# نظریه‌ی کوهمولوژی بافه‌ها

خشایار فیلم

در این مقاله‌ی کوتاه به معرفی مفهومی به نام «بافه[1]» می‌پردازیم که همان‌گونه که خواهیم دید به گونه‌ای بسیار طبیعی به چنین ساختاری نیازمندیم و سپس به کمک این مفهوم نظریه‌های کوهمولوژی گوناگونی مانند «کوهمولوژی تکین[2]» در توپولوژی جبری و «کوهمولوژی درام[3]» در هندسه‌ی منیفلد را به هم مرتبط می‌سازیم.

ابتدا به مثالی می‌پردازیم که مبنای اصلی تعریف بافه است. یک فضای توپولوژیک $X$ در نظر بگیرید. به هر باز $U$ از $X$ می‌توان حلقه‌ی توابع پیوسته $F : U \to \mathbb{R}$ را نسبت داد. همچنین اگر $U \subset V$ همریختی‌ای از حلقه‌ی توابع بر $V$ به حلقه‌ی توابع بر $U$ داریم که هر تابع $V \to \mathbb{R}$ را به $U$ تحدید می‌کند. چه ویژگی‌های دیگری داریم؟ یک ویژگی دیگر آن است که با به هم چسباندن اطلاعات موضعی هماهنگ (در بیانی غیردقیق) می‌توان به اطلاعات جدیدی رسید: اگر $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای از بازهای $X$ باشد و $U = \cup_{\alpha\in I} U_\alpha$، در صورتی که عنصر $F_\alpha$ از حلقه‌ی نسبت داده شده به هر $U_\alpha$ را در نظر بگیریم (یعنی $F_\alpha$ یک تابع پیوسته‌ی $U_\alpha \to \mathbb{R}$ است) به قسمی که برای هر $\alpha, \beta \in I$، $F_\alpha |_{U_\alpha\cap U_\beta} = F_\beta |_{U_\alpha\cap U_\beta}$، آنگاه تابع پیوسته‌ی یکتای $F : U \to \mathbb{R}$ موجود است که برای هر $\alpha \in I$، $F |_{U_\alpha} = F_\alpha$. حال می‌خواهیم در بیانی غیردقیق ساختاری بیابیم که این فرایند نسبت دادن حلقه به بازهای $X$ با خواص مطلوب را توصیف کند.

**تعریف ۱.** *یک بافه‌ی $\mathcal{F}$ از گروه‌های آبلی (یا حلقه‌ها و مدول‌ها و ...) بر فضای توپولوژیک $X$، به هر باز $U$ از $X$ گروه آبلی (به ترتیب حلقه و مدول و ...) $\mathcal{F}(U)$ نسبت می‌دهد با این ویژگی که برای دو باز تودرتوی $U \subset V$ یک «همریختی تحدید[4]» به صورت*

$$\begin{cases} p_{UV} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U) \\ s \longmapsto s\,|_U \end{cases}$$

*داریم به قسمی که:*

*الف)* $p_{UU} = 1_{\mathcal{F}(U)}$

*ب) اگر $U \subset V \subset W$ بازهای $X$ باشند:* $p_{UV} o p_{VW} = p_{UW}$.

*ج) اگر $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ پوشش بازی از باز $U$ از $X$ باشد و عناصر $s_\alpha \in \mathcal{F}(U)$ چنان باشند که:*

$$\forall \alpha, \beta \in I : s_\alpha |_{U_\alpha\cap U_\beta} = s_\beta |_{U\alpha\cup U_\beta}$$

*آنگاه عنصر یکتای $s \in \mathcal{F}(U)$ موجود است که برای هر $\alpha \in I$، $p_{U_\alpha U}(s) = s_\alpha$ یا در نمادگذاری ساده‌تر* $s |_{U_\alpha} = s_\alpha$.

واضح است که تعریف فوق طبیعی‌ترین گزینه برای شیء‌ای است که اطلاعات موضعی داده شده روی یک فضای توپولوژیک را دربرداشته باشد.

**مثال ۲.** *اگر $A$ یک گروه آبلی باشد، می‌توان بر هر فضای توپولوژیک $X$ «بافه‌ی ثابت[5]» متناظر $A$ را تعریف کرد که آن را به همان*

[1] Sheaf
[2] Singular Cohomology
[3] deRham Cohomology
[4] resteriction homomorphism
[5] constant sheaf

*نماد $A$ نمایش می‌دهیم و برای هر باز $U$ از $X$:*

$$A(U) = \text{گروه توابع موضعا ثابت } F : U \to A$$

*و همریختی‌های $A(V) \to A(U)$ هرگاه $U \subset V$ را تحدید گرفت.*

دو مفهوم دیگر هم هستند که به شکل محسوسی به آن‌ها نیاز داریم: همریختی میان دو بافه و ساختاری که اطلاعات در یک نقطه از فضا را بدست دهد.

