دیفرانسیل‌های آبلی

ترجمه‌ی ابوالفضل طاهری

چکیده

هدف اصلی ما ساخت توابع روی رویه‌های ریمان فشرده با تعیین خصوصیات تحلیلی آن‌ها می‌باشد (به عنوان مثلا توابع مرومورفیک با نقاط تکین مشخص شده). در اینجا می‌خواهیم در مورد این مساله صحبت کنیم. با توصیف دیفرانسیل‌های مرومورفیک شروع می‌کنیم که ساده‌تر از بررسی توابع کلی است و ابزار بنیادی برای بررسی و ساخت توابع نیز محسوب می‌شود.

در مقاله‌ی «میراث آبل در هندسه‌ی جبری»، کارهایی که آبل برای حل برخی انتگرال‌ها انجام داد، و برخی از نتایج آن را می‌بینیم. در این مقاله که ترجمه‌ی فصل ۴ از [۱] است، با صورت مدرن فرم‌های آبلی و انتگرال‌های آبلی آشنا می‌شویم.

۱ فرم‌های دیفرانسیل و فرمول‌های انتگرال

ابتدا مقدمات نظریه‌ی انتگرال روی منیفلدهای هموار ۲-بعدی را با استفاده از نمادگذاری مختلط بیان می‌کنیم.

فرض کنید $\mathcal{R}$ یک منیفلد باشد و

$$z : U \subset \mathcal{R} \to V \subset \mathbb{C}$$

یک نگاشت نقشه[۱] باشد. نگاشت تغییر مختصات[۲] $\tilde{z}(z,\bar{z})$ برای دو نگاشت نقشه با $U \cap \tilde{U} = \emptyset$، تعریف می‌شود:

$$\tilde{z}oz^{-1} : z(U \cap \tilde{U}) \to \tilde{z}(U \cap \tilde{U})$$

این نگاشت با فرض هموار بودن z و $\tilde{z}$ هموار است.

اگر برای هر نقشه روی $\mathcal{R}$ توابع مقدار مختلط $f(z,\bar{z})$، $p(z,\bar{z})$، $q(z,\bar{z})$ و $s(z,\bar{z})$ را اختصاص دهیم، به طوری که:

$$f = f(z,\bar{z}) \tag{۱}$$

$$\omega = p(z,\bar{z})\mathrm{d}z + q(z,\bar{z})\mathrm{d}\bar{z} \tag{۲}$$

$$S = s(z,\bar{z})\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} \tag{۳}$$

تحت تغییر مختصات ثابت باشند، در این صورت f یک تابع (۰-فرم)، ω دیفرانسیل (۱-فرم) و S یک ۲-فرم روی $\mathcal{R}$ است. داریم:

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y \ \ , \ \ \mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - i\mathrm{d}y$$

بنابراین می‌توان ω و S را بر حسب مختصات حقیقی x, y نوشت. ضرب خارجی دو ۱-فرم ω_1, ω_2، یک ۲-فرم به شکل زیر می‌دهد:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (p_1 q_2 - p_2 q_1)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}$$

[۱] Local parameter
[۲] Transition function

اگر قرار دهیم

$$\omega^{(1,0)} = p(z,\bar{z})\mathrm{d}z, \omega^{(0,1)} = q(z,\bar{z})\mathrm{d}\bar{z}$$

در این صورت $\omega^{(1,0)}, \omega^{(0,1)}$ مستقل از انتخاب مختصات موضعی هلومورفیک هستند و بنابراین دیفرانسیل‌ها سرتاسری روی $\mathcal{R}$ تعریف می‌شوند. ۱-فرم ω را از نوع $(1,0)$ (معادلا از نوع $(0,1)$) می‌گوییم اگر و تنها اگر به صورت موضعی به شکل $\omega = p\mathrm{d}z$ ($\omega = q\mathrm{d}\bar{z}$) باشد. به عبارتی بخش $(0,1)$ ($(1,0)$) آن ثابت است.فضای دیفرانسیل‌ها به وضوح جمع مستقیم زیرفضاهای $\omega^{(1,0)}$ و $\omega^{(0,1)}$ است.

حال می‌توانیم انتگرال را تعریف کنیم:

۱. انتگرال ۰-فرم‌ها روی ۰-زنجیرها، مجموعه‌ای متناهی از نقاط $\mathcal{R}$ مانند $\{P_\alpha\}_\alpha$؛

$$\sum_\alpha f(P_\alpha)$$

۲. انتگرال ۱-فرم‌ها روی ۱-زنجیرها (مسیرها، خم‌های هموار جهت‌پذیر و اجتماع متناهی از آن‌ها)؛

$$\int_\gamma \omega$$

۳. انتگرال ۲-فرم‌ها روی ۲-زنجیرها، اجتماع متناهی از دامنه‌ها؛

$$\int_D S$$

اگر $\gamma : [0,1] \to U$ و $D \subset U$ درون یک دیسک مختصاتی باشند، انتگرال‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 (p(z(\gamma(t)), \overline{z(\gamma(t))})\frac{\mathrm{d}z(\gamma)}{\mathrm{d}t} + q(z(\gamma(t)), \overline{z(\gamma(t))})\overline{\frac{\mathrm{d}z(\gamma)}{\mathrm{d}t}})\mathrm{d}t$$

$$\int_D S = \int_D s(z,\bar{z})\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}$$

با توجه به ثابت بودن فرم‌ها تحت تغییر مختصات، انتگرال‌های فوق خوش تعریف است.

عملگر دیفرانسیل d، یک k-فرم را به یک $k+1$-فرم می‌برد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{d}f = f_z \mathrm{d}z + f_{\bar{z}}\mathrm{d}\bar{z} \tag{۴}$$

$$\mathrm{d}\omega = (q_z - p_{\bar{z}})\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} \tag{۵}$$

$$\mathrm{d}S = 0 \tag{۶}$$

تعریف ۱. *k-فرم ω را دقیق می‌گوییم اگر به صورت دیفرانسیل یک $k-1$-فرم باشد یعنی $\omega = \mathrm{d}f$، و آن را بسته می‌گوییم اگر $\mathrm{d}\omega = 0$.*

داریم $\mathrm{d}^2 = 0$، بنابراین فرم‌های دقیق زیرمجموعه‌ی فرم‌های بسته است. یکی از مهمترین خصوصیات d در قضیه‌ی استوکس مطرح می‌شود.

