میراث آبل در هندسه‌ی جبری

حمید احمدیان

این مقاله ترجمه‌ی بخشی از [۱] است که براساس کنفرانسی است که به مناسبت تولد ۲۰۰ سالگی نیلز هنریک آبل[۱] در ژوئن سال ۲۰۰۲ در اسلو[۲] برگزار شده است.

۱ منشا قضیه‌ی آبل

در دوران آبل و قبل از آن یکی از بزرگترین علایق ریاضیدانان محاسبه‌ی انتگرال توابع جبری بود که به شکل

$$\int y(x)\mathrm{d}x \tag{۱}$$

است که در آن $y(x)$ تابعی است که در معادله‌ی

$$f(x,y(x)) = 0 \tag{۲}$$

صدق می‌کند که $f(x,y)\in\mathbb{C}[x,y]$ یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر با ضرایب مختلط است. هر چند تا مدت‌ها بعد این مسئله صورت‌بندی نشد، اما به نظر می‌رسد که با انتخاب یک شاخه‌ی مناسب از جواب‌های معادله‌ی ۲ به همراه یک مسیر انتگرال‌گیری در صفحه‌ی x که از نقاط شاخه‌ای[۳] نمی‌گذرد – به این دلیل که در این نقاط ریشه‌های مکرر داریم – انتگرال ۱ خوش‌تعریف است. به عبارتی می‌توان خم جبری F° در $\mathbb{C}^2$ را با

$$f(x,y) = 0$$

تعریف کرد و روی F°، فرم دیفرانسیل گویای ω را که از تحدید

$$\omega = y\mathrm{d}x$$

به آن بدست آمده، در نظر گرفت. اگر F بستار F° در فشرده‌سازی $\mathbb{C}^2$؛ که با صفحه‌ی تصویری $\mathbb{P}^2$ یا $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ داده می‌شود، باشد می‌توان روی F خم γ را طوری گرفت که خارج از نقاط تکینگی F و قطب‌های ω باشد و بنابراین انتگرال ۱ به صورت

$$\int_\gamma \omega \tag{۳}$$

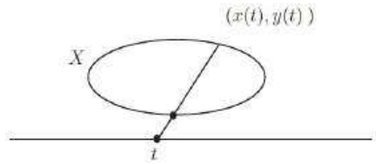
تعریف می‌شود.

در واقع در بین ریاضیدانان آن زمان، علاقه به حالت کلی‌تر

$$\int r(x,y(x))\mathrm{d}x \tag{۴}$$

بود که $r(x,y)$ تابعی گویا از x و y است و $y(x)$ همان است که در بالا آمد. تعریف مجرد انتگرال ۴ به همان صورت ۳ است، که اینجا ω از تحدید ۱-فرم دیفرانسیل گویای $r(x,y)\mathrm{d}x$ به F بدست می‌آید.(ω یک ۱-فرم مرومورفیک بر F است.)

[۱] Neils Henrik Abel
[۲] Oslo
[۳] branch point



شکل ۱: نمایش گویای یک خم در صفحه

یکی از علایق خاص در این زمینه، انتگرال‌های ابربیضوی[۴] بود:

$$\int \frac{p(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{q(x)}} \tag{۵}$$

که $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله‌ای هستند و

$$q(x) = x^n + q_۱ x^{n-۱} + \cdots + q_n$$

از درجه‌ی n با ریشه‌های متمایز است. در حالت $n = ۱, ۲$، معاصران آبل به خوبی می‌دانستند که این انتگرال‌ها برحسب توابع ابتدایی[۵] - مثلثاتی و لگاریتمی - قابل بیان هستند. دلیل هندسی این امر که آن هم در آن عصر شناخته شده بود، این است که هر خم مسطح را می‌توان به صورت گویا مانند شکل ۱ پرمایش کرد. قرار دادن توابع گویای $x(t)$ و $y(t)$ در رابطه‌ی ۵، انتگرال

$$\int r(t)\mathrm{d}t$$

را بدست می‌دهد که در آن $r(t)$ تابعی گویاست(نسبت دو چندجمله‌ای) و آنگاه این انتگرال را می‌توان به کمک تجزیه‌ی $r(t)$ به کسرهای جزئی محاسبه کرد.