تعریف همریختی میان دو بافه آسان است: اگر $\mathcal{F}$ و $\mathcal{G}$ دو بافه از گروه‌های آبلی (به ترتیب حلقه‌ها، مدول‌ها و ...) بر فضای توپولوژیک $X$ باشند، یک همریختی $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ عبارت است از خانواده‌ای از همریختی‌های گروهی (به ترتیب حلقه‌ای، مدولی و ...) به شکل $\{\alpha(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)\}$ به گونه‌ای که برای هر دو باز $U \subset V$ نمودار زیر جابه‌جایی باشد:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\alpha(V)"] \arrow[d, "\text{همریختی تحدید}"'] & \mathcal{G}(V) \arrow[d, "\text{همریختی تحدید}"] \\ \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\alpha(U)"] & \mathcal{G}(U) \end{tikzcd} \qquad (۱)$$

اگر $\mathcal{F}(U)$ را به عنوان اطلاعات بر باز $U$ بگیریم، طبیعی‌ترین تعریف برای آنچه که درباره‌ی یک نقطه‌ی $p \in X$ می‌دانیم، به صورت زیر است:

$$\mathcal{F}_p = \lim_{\substack{\to \\ p\in U}} \mathcal{F}(U) \quad (\lim_{\to} : \text{direct limit})$$

$\mathcal{F}_p$ «ساقه[۶]» در نقطه‌ی $p$ نامیده می‌شود و می‌توان حد مستقیم فوق را اینگونه تعبیر کرد: مجموعه‌ی

$$\{< U, s > \mid p \in U, s \in \mathcal{F}(U)\}$$

را در نظر بگیرید. می‌توان بر این مجموعه یک رابطه‌ی هم ارزی گذاشت به این صورت که $< U, s > = < V, s' >$ هرگاه باز $W \subset U \cap V$ حول $p$ و $s'' \in \mathcal{F}(W)$ موجود باشند که $s \mid_W = s''$ و $s' \mid_W = s''$. مجموعه‌ی دسته‌های هم ارزی $\{< U, s > \mid p \in U, s \in \mathcal{F}(U)\}/\sim$ را می‌توان به یک گروه بدل کرد به این صورت که

$$< U, s > + < V, s' > = < U \cap V, s \mid_{U\cap V} + s' \mid_{U\cap V} >$$

این گروه همان $\mathcal{F}_p$ است.

**تذکر ۳.** *الف) با توجه به تعریف بالا برای هر همسایگی باز $U$ از $p$ یک همریختی $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_p$ داریم و همچنین برای هر عنصر $t \in \mathcal{F}_p$ بازی چون $V$ حول $p$ و عنصری از $\mathcal{F}(V)$ موجود است که تحت همریختی $\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}_p$ به $t$ می‌رود.*

*ب) اگر $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ یک همریختی میان بافه‌ها باشد، برای هر $p \in X$ نمودار زیر جابه‌جایی است:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\alpha(U)"] \arrow[d] & \mathcal{G}(U) \arrow[d] \\ \mathcal{F}_p \arrow[r, "\alpha_p"] & \mathcal{G}_p \end{tikzcd} \qquad (۲)$$

*که در آن $\alpha_p$ به این صورت تعریف می‌شود: $t \in \mathcal{F}_p$ را به $s \in \mathcal{F}(V)$ به ازای همسایگی باز مناسبی مانند $V$ از $p$ ترفیع می‌دهیم و حال $\alpha(V)(s) \in \mathcal{G}(V)$ که چون $V$، $p$ را در بر دارد، می‌توان آن را به $\mathcal{G}_p$ تصویر کرد و به عنصر $\alpha_p(t) \in \mathcal{G}_p$ رسید.*

---

[۶] stalk

حال می‌توان کتگوری بافه‌ها از گروه‌های آبلی (حلقه‌ها، یا مدول‌ها و ...) بر فضای توپولوژیک $X$ را در نظر گرفت که اشیاء آن بافه‌هایی از گروه‌های آبلی بر $X$ و مورفیسم‌های آن همریختی‌های میان بافه‌ها هستند. این را به $Sh(X, \mathbb{A}b)$ نمایش می‌دهیم که در آن $\mathbb{A}b$ کتگوری گروه‌های آبلی است. می‌توان نشان داد که این یک «کتگوری آبلی[۷]» است. نکته‌ی اساسی آن است که اینجا دقیق بودن با دقیق بودن در حد ساقه مترادف است:

یک دنباله‌ی $\cdots \to \mathcal{F}_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} \mathcal{F}_n \xrightarrow{\alpha_n} \mathcal{F}_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \cdots$ در کتگوری آبلی $Sh(X, \mathbb{A}b)$ دقیق است اگر و تنها اگر برای هر $p \in X$ دنباله‌ی زیر از گروه‌ها آبلی دقیق باشد

$$\cdots \to (\mathcal{F}_{n+1})_p \xrightarrow{(\alpha_{n+1})_p} (\mathcal{F}_n)_p \xrightarrow{(\alpha_n)_p} (\mathcal{F}_{n-1})_p \xrightarrow{(\alpha_{n-1})_p} \cdots$$

حال یک فانکتور جمعی $\Gamma : Sh(X, \mathbb{A}b) \to \mathbb{A}b$ داریم که هر بافه‌ی $\mathcal{F}$ را به $\mathcal{F}(X)$ می‌برد و $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ را به همریختی متناظر $\alpha(X) : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$ تصویر می‌کند. فانکتور $\Gamma$ «مقطع سرتاسری[۸]» نامیده می‌شود. (در حالت کلی هر عنصر $\mathcal{F}(U)$ یک «مقطع[۹]» بافه‌ی $\mathcal{F}$ بر باز $U$ نامیده می‌شود.)

**گزاره ۴.** *فانکتور $\Gamma$ از چپ دقیق است: اگر $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0$ دنباله‌ای دقیق از بافه‌های از گروه‌های آبلی بر $X$ باشد؛ دنباله‌ی زیر از گروه‌های آبلی دقیق است:*

$$0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha(X)} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta(X)} \mathcal{H}(X) \to 0$$

*اثبات.* تنها یک به یک بودن $\alpha(X)$ را ثابت می‌کنیم، اثبات بقیه مشابه است. فرض کنید $s \in \mathcal{F}(X)$ و $\alpha(X)(s) = 0$. پس چون هر $\mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ یک به یک است، به دلیل وجود نمودار جابه جایی

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X) \arrow[r, "\alpha(X)"] \arrow[d] & \mathcal{G}(X) \arrow[d] \\
\mathcal{F}_p \arrow[r, "\alpha_p"] & \mathcal{G}_p
\end{tikzcd} \tag{۳}$$

تصویر $s$ در ساقه در هر نقطه‌ی $p \in X$ صفر است. این بدان معنی است که حول هر $p$ باز $U_p$ از $X$ را داریم که $s\,|_{U_p} = 0$. حال $\{U_p\}_{p \in X}$ پوشش بازی از $X$ است و $s \in \mathcal{F}(X)$ چنان است که تحدیدش به هر یک از عناصر این پوشش باز صفر است. پس از (ج) در تعریف ۱ نتیجه می‌شود $s = 0$. $\square$

ولی نکته‌ی اساسی این است که در بالا $\beta(X) : \mathcal{G}(X) \to \mathcal{H}(X)$ لزوما پوشا نیست، همان‌گونه که در مثال زیر مشاهده می‌شود:

**مثال ۵.** *$\mathcal{O}$ را بافه‌ی توابع تحلیلی بر $\mathbb{C} - \{0\}$ بگیرید و $\mathcal{O}^*$ را بافه‌ی توابع تحلیلی که هیچ‌جا صفر نمی‌شوند. (برای هر $U \subset \mathbb{C} - \{0\}$، $\mathcal{O}^*(U)$ گروه ضربی توابع تحلیلی $F : U \to \mathbb{C}^*$ است.) $\mathbb{Z}$ را هم بافه‌ی ثابت بر $\mathbb{C} - \{0\}$ بگیرید. در این صورت دنباله‌ی دقیق*

$$0 \to \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{exp} \mathcal{O}^* \to 0$$

*از بافه‌های بر فضای $\mathbb{C} - \{0\}$ را داریم که در آن $exp$ بر هر باز $U$ به صورت زیر است:*

$$\begin{cases} \mathcal{O} = (U \to \mathbb{C}\ \text{توابع تحلیلی}) \to \mathcal{O}^*(U) = (U \to \mathbb{C}^*\ \text{توابع تحلیلی}) \\ F \mapsto e^{2\pi\sqrt{-1}F} \end{cases}$$

*ولی $\mathcal{O}(\mathbb{C} - \{0\}) \to \mathcal{O}^*(\mathbb{C} - \{0\})$ پوشا نیست. چرا که هیچ تابع تحلیلی $F$ بر $\mathbb{C} - \{0\}$ موجود نیست که تساوی $e^{2\pi\sqrt{-1}F(z)} = z$ برای هر $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ را برآورده کند.*

---

[۷] abelian category

[۸] global section

[۹] section

پس این سوال طبیعی مطرح است که با داشتن دنباله‌ی دقیق کوتاه $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ از بافه‌ها، چگونه دنباله‌ی دقیق $0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X) \to \mathcal{H}(X)$ را که گزاره‌ی ۴ بدست می‌دهد تکمیل کنیم؟ خوشبختانه چون بنابر ۴ فانکتور $\Gamma : Sh(X, \mathbb{A}b) \to \mathbb{A}b$ «از چپ دقیق[10]» است، جبر همولوژی ابزار لازم را در اختیار ما قرار می‌دهد.