قضیه ۲. *(استوکس[۳]) فرض کنید D یک ۲-زنجیر با مرز قطعه‌ای هموار ∂D باشد. در این صورت برای هر فرم دیفرانسیل ω داریم:*

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \int_{\partial D} \omega$$

یکی از کاربردهای مهم قضیه‌ی استوکس در ۱-فرم‌ها مطرح است. فرض کنید γ_{PQ} خمی باشد که P را به Q وصل می‌کند. چه موقع $\int_{\gamma_{PQ}} \omega$ تنها به نقاط P و Q وابسته است و مستقل از مسیر انتگرال‌گیری است؟

[۳] Stokes

نتیجه ۳. *فرم دیفرانسیل ω بسته است اگر وتنها اگر برای هر دو خم متجانس*[۴]*، γ و $\tilde{\gamma}$ داشته باشیم:*

$$\int_\gamma \omega = \int_{\tilde{\gamma}} \omega$$

اثبات. تفاضل فرم‌های متجانس γ و $\tilde{\gamma}$ مرز دامنه‌ای مانند D است. بنابراین داریم:

$$\int_\gamma \omega - \int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_{\partial D} \omega = \int_D \mathrm{d}\omega = 0$$

و این حکم را نتیجه می‌دهد. □

نتیجه ۴. *فرض کنید ω فرم دیفرانسیل بسته باشد و F_g مدل همبند ساده از رویه‌ی ریمانی با g گونه*[۵] *باشد و P_0 نقطه‌ای در F_g باشد. در این صورت تابع*

$$f(P) = \int_{P_0}^{P} \omega \ \ , \ \ P \in F_g$$

به طوری که مسیر انتگرال‌گیری به تمامی در F_g است، روی F_g خوش‌تعریف است.

به سادگی می‌توان دید:

$$d(\int_{P_0}^{P} \omega) = \omega(P)$$

فرض کنید $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ یک پایه برای همولوژی روی $\mathcal{R}$ باشد و ω یک دیفرانسیل بسته باشد. تناوب‌های ω را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Lambda_i = \int_{\gamma_i} \omega$$

هر خم بسته γ روی $\mathcal{R}$ متجانس است با خمی به شکل $\sum n_i \gamma_i$ که $n_i \in \mathbb{Z}$، و این نتیجه می‌دهد:

$$\int_\gamma \omega = \sum n_i \Lambda_i$$

بنابراین Λ_iها شبکه‌ی تناوب‌های ω را تولید می‌کنند. به طور خلاصه اگر $\mathcal{R}$ رویه‌ی ریمانی با g گونه باشد و پایه‌ی فرمال برای همولوژی آن $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ باشد، متناظر با آن‌ها تناوب‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$A_i = \int_{a_i} \omega \ \ , \ \ B = \int_{b_i} \omega$$

قضیه ۵. **(تساوی دوخطی ریمان**[۶]**)** *فرض کنید $\mathcal{R}$ یک رویه‌ی ریمانی با g گونه باشد و a_i, b_i، $i = 1, \ldots, g$، پایه‌ی فرمال برای همولوژی آن باشد، همچنین F_g مدل همبند ساده‌ی آن باشد. فرض کنید ω, ω' دو دیفرانسیل بسته روی $\mathcal{R}$ باشند و A_i, B_i, A'_i, B'_i تناوب‌های متناظر با آن‌ها باشد. در این صورت*

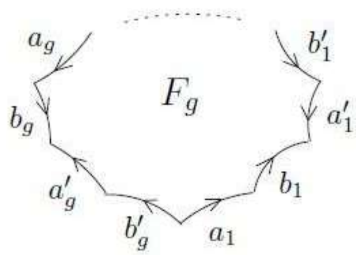
$$\int_{\mathcal{R}} \omega \wedge \omega' = \int_{\partial F_g} \omega'(P) \int_{P_0}^{P} \omega = \sum_{j=1}^{g} (A_j B'_j - A'_j B_j) \tag{7}$$

که P_0 نقطه‌ای از F_g است و مسیر انتگرال، $[P_0, P]$ در F_g قرار دارد.

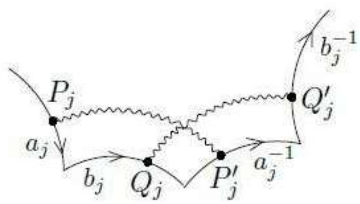
اثبات. رویه‌ی ریمانی $\mathcal{R}$ را در امتداد تمام حلقه‌های a_i, b_i، $i = 1, \ldots, g$، برش دهید تا دامنه‌ی همبند ساده‌ی F_g با مرز

$$\partial F_g = \sum_{i=1}^{g} a_i + a_i^{-1} + b_i + b_i^{-1}$$

[۴] Homological
[۵] genus
[۶] Riemann's bilinear identity



شکل ۱: مدل همبند ساده از رویه‌ی ریمان $\mathcal{R}$



شکل ۲: اثبات تساوی دوخطی ریمان

بدست آید. اولین تساوی (۷) مستقیما از قضیه‌ی استوکس با $D = F_g$ و نتیجه‌ی ۴، حاصل می‌شود.

خم‌های a_j و a_j^{-1} روی مرز F_g در $\mathcal{R}$ مساوی‌اند اما جهت مخالف دارند. برای نقاط P_j و P'_j که به ترتیب روی a_j و a_j^{-1} هستند و در $\mathcal{R}$ یکی هستند داریم:

$$\omega'(P_j) = \omega'(P'_j)$$

$$\int_{P_0}^{P_j} \omega - \int_{P_0}^{P'_j} \omega = \int_{P'_j}^{P_j} \omega = -B_j \tag{۸}$$

به همین ترتیب برای نقاط $Q_j \in b_j$ و $Q'_j \in b_j^{-1}$ داریم:

$$\omega'(Q_j) = \omega'(Q'_j)$$

$$\int_{P_0}^{Q_j} \omega - \int_{P_0}^{Q'_j} \omega = \int_{Q'_j}^{Q_j} \omega = A_j \tag{۹}$$

با جایگذاری داریم:

$$\int_{\partial F_g} \omega'(P) \int_{P_0}^{P} \omega = \sum_{j=1}^{g} (-B_j \int_{a_j} \omega' + A_j \int_{b_j} \omega') =$$

$$= \sum_{j=1}^{g} (A_j B'_j - A'_j B_j)$$

در نهایت برای اثبات قضیه برای یک پایه‌ی فرمال دلخواه برای $H_1(\mathcal{R}, \mathbb{C})$، مستقیما بررسی کرد که سمت راست تساوی (۷) تحت نگاشت‌های تغییر مختصات ثابت است. □

۲ دیفرانسیل‌های آبلی نوع اول، دوم و سوم

فرض کنید $\mathcal{R}$ یک رویه‌ی ریمانی باشد. در این صورت نگاشت‌های تغییر مختصات هلومورفیک است و می‌توانیم دیفرانسیل‌های خاصی را روی $\mathcal{R}$ در نظر بگیریم.

