes N) \qquad (۶)$$

بطوریکه $(m, m') \otimes n \longmapsto (m \otimes n, m' \otimes n)$.
یکریختی بطور مشابه برای $M \otimes_R (N \oplus N') \cong (M \otimes_R N) \oplus (M \otimes_R N')$ تعریف می‌شود.

۳.۲ مدول‌های تصویری

اگر R یک حلقه یک دار باشد، و اگر $\circ \to L \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} N \to \circ$ یک دنباله کوتاه دقیق از R-مدول‌ها باشد. می‌خواهیم خواصی از L و N که مرتبط است با خواص M را پیدا کنیم. اول یک همریختی از R-مدول D به L یا N بطوریکه دلالت دارد به وجود همریختی از D به M در نظر می‌گیریم. اگر $f : D \to M$ و $\psi : L \to M$ باشند. آنگاه ترکیب f و ψ را یک همریختی $f' : D \to M$ تعریف می‌کنیم بطوریکه $f' = \psi \circ f$. این معادل است با جابه‌جایی بودن دیاگرام زیر:

---
[۱۰] Flat