علاقه‌ی ویژه‌ای به انتگرال‌های ابربیضوی ۵ در حالت $n = ۳, ۴$ وجود داشت که بخش مهمی از این حالت در جریان کارهای اویلر[۶] لژاندر[۷] و دیگران شناخته شد. به دلیلی که اکنون بیان خواهیم کرد، این دسته از انتگرال‌ها را «انتگرال‌های بیضوی[۸]» می‌نامیدند؛ همان‌گونه که در روند محاسبه‌ی طول کمانی از دایره به توابع مثلثاتی داده شده با انتگرال

$$\int \sqrt{\mathrm{d}x^۲ + \mathrm{d}y^۲} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{۱ - x^۲}} \quad , \quad x^۲ + y^۲ = ۱ \tag{۶}$$

برخورد می‌کنیم، توابعی که در جریان محاسبه‌ی طول کمانی از بیضی بدست می‌آمدند، بسیار مورد توجه بودند. بنابراین با قرار دادن

$$t = \arcsin(\frac{x}{a})$$

انتگرال محاسبه‌ی محیط بیضی

$$\int \sqrt{\mathrm{d}x^۲ + \mathrm{d}y^۲} \quad , \quad \frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$$

به انتگرال بیضوی زیر تبدیل می‌شود:

$$a \int \sqrt{\frac{a^۲ - k^۲x^۲}{a^۲ - x^۲}} \quad , \quad k^۲ = (a^۲ - b^۲)/a^۲ \tag{۷}$$

که به فرم لژاندر است.(در واقع در اینجا بیضی را به صورت

$$(x(t), y(t)) = (a \sin t, b \cos t)$$

[۴] hyperelliptic integrals
[۵] elementary function
[۶] Euler
[۷] Legendre
[۸] elliptic integrals

پرمایش کرده‌ایم.)

یک دسته‌ی بسیار مورد توجه از انتگرال‌های ۴، آن‌هایی بودند که تصور می‌شد در معادلات تابعی یا قضایای خاصی صدق می‌کنند. برای مثال اگر به کمک هندسه، دو برابر طول یک خم روی دایره را در معادله‌ی ۶ قرار دهیم، فرمول‌هایی برای $\sin(2\theta)$ و $\cos(2\theta)$ به صورت ترکیبی از $\sin\theta$ و $\cos\theta$ بدست می‌آید. حتی می‌توان برای حالت کلی‌تر $\sin(\theta+\theta')$ و ... نیز فرمول‌هایی بدست آورد که اینها قضایای در مورد انتگرال ۶ بدست می‌دهد. در قرن هجدهم، کانت فاگونو[۹]ی ایتالیایی روشی برای ساخت دوبرابر طول یک خم روی بیضی ارائه داد و آن را در معادله‌ی ۷ قرار داد. این کار باعث بدست آمدن قضایایی برای انتگرال بیضوی ۷ شد. همان‌طور که اشاره شد تصور فوق به ویژگی‌های بسیار خاصی در مورد انتگرال‌های فوق رسید که در اواخر قرن ۱۸ و اوایل قرن ۱۹ مورد مطالعه بودند.

۲ قضیه‌ی آبل و برخی نتایج آن

در کارهای آبل روی انتگرال توابع جبری دو ایده‌ی اصلی وجود دارد:

- جمع آبلی[۱۰]
- وارونگی[۱۱]

به کمک این دو ایده، آبل توانست به فرم بسیار کلی معادلات تابعی[۱۲] برای انتگرال‌ها دست یابد. در این بخش به توضیح این ایده‌ها می‌پردازیم.