**تعریف ۶.** *$\Gamma : Sh(X, \mathbb{A}b) \to \mathbb{A}b$ یک فانکتور جمعی، همورد و از چپ دقیق است. می‌توان نشان داد که کتگوری $Sh(X, \mathbb{A}b)$ به تعداد کافی شی انژکتیو دارد. پس فانکتورهای مشتق راست $\Gamma$ قابل تعریف هستند که آن‌ها را به $H^i(X, -)$ نمایش می‌دهیم. برای هر بافه‌ی $\mathcal{F}$، گروه‌های*

$$H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X), H^1(X, \mathcal{F}), \dots$$

*را گروه کوهمولوژی متناظر $\mathcal{F}$ می‌نامیم.*

خواص آشنایی از جبر همولوژی همچون وجود «دنباله‌ی بلند دقیق[11]»

* یک دنباله‌ی کوتاه دقیق $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0$ از بافه‌های از گروه‌های آبلی بر $X$، یک دنباله‌ی دقیق در کوهمولوژی القا می‌کند:

$$0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha(X)} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta(X)} \mathcal{H}(X) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{G}) \to H^1(X, \mathcal{H}) \to H^2(X, \mathcal{F}) \to \dots$$

و همچنین حکم زیر برقرارند:

* فرض کنید «تحلیل[12]» زیر برای بافه‌ی $\mathcal{F}$ موجود باشد:

$$0 \to \mathcal{F}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{F}^2 \to \dots$$

با این ویژگی که برای هر $i > 0$ و هر $n$، $H^i(X, \mathcal{F}^n) = 0$. در این صورت $H^i(X, \mathcal{F})$ به طور طبیعی یکریخت است با کوهمولوژی $i$ام «همبافت[13]» زیر:

$$\{\mathcal{F}^i(X), d^i(X) : \mathcal{F}^i(X) \to \mathcal{F}^{i+1}(X)\}_{i \geq 0}$$

یعنی:

$$H^i(X, \mathcal{F}) \cong \frac{ker(\mathcal{F}^i(X) \to \mathcal{F}^{i+1}(X))}{Im(\mathcal{F}^{i-1}(X) \to \mathcal{F}^i(X))}$$

یک نتیجه‌ی بلافاصله‌ی قسمت آخر حکم زیر است.

**قضیه ۷.** *فرض کنید $X$ یک منیفلد باشد و $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ را بافه‌ی ثابت متناظر گروه‌های آبلی به ترتیب $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ بر $X$ بگیرید. در این صورت گروه‌های کوهمولوژی بافه‌ی $H^i(X, \mathbb{R})$ و $H^i(X, \mathbb{C})$ به ترتیب یکریختند با گروه‌ها کوهمولوژی درام حقیقی و مختلط $H^i_{DR}(X, \mathbb{R})$ و $H^i_{DR}(X, \mathbb{C})$.*

*اثبات.* حکم را برای کوهمولوژی درام حقیقی ثابت می‌کنیم. اثبات در حالت مختلط هم مشابه است. برای هر $k \geq 0$، $\mathcal{A}^k$ را بافه‌ای بگیرید که به هر باز $U$ فضای برداری $k$-فرم‌های $C^\infty$ بر $U$ را نسبت می‌دهد و «همریختی‌های تحدید» $\mathcal{A}^k(V) \to \mathcal{A}^k(U)$ همان تحدید فرم‌های بر $U$ به یک باز کوچکتر $V$. ولی بنابر لم پوآنکاره هر فرم $\mathrm{d}$-بسته موضعا $\mathrm{d}$-دقیق است و لذا دنباله‌ی زیر از بافه‌های از فضاهای برداری حقیقی دقیق است:

$$0 \to \mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{A}^0 \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{A}^2 \xrightarrow{\mathrm{d}} \dots$$

که در آن $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{A}^0$ بر هر باز $U$ تابع موضعا ثابت $F : U \to \mathbb{R}$ را به عنصر مشابهی از $\mathcal{A}^0$ که حلقه‌ی توابع $C^\infty$، $U \to \mathbb{R}$ است، می‌برد. $\mathrm{d} : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^{n+1}$ هم بر هر باز $U$ با $\omega \mapsto \mathrm{d}\omega$ برای هر $k$-فرم $C^\infty$، $\omega$ بر $U$ داده می‌شود. پس $0 \to \mathcal{A}^0 \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{\mathrm{d}} \dots$