تعریف ۶. *دیفرانسیل ω روی رویه‌ی ریمانی $\mathcal{R}$ را هلومورفیک (یا فرم دیفرانسیل آبلی نوع اول) می‌گوییم اگر برای هر نقشه‌ی موضعی، قابل نمایش به صورت*

$$\omega = h(z)\mathrm{d}z$$

باشد که در آن $h(z)$ تابعی هلومورفیک است. دیفرانسیل $\bar{\omega}$ را پادهلومورفیک[۷] می‌گوییم.

طبق تعریف دیفرانسیل‌های هلومورفیک و پادهلومورفیک بسته‌اند.

فرم‌های دیفرانسیل هلومورفیک را به عنوان یک فضای برداری مختلط با $H^{1}(\mathcal{R}, \mathbb{C})$ نمایش می‌دهیم. در ادامه می‌خواهیم بدانیم بعد این فضا چگونه است؟

لم ۷. *فرض کنید ω یک فرم دیفرانسیل هلومورفیک ناصفر روی $\mathcal{R}$ باشد. در این صورت تناوب‌های A_j و B_j از آن دارای این خاصیت است که:*

$$Im(\sum_{j=1}^{g} A_j \bar{B}_j) < 0$$

اثبات. تناوب‌های $\bar{\omega}$ عبارتند از $\bar{A}_j, \bar{B}_j$. حال قضیه‌ی دوخطی ریمان را در مورد ω و $\bar{\omega}$ به کار می‌بریم و با استفاده از

$$i\omega \wedge \bar{\omega} = i \mid h \mid^{2} \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = 2 \mid h \mid^{2} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y > 0$$

حکم نتیجه می‌شود. □

نتیجه ۸. *اگر تمام a-تناوب‌های دیفرانسیل هلومورفیک ω صفر باشد، یعنی*

$$\int_{a_j} \omega = 0, \quad j = 1, \dots, g$$

در این صورت $\omega \equiv 0$.

نتیجه ۹. *اگر تمام تناوب‌های دیفرانسیل هلومورفیک ω حقیقی باشد، آنگاه $\omega \equiv 0$.*

نتیجه ۱۰. $\dim(H^{1}(\mathcal{R}, \mathbb{C})) \leq g$.

اثبات. اگر $\omega_1, \dots, \omega_{g+1}$ هلومورفیک باشند، در این صورت ترکیب خطی از آن‌ها به شکل $\sum_{i=1}^{g+1} \alpha_i \omega_i$ وجود دارد که تمام a-تناوب‌های آن صفر است. حال بنابر نتیجه ۸ داریم:

$$\sum_{i=1}^{g+1} \alpha_i \omega_i \equiv 0$$

بنابراین $\omega_1, \dots, \omega_{g+1}$ وابسته‌ی خطی‌اند. پس $\dim(H^{1}(\mathcal{R}, \mathbb{C})) \leq g$. □

قضیه ۱۱. *بعد فضای دیفرانسیل‌های هلومورفیک از یک رویه‌ی ریمانی فشرده برابر است با تعداد گونه‌های آن، یعنی داریم:*

$$\dim(H^{1}(\mathcal{R}, \mathbb{C})) = g(\mathcal{R})$$

اثبات این قضیه را در بخش‌های بعدی می‌آوریم. هنگامی که رویه‌ی ریمانی $\mathcal{R}$ مشخصا توصیف شده باشد، معمولا می‌توانیم پایه‌ی $\omega_1, \dots, \omega_g$ از دیفرانسیل‌های هلومورفیک را برای آن صریحا بیان کنیم.

[۷] anti-holomorphic

قضیه ۱۲. *دیفرانسیل‌های*

$$\omega_j = \frac{\lambda^{j-1}\mathrm{d}\lambda}{\mu}, \quad j = 1, \dots, g$$

یک پایه از دیفرانسیل‌های هلومورفیک برای رویه‌ی ریمانی ابربیضوی

$$\mu^2 = \prod_{i=1}^{N}(\lambda - \lambda_i) \quad \lambda_i \neq \lambda_j$$

است که در آن $N = 2g + 1$ یا $N = 2g + 2$.

تعریف ۱۳. *فرض کنید a_j, b_j، $j = 1, \dots, g$، پایه‌های فرمال برای $H_1(\mathcal{R}, \mathbb{Z})$ باشند. پایه‌ی دوگان از دیفرانسیل‌های هلومورفیک ω_k، $k = 1, \dots, g$ که به وسیله‌ی*

$$\int_{a_j} \omega_k = 2\pi i \delta_{jk}$$

نرمال می‌شود، فرمال می‌گوییم.

تا اینجا بحث در مورد دیفرانسیل‌های هلومورفیک بود، می‌خواهیم در مورد دیفرانسیل‌های با نقاط تکین نیز صحبت کنیم.

تعریف ۱۴. *دیفرانسیل Ω را مرومورفیک یا دیفرانسیل آبلی می‌گوییم اگر در هر نقشه‌ی موضعی $z : U \to \mathbb{C}$ به شکل*

$$\Omega = g(z)\mathrm{d}z$$

باشد که $g(z)$ تابعی مرومورفیک است. انتگرال $\int_{P_0}^{P} \Omega$ از یک دیفرانسیل مرومورفیک را انتگرال آبلی می‌گویند.

فرض کنید z یک مختصات موضعی در نقطه‌ی P باشد و $z(P) = 0$. همچنین

$$\Omega = \sum_{k=N(P)}^{\infty} g_k z^k \mathrm{d}z$$

نمایش دیفرانسیل Ω در P باشد. اعداد $N(P)$ و g_{-1} به انتخاب مختصات موضعی بستگی ندارد و تنها وابسته به Ω هستند. $N(P)$ را مرتبه‌ی نقطه‌ی P می‌گوییم. اگر $N(P)$ منفی باشد، $-N(P)$ را مرتبه‌ی قطب Ω در P می‌گوییم. ضریب g_{-1} را باقیمانده‌ی[8] Ω در P می‌نامیم. این عدد به شکل زیر نیز قابل تعریف است:

$$res_P \Omega \equiv g_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \Omega$$

که γ یک خم ساده‌ی بسته حول P در جهت مثبت است.

فرض کنید S مجموعه نقاط تکین Ω، یعنی

$$S = \{P \in \mathcal{R} \mid N(P) < 0\}$$

باشد. مجموعه‌ی S گسسته است و اگر $\mathcal{R}$ فشرده باشد، S متناهی است.