[10] left exact
[11] long exact sequence
[12] resolution
[13] comlex

یک تحلیل از بافه‌ی ثابت $\mathbb{R}$ است. با استفاده از «افراز واحد[۱۴]» می‌توان نشان داد که برای هر $\mathcal{A}^k$ گروه‌های کوهمولوژی با افراز مرتبه‌ی بیشتر از صفر، صفرند و لذا حکم بیان شده نتیجه می‌دهد که $H^i(X,\mathbb{R})$ یکریخت است با کوهمولوژی $i$ام همبافت فرم‌های $C^\infty$ بر $X$:

$$\mathcal{A}^0(X) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{A}^1(X) \xrightarrow{\mathrm{d}} \dots$$

که این هم بنابر تعریف همان کوهمولوژی درام $i$ام یعنی $H^i_{DR}(X,\mathbb{R})$ است. $\square$

همین استدلال را برای کوهمولوژی تکین هم می‌توان انجام داد. ولی آن فرآیند پیچیده‌تر است. باید همبافتی در نظر بگیریم به صورت

$$\mathcal{C}^0 \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^1 \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^2 \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^3 \to$$

که در آن هر $\mathcal{C}^n$ به باز $U$ گروه «پادزنجیر[۱۵]»های با ضرایب صحیح در $U$ یعنی $C^n(U,\mathbb{Z})$ را نسبت می‌دهد و $\delta:\mathcal{C}^n\to\mathcal{C}^{n+1}$ بر $U$ همان «نگاشت پادمرز[۱۶]»

$$\delta: C^n(U,\mathbb{Z}) \to C^{n+1}(U,\mathbb{Z})$$

برای فضای توپولوژیک $U$ است. دلیل آنکه این فرآیند از قبلی پیچیده‌تر است، آن است که $\mathcal{C}^n$ با این تعریف بافه نمی‌شود. در واقع موجودی (!) می‌شود که از خواص بافه در تعریف ۱ تنها (الف) و (ب) را برآورده می‌کند. این را یک «پیش‌بافه[۱۷]» می‌نامند. پس مشکل این است که $\mathcal{C}^0 \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^1 \xrightarrow{\delta} \dots$ همبافتی از بافه‌ها نیست بلکه همبافتی از پیش‌بافه‌هاست. ولی می‌توان این مشکل را حل کرد و در واقع روشی موجود است که به هر پیش‌بافه یک بافه نسبت می‌دهد. در اینجا برای پرهیز از طولانی شدن بحث از توضیح بیشتر آن خودداری می‌کنیم. تنها این را بیان می‌کنیم که با برطرف کردن این مشکل، می‌توان مشابه قضیه‌ی ۷ را برای کوهمولوژی تکین هم بیان کرد.

**قضیه ۸.** *$X$ را یک منیفلد بگیرید و $\mathbb{Z}$ را بافه‌ی ثابت بر $X$. در این صورت گروه‌های کوهمولوژی $H^i(X,\mathbb{Z})$ یکریختند با گروه‌های کوهمولوژی تکین $H^i_{sing}(X,\mathbb{Z})$. با بکار بردن «قضیه‌ی ضرایب جهانی[۱۸]» در توپولوژی جبری، این برای هر گروه آبلی دیگری چون $A$ به جای $\mathbb{Z}$ هم برقرار است.*

یک نتیجه‌ی بلافاصله‌ی قضایای ۷ و ۸ آن است که گروه‌های کوهمولوژی درام حقیقی و گروه‌های کوهمولوژی تکین حقیقی برای یک منیفلد یکی‌اند. این همان قضیه‌ی درام است.

در انتها با اشاره‌ای به «کوهمولوژی چک[۱۹]» به روشی ساده برای محاسبه‌ی $H^1(X,\mathcal{F})$ می‌پردازیم. دوباره همانند گزاره‌ی ۴، دنباله‌ی کوتاه دقیق $0\to\mathcal{F}\xrightarrow{\alpha}\mathcal{G}\xrightarrow{\beta}\mathcal{H}\to 0$ از بافه‌های گروه‌های آبلی بر فضای توپولوژیک $X$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم نگاشت اتصالی $\mathcal{H}(X)\to H^1(X,\mathcal{F})$ را که دنباله‌ی دقیق $0\to\mathcal{F}(X)\xrightarrow{\alpha(X)}\mathcal{G}(X)\xrightarrow{\beta(X)}\mathcal{H}(X)$ را در آن گزاره کامل می‌کند بیابیم. ابتدا به یک تعریف می‌پردازیم. $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ را پوشش بازی از $X$ بگیرید. تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \{(s_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in I} \mid \\ \qquad s_{\alpha\beta}\in\mathcal{F}(U_\alpha\cap U_\beta), \forall\alpha,\beta,\gamma\in I: s_{\alpha\beta}\mid_{U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma} + s_{\beta\gamma}\mid_{U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma} = s_{\alpha\gamma}\mid_{U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma}\} \\ B^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \{(g_\alpha\mid_{U_\alpha\cap U_\beta} - g_\beta\mid_{U_\alpha\cap U_\beta})_{\alpha,\beta\in I} \mid \forall\alpha\in I: g_\alpha\in\mathcal{F}(U_\alpha)\} \end{cases}$$