لم ۱۵. *فرض کنید Ω یک دیفرانسیل آبلی روی رویه‌ی ریمانی فشرده‌ی $\mathcal{R}$ باشد. در این صورت*

$$\sum_{P_j \in S} res_{P_j} \Omega = 0$$

که S مجموعه‌ی نقاط تکین Ω است.

[8] Residue

اثبات. با استفاده از مدل همبند ساده‌ی F_g از $\mathcal{R}$ و تعریف انتگرالی معادل با $res_{P_j}\Omega$ داریم:

$$\sum_{P_j\in S} res_{P_j}\Omega = \frac{1}{2\pi i}\sum_j \int_{\gamma_j}\Omega = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial F}\Omega = 0$$

در اینجا از اینکه Ω روی $\mathcal{R}\backslash S$ هلومورفیک است و معادله

$$\partial F_g = \sum_{i=1}^{g} a_i + a_i^{-1} + b_i + b_i^{-1}$$

استفاده کردیم. $\square$

تعریف ۱۶. *یک دیفرانسیل مرومورفیک با نقاط تکین را دیفرانسیل آبلی از نوع دوم می‌گوییم اگر باقی‌مانده تمام نقاط تکین آن صفر باشد. یک دیفرانسیل مرومورفیک با باقی‌مانده ناصفر را دیفرانسیل آبلی از نوع سوم می‌گوییم.*

لم ۱۵ انگیزه‌ی انتخاب دیفرانسیل‌های مرومورفیک خاصی را به ما می‌دهد. دیفرانسیل نوع دوم $\Omega_R^{(N)}$ که تنها در نقطه‌ی $R\in\mathcal{R}$ نقطه‌ی تکین به شکل زیر دارد:

$$\Omega_R^{(N)} = (\frac{1}{z^{N+1}} + O(1))\mathrm{d}z \tag{10}$$

که در آن z مختصات موضعی در R با $z(R)=0$ است. دیفرانسیل آبلی نوع سوم Ω_{RQ} دو نقطه‌ی تکین در R,Q به شکل زیر دارد:

$$res_R\Omega_{RQ} = -res_Q\Omega_{RQ} = 1$$

بنابراین نزدیک R داریم:

$$\Omega_{RQ} = (\frac{1}{z_R} + O(1))\mathrm{d}z_R \tag{11}$$

و در نزدیکی Q داریم:

$$\Omega_{RQ} = (-\frac{1}{z_Q} + O(1))\mathrm{d}z_Q \tag{12}$$

که z_Q, z_R مختصات موضعی در R و Q با $z_R(R)=z_Q(Q)=0$ است. برای انتگرال‌های آبلی معادل نتیجه می‌شود:

$$\int^P \Omega_R^{(N)} = -\frac{1}{Nz^N} + O(1) \quad P\to R \tag{13}$$

$$\int^P \Omega_{RQ} = \log z_R + O(1) \quad P\to R \tag{14}$$

$$\int^P \Omega_{RQ} = -\log z_Q + O(1) \quad P\to Q \tag{15}$$

انتگرال‌های آبلی نوع اول و دوم روی F_g تک مقداری[9] است. انتگرال آبلی نوع سوم Ω_{RQ} روی $F_g\backslash[R,Q]$ تک مقداری است که در آن $[R,Q]$ برش از R به Q واقع در F_g است.

دیفرانسیل آبلی نوع دوم $\Omega_R^{(N)}$ وابسته به انتخاب مختصات موضعی z است.

می‌توانیم دیفرانسیل‌های آبلی نوع اول را به $\Omega_R^{(N)}$ و Ω_{RQ} با حفظ نقاط تکین اضافه کنیم. در واقع ترکیب خطی سره $\sum_{i=1}^{g}\alpha_i\omega_i$ را می‌توانیم به شکل زیر نرمال کنیم:

$$\int_{a_j}\Omega_R^{(N)} = 0 \ , \quad \int_{a_j}\Omega_{RQ} = 0 \ , \quad j=1,\dots,g \tag{16}$$

تعریف ۱۷. *دیفرانسیل‌های $\Omega_R^{(N)}$ و Ω_{RQ} با نقاط تکین تعریف شده در (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) و تمام a-تناوب‌های صفر، معادله‌ی (۱۶)، دیفرانسیل آبلی نرمال شده‌ی نوع دوم و سوم می‌نامیم.*

[9] Single-Valued

قضیه ۱۸. *رویه‌ی ریمان فشرده‌ی $\mathcal{R}$ با پایه‌ی استاندارد از حلقه‌های $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$، نقاط $P, Q \in \mathcal{R}$، مختصات موضعی z در $\mathcal{R}$ و $N \in \mathbb{N}$ داده شده است. در این صورت دیفرانسیل آبلی نرمال از نوع دوم $\Omega_R^{(N)}$ و نوع سوم Ω_{RQ} به صورت یکتا وجود دارد.*

وجود این نوع فرم‌ها را در بخش‌های بعدی ثابت می‌کنیم اما اثبات یکتایی آن ساده است. تفاضل هلومورفیک دو دیفرانسیل نرمال با نقاط تکین یکسان، دارای a-تناوب‌های صفر است و بنابراین دیفرانسیل صفر است و این یکتایی را نتیجه می‌دهد.
بنا به نتیجه‌ی ۹ دیفرانسیل‌های آبلی از نوع دوم و سوم می‌تواند نسبت به (۱۶) متقارن‌تر نرمال شود. تمام تناوب‌ها را می‌توان به صورت موهومی نرمال کرد:

$$Re\int_\gamma \Omega = 0, \quad \forall\gamma \in H_1(\mathcal{R},\mathbb{Z})$$

نتیجه ۱۹. *دیفرانسیل‌های آبلی نرمال شده یک پایه برای فضای دیفرانسیل‌های آبلی روی $\mathcal{R}$ است.*

۳ تناوب‌های دیفرانسیل‌های آبلی. واریته ژاکوبی

تعریف ۲۰. *فرض کنید a_j, b_j، $j = 1, \dots, g$ پایه‌ی استاندارد برای همولوژی $\mathcal{R}$ باشد و ω_k، $k = 1, \dots, g$، پایه‌ی دوگان متناظر برای $H^1(\mathcal{R},\mathbb{C})$ باشد. ماتریس*

$$B_{ij} = \int_{b_i} \omega_j$$

را ماتریس متناوب $\mathcal{R}$ می‌گویند.