اگر هردو را زیرگروه‌های $\prod_{\alpha,\beta\in I}\mathcal{F}(U_\alpha\cap U_\beta)$ بگیریم، به وضوح $B^1(\mathcal{U},\mathcal{F})\subset Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$. $Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})/B^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ را گروه «کوهمولوژی چک» متناظر با پوشش $\mathcal{U}$ برای بافه‌ی $\mathcal{F}$ می‌نامند و به $\check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ نمایش می‌دهند. حال ارتباط آن را با $H^1(X,\mathcal{F})$ بیان می‌کنیم. به سادگی می‌توان دید که اگر پوشش باز $\mathcal{V}$ تظریفی از پوشش باز $\mathcal{U}$ باشد، یک نگاشت طبیعی

[۱۴] partition of unity
[۱۵] cochain
[۱۶] coboundary homomorphism
[۱۷] presheaf
[۱۸] universal coefficients theorem
[۱۹] Cech chomology

$\check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \check{H}^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$ القا می‌شود. بنابراین یک «سیستم مستقیم[20]» به صورت $\{\check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{F})\}_{\mathcal{U}\text{پوشش باز}X}$ داریم و می‌توان $\lim_{\to X\text{پوشش باز}U}\check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ را تعریف کرد. حال قضیه‌ای بیان می‌کند که:

$$\lim_{\to X\text{پوشش باز}\mathcal{U}}\check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \cong H^1(X,\mathcal{F})$$

حال می‌توان نگاشت اتصالی $\mathcal{H}(X) \to H^1(X,\mathcal{F})$ را که از دنباله‌ی کوتاه دقیق $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0$ بدست می‌آید تعریف کرد. فرض کنید $s \in \mathcal{H}$، پس با تصویر $s$ به ساقه‌ی $\mathcal{H}_p$، چون $0 \to \mathcal{F}_p \xrightarrow{\alpha_p} \mathcal{G}_p \xrightarrow{\beta_p} \mathcal{H}_p \to 0$ دقیق است، باید عضو مذکور از $\mathcal{H}_p$ در برد $\beta_p$ باشد. روش تعریف $\beta_p$ نتیجه می‌دهد که یک باز $U$ حول $p$ و $s' \in \mathcal{G}(U)$ موجودند که $\beta(U)(s') \in \mathcal{H}(U)$ تحت $\mathcal{H}(U) \to \mathcal{H}_p$ به همان تصویر $s$ در $\mathcal{H}_p$ می‌رود. لذا پوشش باز $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ از $X$ و عناصر $s'_\alpha \in \mathcal{G}(U_\alpha)$ موجودند که $\beta(U_\alpha)(s'_\alpha) = s\mid_{U_\alpha}$. این نشان می‌دند که برای هر $\alpha,\beta \in I$،

$$\beta(U_\alpha \cap U_\beta) : \mathcal{G}(U_\alpha \cap U_\beta) \to \mathcal{H}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

عنصر $s'_\alpha \mid_{U_\alpha\cap U_\beta)} - s'_\beta \mid_{U_\alpha\cap U_\beta}$ را به صفر می‌برد. پس این باید در برد

$$\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) : \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta) \to \mathcal{G}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

باشد: $t_{\alpha\beta} \in \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta)$ موجود است که:

$$\forall \alpha,\beta \in I : \alpha(U_\alpha \cap U_\beta)(t_{\alpha\beta} = s'_\alpha \mid_{U_\alpha\cap U_\beta} - s'_\beta \mid_{U_\alpha\cap U_\beta}$$

پس:

$$\alpha(U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma)(t_{\alpha\beta} + t_{\beta\gamma} - t_{\alpha\gamma}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{\alpha\beta} \mid_{U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma} + t_{\beta\gamma} \mid_{U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma} = t_{\alpha\gamma} \mid_{U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma}$$

پس به $s \in \mathcal{H}(X)$ عنصر $(t_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in I} \in Z'(\mathcal{U},\mathcal{F})$ نسبت داده می‌شود که کلاسی در گروه کوهمولوژی چک $\check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ و از آنجا عنصری در

$$H^1(X,\mathcal{F}) \cong \lim_{\to \mathcal{U}} \check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

معین می‌کند. این همان اثر $\mathcal{H} \to H^1(X,\mathcal{F})$ در دنباله بلند دقیق نسبت داده شده به $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0$ بر $s \in \mathcal{H}(X)$ است.

یکریختی بیان شده در بالا سودمند است ولی قابلیت محاسباتی ندارد. به منظور محاسبه‌ی $H^1(X,\mathcal{F})$ با کوهمولوژی چک، باید از قضیه‌ای منسوب به لری[21] استفاده کرد:

**قضیه ۹.** *فرض کنید بافه‌ی $\mathcal{F}$ از گروه‌های آبلی (یا حلقه‌ها، مدول‌ها و ...) بر فضای توپولوژیک $X$ داده شده باشد و پوشش باز $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ از $X$ چنان باشدکه:*

$$\forall \alpha \in I : H^1(U_\alpha, \mathcal{F}\mid_{U_\alpha}) = 0$$

*در این صورت* $H^1(X,\mathcal{F}) \cong \check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$.

در انتها کوهمولوژی $\mathbb{C} - \{0,1\}$ با ضرایب مختلط را با هر سه تئوری کوهمولوژی تکین، کوهمولوژی درام و کوهمولوژی چک محاسبه می‌کنیم و خواهیم دید که همان‌گونه که انتظار داریم هر سه نتیجه یکی‌اند.

**مثال ۱۰.** *محاسبه‌ی $H^1_{DR}(\mathbb{C}-\{0,1\},\mathbb{C})$: می‌دانیم که هر ۱-فرم بسته‌ای بر $\mathbb{C}-\{0,1\}$ که انتگرالش بر هر خم بسته صفر باشد دقیق است. ولی انتگرال هر ۱-فرم بسته‌ی $\omega$ بر $\mathbb{C}-\{0,1\}$ بر هر دو خم homologus یکی است. پس چون $\pi_1(\mathbb{C}-\{0,1\})$ گروه آبلی آزاد با دو مولد $|z| = \frac{1}{2}$ و $|z-1| = \frac{1}{2}$ است (که در جهت مثلثاتی پرمایش شده‌اند) اگر انتگرال $\omega$ بر هر دو خم مذکور صفر باشد دقیق است. پس یک نگاشت $\mathbb{C}$-خطی یک به یک به صورت زیر داریم:*

$$\begin{cases} H^1_{DR}(\mathbb{C}-\{0,1\},\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^2 \\ [\omega] \mapsto \left(\int_{|z|=\frac{1}{2}}\omega, \int_{|z-1|=\frac{1}{2}}\omega\right) \end{cases}$$

[20] direct system
[21] Leray

ولی این پوشا هم هست. چرا که برای ۱-فرم‌های بسته‌ی $\frac{\mathrm{d}z}{z}$ و $\frac{\mathrm{d}z}{z-1}$ بر $\mathbb{C}-\{0,1\}$:

$$\left(\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{z},\int_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{z}\right)=(2\pi i,0)$$

$$\left(\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{z-1},\int_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{z-1}\right)=(0,2\pi i)$$

پس $H^1_{DR}(\mathbb{C}-\{0,1\},\mathbb{C})\cong\mathbb{C}^2$. (کوهمولوژی درام با ضرایب در $\mathbb{C}$)

**مثال ۱۱.** محاسبه‌ی $H^1_{sing}(\mathbb{C}-\{0\})$ (با ضرایب مختلط): دنباله‌ی بلند دقیق در کوهمولوژی تکین برای زوج $(\mathbb{C},\mathbb{C}-\{0\})$ را می‌نویسیم. چون $\mathbb{C}$ «انقباض‌پذیر[22]» است:

$$H^1_{sing}(\mathbb{C}-\{0\})\cong H^2_{sing}(\mathbb{C},\mathbb{C}-\{0\})\cong_{\text{excision بنا بر}}\oplus_{i\in\{1,2\}}H^2_{sing}(D,D-\{0\})$$

$$\cong_{D\ \text{انقباض‌پذیر}}\oplus_{i\in\{1,2\}}H^1_{sing}(D-\{0\})\cong_{D-\{0\}\ \text{هموتوپ با دایره‌ی واحد}}\oplus_{i\in\{1,2\}}H^1_{sing}(S^1)\cong\mathbb{C}^2$$

که در آن $D$ گوی باز واحد در $\mathbb{C}$ است.