قضیه ۲۱. *ماتریس متناوب، متقارن است و بخش حقیقی آن منفی است، یعنی:*

$$B_{ij} = B_{ji}$$

$$Re(B\alpha,\alpha) < 0, \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}^g\backslash\{0\}$$

اثبات. برای اثبات قسمت اول، دیفرانسیل‌های هلومورفیک نرمال، $\omega = \omega_i$ و $\omega' = \omega_j$ را در قضیه‌ی دوخطی ریمان جایگذاری کنید. صفر بودن سمت چپ، $\omega_i \wedge \omega_j \equiv 0$، حکم اول را نتیجه می‌دهد. برای قسمت دوم، لم ۷ با $\omega = \sum \alpha_k\omega_k$ نتیجه می‌دهد:

$$0 > Im\sum_{j=1}^{g} A_j\bar{B}_j = Im(\sum_{j=1}^{g} 2\pi i\alpha_j \sum_{k=1}^{g} B_{jk}\alpha_k) = 2\pi Re(B\alpha,\alpha)$$

□

ماتریس متناوب به پایه‌ی همولوژی وابسته است. از نمادگذاری زیر استفاده می‌کنیم تا در ادامه این وابستگی را بررسی کنیم:

$$\begin{pmatrix}\tilde{a}\\ \tilde{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{A} & \mathrm{B}\\ \mathrm{C} & \mathrm{D}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\mathrm{A} & \mathrm{B}\\ \mathrm{C} & \mathrm{D}\end{pmatrix} \in Sp(g,\mathbb{Z}) \qquad (17)$$

لم ۲۲. *ماتریس متناوب B و $\tilde{B}$ از رویه‌ی ریمانی R متناظر با پایه‌های همولوژی (a,b) و $(\tilde{a},\tilde{b})$ با معادله‌ی زیر در ارتباط هستند:*

$$\tilde{B} = 2\pi i(\mathrm{D}B + 2\pi i\mathrm{C})(\mathrm{B}B + 2\pi i\mathrm{A})^{-1}$$

که در آن $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ ضرایب ماتریس سمپلیتیک[10] است.

[10] Symplectic

اثبات. فرض کنید $\omega = (\omega_۱, \ldots, \omega_g)$ پایه‌ی استاندارد دوگان نسبت به (a, b) از دیفرانسیل‌های هلومورفیک باشد. ستون‌های ماتریس را با دیفرانسیل‌ها و سطرهای آن را با دورها برچسب‌گذاری می‌کنیم. داریم:

$$\int_{\tilde{a}} \omega = ۲\pi i \mathrm{A} + \mathrm{B}B \quad , \quad \int_{\tilde{b}} \omega = ۲\pi i \mathrm{C} + \mathrm{D}B$$

پایه‌ی فرمال $H^۱(\mathcal{R}, \mathbb{C})$ دوگان نسبت به پایه‌ی $(\tilde{a}, \tilde{b})$ توسط ضرب از راست بدست می‌آید:

$$\tilde{\omega} = ۲\pi i \omega (۲\pi i \mathrm{A} + \mathrm{B}B)^{-۱}$$

برای ماتریس متناوب این نتیجه می‌دهد:

$$\tilde{B} = \int_{\tilde{B}} \tilde{\omega} = (۲\pi i \mathrm{C} + \mathrm{D}B) ۲\pi i (۲\pi i \mathrm{A} + \mathrm{B}B)^{-۱}$$

□

با استفاده از تساوی دوخطی ریمان تناوب‌های فرم‌های دیفرانسیل آبلی نرمال شده از نوع دوم و سوم را می‌توان به صورت بخش‌هایی از دیفرانسیل‌های هلومورفیک نرمال شده بیان کرد.

لم ۲۳. *فرض کنید ω_j، $\Omega_R^{(N)}$ و Ω_{RQ} فرم‌های دیفرانسیل آبلی نرمال شده در تعریف ۱۷ باشند. همچنین z مختصات موضعی در R با $z(R) = ۰$ باشد و*

$$\omega_j = \sum_{k=۰}^{\infty} \alpha_{k,j} z^k \mathrm{d}z \quad P \sim R \tag{۱۸}$$

نمایش دیفرانسیل هلومورفیک نرمال در R باشد. در این صورت تناوب‌های $\Omega_R^{(N)}$ و Ω_{RQ} برابر است با:

$$\int_{b_j} \Omega_R^{(N)} = \frac{۱}{N} \alpha_{N-۱,j} \tag{۱۹}$$

$$\int_{b_j} \Omega_{RQ} = \int_R^Q \omega_j \tag{۲۰}$$

که مسیر انتگرال $[R, Q]$ در (۱۹) خم‌های a و b را قطع نمی‌کند.

اثبات. در قضیه‌ی دوخطی ریمان قرار دهید $\omega = \Omega_R^{(N)}$ و $\omega_j = \omega'$. حال انتگرال:

$$\int_{\partial F_g} \omega_j(P) \int^P \Omega_R^{(N)}$$

به کمک باقیمانده‌ها قابل محاسبه است. تابع زیر انتگرال یک تابع مرومورفیک روی F_g با یک نقطه‌ی تکین در نقطه‌ی R است. از ضرب معادلات (۱۳) و (۱۸) داریم:

$$res_R \omega_j(P) \int^P \Omega_R^{(N)} = -\frac{۱}{N} \alpha_{N-۱,j}$$

در سمت راست تساوی ریمان تنها قسمت شامل $A'_j = ۲\pi i$ غیرثابت است که این (۱۹) را نتیجه می‌دهد. با محاسبات مشابه برای $\omega = \omega_j$ و $\omega' = \Omega_{RQ}$ ثابت می‌شود:

$$\int_{\partial F_g} \Omega_{RQ}(P) \int_{P_۰}^P \omega_j = ۲\pi i (\int_{P_۰}^R - \int_{P_۰}^Q \omega_j) = ۲\pi i \int_Q^R \omega_j = ۲\pi i \int_{b_j} \Omega_{RQ}$$

□

در انتهای این بخش دو نمادگذاری را معرفی می‌کنیم که نقش اساسی در مطالعه توابع روی رویه‌های ریمان فشرده دارند.
فرض کنید Λ یک شبکه به شکل

$$\Lambda = \{۲\pi i N + BM, \quad N, M \in \mathbb{Z}^g\}$$

تولید شده توسط تناوب‌های $\mathcal{R}$ باشد. این شبکه یک هم‌ارزی روی $\mathbb{C}^g$ تعریف می‌کند. دو نقطه‌ی $\mathbb{C}^g$ را هم‌ارز می‌گوییم اگر تفاوتشان معادل یک عضو از Λ باشد.