**مثال ۱۲.** محاسبه‌ی کوهمولوژی چک: پوشش باز $\mathcal{U}$ از $\mathbb{C}-\{0,1\}$ را به صورت زیر می‌گیریم:

$$\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I=\{1,2,3\}}$$

$$U_1=\mathbb{C}-(-\infty,1]$$

$$U_2=\mathbb{C}-[0,\infty)$$

$$U_3=\mathbb{C}-((-\infty,0]\cup[1,\infty))$$

هر سه‌ی این بازه‌ها انقباض‌پذیرند چرا که «ستاره‌گون[23]» هستند. پس می‌توان قضیه‌ی ۹ را به کار برد. باید زیرفضاهای $Z^1(\mathcal{U},\mathbb{C})$ و $B^1(\mathcal{U},\mathbb{C})$ از

$$\prod_{1\leq i,j\leq 3}\Gamma(U_i\cap U_j,\mathbb{C})$$

را یافت که در آن $\Gamma(V,\mathbb{C})$ برای هر باز $V$، فضای برداری‌ای است که بافه‌ی ثابت $\mathbb{C}$ به باز $V$ از $\mathbb{C}-\{0,1\}$ نسبت می‌دهد. یعنی فضای توابع موضعا ثابت $V\to\mathbb{C}$. بنابر تعریف:

$$\begin{cases}Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F}=\{(f_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}\in\prod_{1\leq i,j\leq 3}\Gamma(U_i\cap U_j,\mathbb{C})\mid f_{ij}+f_{jn}=f_{in}:U_i\cap U_j\cap U_n\ \text{بر}\ \}\\ B^1(\mathcal{U},\mathcal{F})=\{(g_i\mid_{U_i\cap U_j}-g_j\mid_{U_i\cap U_j})_{1\leq i,j\leq 3}\in\prod_{1\leq i,j\leq 3}\Gamma(U_i\cap U_j,\mathbb{C})\mid\forall i:g_i\in\Gamma(U_i,\mathbb{C})\}\end{cases}$$

شرط ظاهر شده در تعریف $Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ نتیجه می‌دهد که برای $(f_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ در $Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$: $f_{ii}\equiv 0$ و $f_{ij}=-f_{ji}$. پس با استفاده از این تقارن می‌توان فقط حالت $i<j$ را در نظر گرفت. در این صورت

$$\begin{cases}Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})=\{(f_{12},f_{23},f_{13})\mid U_1\cap U_2\cap U_3\ \text{بر}\ f_{12}+f_{23}=f_{13}\ \text{است و}\ U_i\cap U_j\ \text{هر}\ f_{ij}\ \text{تابع موضعا ثابتی بر باز}\ \}\\ B^1(\mathcal{U},\mathcal{F})=\{(g_1-g_2,g_2-g_3,g_1-g_3)\mid\ \text{هر}\ g_i\ \text{تابع موضعا ثابتی بر باز}\ U_i\ \text{است.}\ \}\end{cases}$$

ولی برای هر $1\leq i,j\leq 3$: $U_i\cap U_j=\mathbb{C}-\mathbb{R}$ دو مولفه‌ی همبندی دارد و لذا بعد فضای توابع موضعا ثابت مختلط مقدار بر آن ۲ است. پس $Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ را می‌توان با زیرفضای زیر از $\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2$ یکی گرفت:

$$Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})=\{(x,y,z,w,x+z,y+w)\mid x,y,z,w\in\mathbb{C}\}\tag{۴}$$

در صورتی که بر هر $U_i$ به دلیل همبند بودن، فضای $\Gamma(U_i,\mathbb{C})$ از توابع موضعا ثابت $U_i\to\mathbb{C}$ یک بعدی است. یعنی تمام این توابع ثابت هستند. پس $B^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ در واقع زیرفضای زیر از $\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2$ است:

$$B^1(\mathcal{U},\mathcal{F})=\{(\alpha-\beta,\alpha-\beta,\beta-\gamma,\beta-\gamma,\alpha-\gamma,\alpha-\gamma)\mid\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}\}\tag{۵}$$

---

[22] contractible
[23] starlike

(هر مولفه‌ی $\mathbb{C}^۲$ در واقع مقدار تابع بر دو مولفه‌ی همبندی $\mathbb{C}-\mathbb{R}$ است.) لذا از (۱) و (۲)، فضای برداری خارج قسمتی $Z^۱(\mathcal{U},\mathcal{F})/B^۱(\mathcal{U},\mathcal{F})$ دو بعدی است. چرا که $B^۱(\mathcal{U},\mathcal{F})$ در واقع هسته‌ی

$$\begin{cases} Z^۱(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \mathbb{C}^۲ \\ (x,y,z,w,x+z,y+w) \mapsto (x-y,z-w) \end{cases}$$

است. لذا برای بافه‌ی ثابت $\mathbb{C}$:

$$H^۱(\mathbb{C}-\{۰,۱\},\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^۲$$