تعریف ۲۴. *چنبره‌ی مختلط*[۱۱]

$$Jac(\mathcal{R}) = \mathbb{C}^g/\Lambda$$

را واریته‌ی ژاکوبی[۱۲] *(ژاکوبین*[۱۳]*) از $\mathcal{R}$ می‌گویند.*

تعریف ۲۵. *نگاشت*

$$\mathcal{A} : \mathcal{R} \to Jac(\mathcal{R}), \quad \mathcal{A}(P) = \int_{P_\circ}^{P} \omega$$

که در آن $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_g)$ پایه‌ی فرمال از دیفرانسیل‌های هلومورفیک است و $P_\circ \in \mathcal{R}$، را نگاشت آبل[۱۴] *می‌گویند.*

۴ دیفرانسیل‌های هارمونیک و اثبات قضایای وجودی

توجه کنید که زاویه‌ی بین بردارهای مماس روی رویه‌های ریمان خوش‌تعریف است. بنابراین می‌توانیم فضای مماس را به اندازه‌ی $\frac{\pi}{2}$ دوران دهیم. نگاشت القا شده از این دوران بر روی دیفرانسیل‌ها را عملگر مزدوج[۱۵] می‌گویند.

$$\omega = f\mathrm{d}z + g\mathrm{d}\bar{z} \mapsto *\omega = -if\mathrm{d}z + ig\mathrm{d}\bar{z}$$

به وضوح $-1 = **$. با استفاده از عملگر مزدوج، دیفرانسیل‌های نوع $(1,0)$ ($(0,1)$) را می‌توان با خاصیت $*\omega = -i\omega$ ($*\omega = i\omega$) مشخص کرد.

فرض کنید $\mathcal{R}$ یک رویه‌ی ریمانی باشد. فضای هیلبرت $L_2(\mathcal{R})$ از دیفرانسیل‌های مربعی انتگرال‌پذیر[۱۶] با ضرب داخلی

$$(\omega_1, \omega_2) = \int_{\mathcal{R}} \omega_1 \wedge *\bar{\omega}_2 \tag{21}$$

را در نظر بگیرید. در مختصات موضعی $z : U \subset \mathcal{R} \to V \subset \mathbb{C}$، داریم:

$$\int_U \omega_1 \wedge *\bar{\omega}_2 = 2\int_V (f_1\bar{f}_2 + g_1\bar{g}_2)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

به سادگی دیده می‌شود که فرمول (۲۱) یک ضرب داخلی هرمیتی[۱۷] تعریف می‌کند، یعنی:

$$(\omega_2, \omega_1) = \overline{(\omega_1, \omega_2)}$$

$$(\omega, \omega) \geq 0 \; and \; (\omega, \omega) = 0 \iff \omega = 0$$

زیرفضاهای E و E^* از دیفرانسیل‌های دقیق و کودقیق[۱۸] را به صورت زیر داریم:

$$E = \overline{\{\mathrm{d}f \mid f \in C_\circ^\infty(\mathcal{R})\}}$$

$$E^* = \overline{\{*\mathrm{d}f \mid f \in C_\circ^\infty(\mathcal{R})\}}$$

که $C_\circ^\infty$ فضای توابع هموار روی $\mathcal{R}$ با دامنه‌ی فشرده و علامت بار به معنی بستار در $L_2(\mathcal{R})$ است. زیرفضای عمود $E^\perp, E^{*\perp}$ را در نظر بگیرید و تعریف کنید:

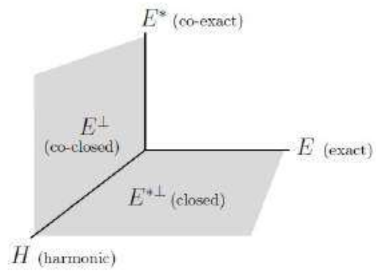
$$H := E^\perp \cap E^{*\perp}$$

توجه داشته باشید که E و E^* عمودند. کافی است برای دیفرانسیل‌های C^∞، دقیق و کودقیق بررسی کنیم:

$$(\mathrm{d}f, *\mathrm{d}g) = \int_{\mathcal{R}} \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\bar{g} = \int_{\mathcal{R}} \bar{g}\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = 0$$

---

[۱۱] Complex torus
[۱۲] Jacobi variety
[۱۳] Jacobian
[۱۴] Abel map
[۱۵] Conjugation Operator
[۱۶] square integrable function
[۱۷] Hermitian scalar product
[۱۸] Co-exact



شکل ۳: تجزیه‌ی متعامد $L_2(\mathcal{R})$

که برای معادله‌ی فوق از قضیه‌ی استوکس برای توابع با دامنه‌ی فشرده و $\mathrm{d}^2 = 0$ استفاده کردیم. حال تجزیه‌ی متعامد[۱۹]
$$L_2(\mathcal{R}) = E \oplus E^* \oplus H$$
را داریم که در شکل ۳ دیده می‌شود.

برای تفسیر این زیرفضاها باید دیفرانسیل‌های هموار را در نظر بگیریم. یک C^1-دیفرانسیل α را بسته (کوبسته) می‌گوییم اگر وتنها اگر $\mathrm{d}\alpha = 0$ ($\mathrm{d} * \alpha = 0$).

لم ۲۶. *فرض کنید $\alpha \in L_2(\mathcal{R})$، C^1 باشد. در این صورت $\alpha \in E^\perp$ ($\alpha \in E^{*\perp}$) اگر و تنها اگر α کوبسته (بسته) باشد.*

اثبات. مستقیما از قضیه‌ی استوکس $\alpha \in E^{*\perp}$ معادل است با
$$0 = (\alpha, *\mathrm{d}f) = \int_{\mathcal{R}} \alpha \wedge \mathrm{d}\bar{f} = \int_{\mathcal{R}} \bar{f}\mathrm{d}\alpha$$
برای $f \in C_0^\infty(\mathcal{R})$ دلخواه. این نتیجه می‌دهد $\mathrm{d}\alpha = 0$. □

نتیجه ۲۷. *فرض کنید $\alpha \in H$، C^1 باشد. در این صورت به صورت موضعی داریم:*
$$\alpha = f\mathrm{d}z + g\mathrm{d}\bar{z}$$
که f یک تابع هلومورفیک و g پادهلومورفیک است.

تعریف ۲۸. *دیفرانسیل h را هارمونیک[۲۰] می‌گوییم اگر به صورت موضعی ($z : U \subset \mathcal{R} \to V \subset \mathbb{C}$) به شکل*
$$h = \mathrm{d}H$$
باشد که $H \in C^\infty(V)$ تابعی هارمونیک است یعنی $\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} H = 0$.

دیفرانسیل‌های هارمونیک و هلومورفیک رابطه‌ی نزدیک دارند که در لم زیر می‌بینیم:

لم ۲۹. *دیفرانسیل h هارمونیک است اگر و تنها اگر به شکل*
$$h = \omega_1 + \bar{\omega}_2 \tag{۲۲}$$
باشد که ω_1, ω_2 هلومورفیک هستند. دیفرانسیل ω هلومورفیک است اگر و تنها اگر به شکل
$$\omega = h + i * h \tag{۲۳}$$
باشد که h هارمونیک است.

---
[۱۹] Orthogonal decomposition
[۲۰] Harmonic

اثبات. فرض کنید h هارمونیک باشد و به صورت موضعی به شکل $h = \mathrm{d}H$ باشد. چون $H_{z\bar{z}} = ۰$، دیفرانسیل $H_z\mathrm{d}z$ هلومورفیک و دیفرانسیل $H_{\bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}$ پادهلومورفیک است. برعکس، فرض کنید $h = f\mathrm{d}z + g\mathrm{d}\bar{z}$ که f هلومورفیک و g پادهلومورفیک است. در این صورت h را می‌توانیم به شکل $h = \mathrm{d}(F+G)$ بنویسیم که در آن تابع هلومورفیک F به صورت $F_z = f$ و تابع پادهلومورفیک G به صورت $G_{\bar{z}} = g$ تعریف می‌شود. تابع $F+G$ به وضوح هارمونیک است.

برای اثبات قسمت دوم لم، دقت کنید که h داده شده در (۲۲)، مجموع

$$h + i * h = ۲\omega_۱$$

همواره هلومورفیک است. برعکس، برای هلومورفیک داده شده‌ی ω،

$$h = \frac{\omega - \bar{\omega}}{۲}$$

دیفرانسیل هارمونیک است که در (۲۳) صدق می‌کند. □

برای اثبات قضیه‌ی بعدی نیاز به خصوصیات توابع هلومورفیک در فضای $L_۲$ داریم. لم زیر را برای این مسئله داریم.

لم ۳۰. *لم ویل*[۲۱]*: فرض کنید f تابعی مربعی انتگرال‌پذیر روی دیسک D باشد. در این صورت f هلومورفیک است اگر و تنها اگر*

$$\int_D f\eta_{\bar{z}}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = ۰$$

برای هر $\eta \in C_۰^\infty(D)$، با دامنه‌ی فشرده.

قضیه ۳۱. *فضای H فضای دیفرانسیل‌های هارمونیک است.*

اثبات. دیفرانسیل هارمونیک h بسته، کوبسته و $C^۱$ است. لم ۲۶ نتیجه می‌دهد $h \in H$.

برعکس فرض کنید $\alpha \in H$. برای هر $\eta \in C_۰^\infty(\mathcal{R})$ داریم:

$$(\alpha, \mathrm{d}\eta) = (\alpha, *\mathrm{d}\eta) = ۰ \tag{۲۴}$$

مختصات موضعی $z : U \to V$ را در نظر بگیرید. برای $\alpha = f\mathrm{d}z + g\mathrm{d}\bar{z}$، فرمول (۲۴) نتیجه می‌دهد:

$$\int_V f\eta_{\bar{z}}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = \int_V g\eta_z\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = ۰$$

برای هر $\eta \in C_۰^\infty(V)$. هلومورفیک بودن f و $\bar{g}$ از لم ویل نتیجه می‌شود و لم ۲۹ اثبات را کامل می‌کند. □

نتیجه ۳۲. *هر دیفرانسیل مربعی انتگرال‌پذیر α روی $\mathcal{R}$ را می‌توان به طور یکتا به صورت جمع متعامد دیفرانسیل دقیق $\mathrm{d}f$، کودقیق $*\mathrm{d}g$ و هارمونیک h نوشت:*

$$\alpha = \mathrm{d}f + *\mathrm{d}g + h \tag{۲۵}$$

در ادامه می‌خواهیم $۲g$ دیفرانسیل هارمونیک مستقل خطی برای رویه‌ی ریمانی فشرده $\mathcal{R}$ ارائه کنیم. حلقه‌ی ساده‌ی γ را روی $\mathcal{R}$ در نظر بگیرید که خود را قطع نمی‌کند. نوار Γ را شامل γ بگیرید. این نوار شامل دوایر متحدالمرکز است و γ آن را به دو بخش Γ^+ و Γ^- تقسیم می‌کند. نوار کوچکتر $\Gamma_۰$ را شامل γ در Γ بگیرید، شکل ۴. تابع حقیقی مقدار F روی $\mathcal{R}$ با خصوصیات

$$F_{|\Gamma_۰^-} = ۱, \quad F_{|\mathcal{R}\backslash\Gamma^-} = ۰, \quad F \in C^\infty(\mathcal{R}\backslash\gamma)$$

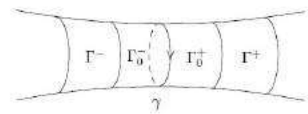
دیفرانسیل هموار α_γ را تعریف می‌کنیم:

$$\alpha_\gamma \begin{cases} \mathrm{d}F & on\ \Gamma\backslash\gamma \\ ۰ & on\ (\mathcal{R}\backslash\Gamma) \cup \gamma \end{cases}$$

حال مدل همبند ساده‌ی F_g از $\mathcal{R}$ را در نظر بگیرید و یکی از حلقه‌های پایه‌ی $a_۱, b_۱, \ldots, a_g, b_g$ مثلا $a_۱$ را برای γ در نظر بگیرید. دیفرانسیل α_γ به روشی که ساختیم، حول $b_۱$ تناوب ناصفر دارد. با انتخاب جهت مناسب، داریم:

$$\int_{b_۱} \alpha_\gamma = ۱$$

[۲۱] Weil's lemma



شکل ۴: ساختار فرم‌های بسته و نادقیق

به طوری که تمامی تناوب‌های دیگر α_γ صفر باشد. دیفرانسیل α_γ بسته است و دقیق نمی‌باشد. آن را می‌توانیم به صورت ترکیب دیفرانسیل دقیق $\mathrm{d}f_\gamma$ و هارمونیک h_γ نوشت:

$$\alpha_\gamma = \mathrm{d}f_\gamma + h_\gamma$$

توجه کنید که هر دو قسمت ترکیب هموار است. دیفرانسیل هارمونیک h_γ همان تناوب‌های دیفرانسیل α_γ را دارد.

با انتخاب حلقه‌ای مخالف γ از $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ می‌توانیم به همین ترتیب $2g$ دیفرانسیل هارمونیک مستقل خطی بیابیم. بنابراین برای بعد داریم:

$$\dim H \geq 2g \tag{۲۶}$$

دوباره دیفرانسیل‌های هلومورفیک و پادهلومورفیک را در نظر می‌گیریم و فضای آن‌ها را به ترتیب با $\mathcal{H} = H^1(\mathcal{R}, \mathbb{C})$ و $\bar{\mathcal{H}}$ نشان می‌دهیم. در مورد این فضاها به وضوح داریم $\mathcal{H} \perp \bar{\mathcal{H}}$

گزاره ۳۳. *فرض کنید $\mathcal{R}$ رویه‌ی ریمانی فشرده با g گونه باشد. در این صورت*

$$\dim H^1(\mathcal{R}, \mathbb{C}) \geq g$$

اثبات. فضاهای $\mathcal{H}$ و $\bar{\mathcal{H}}$ متعامدند و دارای بعد یکسانند. به عبارت دیگر بنا به لم ۲۹:

$$H \subset \mathcal{H} \oplus \bar{\mathcal{H}}$$

که این نتیجه می‌دهد $\dim H \leq 2 \dim \mathcal{H}$. و از نامساوی (۲۶) حکم نتیجه می‌شود. □

قضیه‌ی ۱۱ از گزاره‌ی ۳۳ و نتیجه‌ی ۱۰ حاصل می‌شود.

به عنوان نتیجه‌ای از قضیه‌ی ۱۱، بدست می‌آوریم $\dim H \leq 2g$، و در نهایت $\dim H = 2g$. این مشاهده با روش ساخت دیفرانسیل‌های هارمونیک h_γ نتیجه می‌دهد:

گزاره ۳۴. *رویه‌ی ریمانی فشرده با پایه‌ی فرمال از حلقه‌های $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ داده شده است. در این صورت $2g$ دیفرانسیل هارمونیک یکتای $h_1, \dots, h_{2g}$ با تناوب‌های*

$$\int_{a_j} h_i = \int_{b_j} h_{g+i} = \delta_{ij}, \quad \int_{a_j} h_{g+i} = \int_{b_j} h_i = 0, \quad i = 1, \dots, g$$

وجود دارد.

حال می‌خواهیم دیفرانسیل‌های آبلی نوع دوم، $\Omega_R^{(N)}$ را بسازیم. همسایگی‌های تودرتو $R \in U_0 \subset U_1 \subset \mathcal{R}$ شامل نقطه‌ی R و تابع هموار $\rho \in C^\infty(\mathcal{R})$ با این خاصیت که

$$\rho = \begin{cases} 1 & \mathrm{on} U_0 \\ 0 & \mathrm{on} \mathcal{R} \backslash U_1 \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید z یک مختصات موضعی در U_1 با $z(R) = 0$ باشد. دیفرانسیل

$$\psi := \mathrm{d}(-\frac{\rho}{N z^N}) = (-\frac{\rho_z}{N z^N} + \frac{\rho}{z^{N+1}})\mathrm{d}z - (\frac{\rho_{\bar{z}}}{N z^N})\mathrm{d}\bar{z}$$

را با همان نقطه تکین $\Omega_R^{(N)}$ به عنوان یکی از نقاط تکین‌اش، بگیرید. بخش $(0,1)$ دیفرانسیل ψ روی $\mathcal{R}$ هموار است و می‌توانیم آن را به مولفه‌های بسته، کوبسته و هارمونیک تجزیه کنیم:

$$\psi - i * \psi = \mathrm{d}f + *\mathrm{d}g + h \in E(\mathcal{R}) \oplus E^*(\mathcal{R}) \oplus H(\mathcal{R})$$

بگیرید:

$$\alpha := \psi - \mathrm{d}f$$

لم ۳۵. *دیفرانسیل α روی $\mathcal{R}\backslash R$ هارمونیک است و دیفرانسیل $\alpha - \frac{\mathrm{d}z}{z^{N+1}}$ روی U_0 هارمونیک است.*

اثبات. مجموعه‌ای بسته مانند $\bar{U} \subset U_0$ انتخاب کنید. برای α داریم:

$$\alpha = \mathrm{d}(-\frac{\rho}{Nz^{N+1}}) - \mathrm{d}f$$

که نتیجه می‌شود $\alpha \perp E^*(\mathcal{R}\backslash\bar{U})$. از طرف دیگر

$$\alpha = i*\psi + *\mathrm{d}g + h$$

که نتیجه می‌شود $\alpha \perp E(\mathcal{R}\backslash\bar{U})$. با ترکیب دو نتیجه‌ی بدست آمده داریم $\alpha \in H(\mathcal{R}\backslash\bar{U})$ برای $R \in U$ دلخواه. در مورد نمایش α در U_0 مشاهده می‌شود که $\psi - \frac{\mathrm{d}z}{z^{N+1}}|_{U_0} \equiv 0$. روی U_0 نتیجه می‌شود

$$\alpha - \frac{\mathrm{d}z}{z^{N+1}} = -\mathrm{d}f = *\mathrm{d}g + h$$

که در این معادله $\alpha - \frac{\mathrm{d}z}{z^{N+1}}$ باید بر $E(U_0)$ و $E^*(U_0)$ عمود باشد، بنابراین در $H(U_0)$ قرار می‌گیرد. □

به عنوان یک نتیجه‌ی مستقیم از لم ۲۹ و ۳۵، گزاره‌ی زیر را داریم:

گزاره ۳۶. *دیفرانسیل*

$$\Omega := \frac{1}{2}(\alpha + i*\alpha)$$

روی $\mathcal{R}\backslash R$ و دیفرانسیل $\Omega - \frac{\mathrm{d}z}{z^{N+1}}$ روی U_0 هلومورفیک است.

وجود دیفرانسیل‌های نرمال شده نوع دوم، $\Omega_R^{(N)}$ که در قضیه‌ی ۱۸ بیان شده است، از گزاره‌ی ۳۶ نتیجه می‌شود.

برای اثبات وجود دیفرانسیل‌های نوع سوم، باید از دیفرانسیل‌های

$$\psi_{P_1P_2} = \mathrm{d}(\rho \log \frac{z - z_1}{z - z_2})$$

شروع کنیم که $z_1 = z(P_1)$ و $z_2 = z(P_2)$ مختصات موضعی دو نقطه‌ی $P_1, P_2 \in U_0$ است. با اعمال کارهایی که برای دیفرانیسل‌های نوع دوم انجام دادیم، دیفرانسیل‌های نوع سوم $\Omega_{P_1P_2}$ با

$$res_{P_1}\Omega_{P_1P_2} = -res_{P_2}\Omega_{P_1P_2} = 1$$

بدست می‌آید. و در نهایت هر دیفرانسیل آبلی نوع سوم Ω_{RQ} روی رویه‌ی ریمانی فشرده را می‌توان به صورت جمع متناهی از دیفرانسیل‌های پایه $\Omega_{P_1P_2}$ نوشت.

مراجع

[1] Alexander Bobenko, *Differential Geometrie III: Compact Riemanna Surfaces*.