ابتدا به بررسی چیزی می‌پردازیم که امروزه جمع آبلی نامیده می‌شود؛ انتگرال‌های ۱ و ۴ که به دلیل آنکه توابعی به‌شدت متعالی[۱۳] از حد بالای انتگرال‌گیری[۱۴] هستند، مطالعه‌ی مستقیم آن‌ها دشوار است.[۱۵] ایده‌ی آبل در نظر گرفتن مجموع انتگرال‌های نسبت داده شده به نقاط متغیری بود که اشتراک $F=\{f(x,y)=0\}$ با خانواده‌ی خم‌های $G_t=\{g(x,y,t)=0\}$ هستند که به طور گویا به t وابسته‌اند. بنابراین با فرض اینکه

$$F\cap G_t=\sum_i (x_i(t),y_i(t))$$

جواب دستگاه

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y,t)=0 \end{cases}$$

باشد؛ که همانند نمادگذاری دورهای جبری[۱۶] به طور جمعی نوشته شده، جمع آبلی نسبت داده شده به ۴ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u(t)=\sum_i \int_{x_0}^{x_i(t)} r(x,y(x))\mathrm{d}x \tag{8}$$

[۹] Count Fagnano

[۱۰] abelian sums

[۱۱] inversion

[۱۲] functional equations

[۱۳] highly transcendental functions

[۱۴] upper limit of integration

[۱۵] عبارت تابع‌های به‌شدت متعالی نیاز به تفسیر بیشتری دارد. آبل در مقاله‌ای که در سال ۱۸۲۶ منتشر کرد وجود چندجمله‌ای‌های R, F نشان داد به طوری‌که:

$$\int \frac{F\mathrm{d}}{\sqrt{R}}=\ln\big(\frac{P+\sqrt{R}Q}{P-\sqrt{R}Q}\big)$$

جواب دارد و P, Q دو چندجمله‌ای نسبت به هم اول می‌باشند. در اینجا R یک چندجمله‌ای درجه‌ی $2n$ با ریشه‌های مجزا از هم و F یک چندجمله‌ای از درجه‌ی $n-1$ است، بنابراین تابع زیر انتگرال، دیفرانسیل نوع سوم است. این یک استثنا است که انتگرال متعالی است ولی می‌توان آن را به صورت مجموعی از توابع ساده نوشت.

[۱۶] algebraic cycles

شکل ۲: (i)

شکل ۳: (ii)

در زیر به تفصیل شرح می‌دهیم که منظور از چنین عبارتی چیست؟

یک مثال بسیار مهم حالتی است که همانند شکل‌های ۲ و ۳ G_t خانواده‌ای از خطها در نظر گرفته شود.

در هردو حالت با در نظر گرفتن ۱-فرم دیفرانسیل $\omega = \mathrm{d}x/y$، انتگرال‌های ۴ به ترتیب به فرم زیر می‌شوند:

$$\begin{cases} (i) & \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \\ (ii) & \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+ax+b}} \end{cases} \tag{۹}$$

هرچند در حالت کلی جملات جمع آبلی به شدت متعالی‌اند، قضیه‌ی آبل جمع آبلی را بر حسب توابع مقدماتی بیان می‌کند.

قضیه ۱. *جمع آبلی ۸ را می‌توان به شکل*

$$u(t) = r(t) + \sum_{\lambda} a_\lambda \log(t - t_\lambda) \tag{۱۰}$$

نوشت که در آن $r(t)$ یک تابع گویا از t است.

در ادامه یکی از اثبات‌های آبل را برای این قضیه می‌آوریم:

اثبات. بنابر دلایلی که به زودی روشن خواهد شد، تابع گویایی به صورت

$$q(x,y) = r(x,y)f_y(x,y)$$

تعریف می‌کنیم. بنابراین در انتگرال‌های ظاهر شده در جمع آبلی ۸، انتگرالده تحدید فرم دیفرانسیل

$$\frac{q(x,y)\mathrm{d}x}{f_y(x,y)}$$

به خم جبری F است که قبلا تعریف شد. بنابراین با محاسبه داریم:

$$u'(t) = \sum_i \frac{q(x_i(t), y_i(t))x_i'(t)}{f_y(x_i(t), y_i(t))}$$

از

$$\begin{cases} f(x_i(t), y_i(t)) = 0 \\ g(x_i(t), y_i(t), t) = 0 \end{cases}$$

با مشتق‌گیری از این دو تساوی نسبت به t و حل دستگاه دو معادله و دو مجهول حاصل برای یافتن $x_i'(t)$ داریم:

$$x_i'(t) = \left(\frac{g_t f_y}{f_x g_y - f_y g_x}\right)(x_i(t), y_i(t))$$

به طوری که:

$$u'(t) = \sum_i s(x_i(t), y_i(t)) \tag{۱۱}$$

که در این‌جا $s(x,y)$ یک تابع گویاست که توسط

$$s(x,y) = \Big(\frac{qg_t}{f_x g_y - f_y g_x}\Big)(x,y)$$

(ناصفر شدن مخرج در تابع گویای بالا نتیجه‌ی این فرض است که دو خم F و G_t که با معادلات به ترتیب $f(x,y) = ۰$ و $g(x,y,t) = ۰$ داده می‌شدند، هیچ مولفه‌ی مشترکی ندارند. چرا که در غیر این صورت $F \cap G_t$ نامتناهی می‌شود در حالی که ما فرض کرده بودیم متشکل از متناهی نقطه‌ی $(x_i(t), y_i(t))$ است.) آبل مشاهده کرد که طرف راست عبارت ۱۱ یک تابع گویا از t است – از دیدگاه آنالیز مختلط واضح است چرا که $u'(t)$ یک تابع مرومورفیک[۱۷] تک‌مقداری[۱۸] بر $\mathbb{P}^1$ است. انتگرال‌گیری از بسط $u'(t)$ نتیجه‌ی موردنظر را می‌دهد. □

آبل در مقاله‌ی Paris memoir'e و همچنین در دیگر نوشته‌هایش در مورد بررسی حالات خاص این مبحث، موفق شد فرمول صریحی برای سمت راست ۱۱ و در نتیجه برای جملات ظاهر شده در سمت راست فرمول $u(t)$ در قضیه‌ی ۱ بدست آورد. برای مثال وقتی خم‌های G_t، خط هستند، درون‌یابی لاگرانژ[۱۹] فرمولی صریح برای $u'(t)$ می‌دهد.

در اینجا کاربرد قضیه‌ی آبل برای دو انتگرال در عبارت ۹ نشان می‌دهیم. هر دوی این انتگرال‌ها براساس ایده‌ی دوم آبل است که در بالا مطرح شد و به آن «معکوس کردن» انتگرال ۴ می‌گویند که عبارت است از تعریف مختصات $x(u)$ و $y(u)$ روی خم F به عنوان تابع‌های تک‌مقداره از متغیر u که در آن u معادله‌ی زیر را برآورده می‌کند:

$$u = \int_{(x_0,y_0)}^{(x(u),y(u))} \omega \tag{۱۲}$$

و در اینجا ω تحدید ۱–فرم دیفرانسیل $r(x,y)\mathrm{d}x$ به خم F است. برای مثال در انتگرال (i) در ۹، به وضوح داریم:

$$u = \int_{(0,1)}^{(\sin u, \cos u)} \omega$$

طرف راست ۱۰ را می‌توان با فرمول درون‌یابی لاگرانژ محاسبه کرد و به رابطه‌ی زیر رسید:

$$\int_0^{x_1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^{x_2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{x_1y_2+x_2y_1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

که آن را به عنوان فرمول جمع برای تابع sin می‌شناسیم. چرا که با اعمال sin به دو طرف، فرمول آشنای $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ بدست می‌آید که در آن: $\sin\alpha = x_1$ و $\sin\beta = x_2$.

قبل از پرداختن به انتگرال دوم در ۹، باید متذکر شد که آبل قبلا در مقاله‌ی Paris memoir'e کلاس قابل توجه‌ای از انتگرال‌های ۴ را که اکنون انتگرال‌های نوع اول می‌نامیم، مطرح ساخت. شرط لازم برای این انتگرال‌ها این بود که طرف راست ۱۰ یک مقدار ثابت باشد – معادلا، انتگرال آبل ۴ به صورت موضعی تابعی کراندار از حد بالای انتگرال‌گیری باشد. آبل به طور صریح انتگرال‌های نوع اول را برای مثال‌های متعددی بدست آورد. برای نمونه رویه‌های ریمانی ابربیضوی[۲۰]

$$y^2 = p(x)$$

که در آن $p(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی $n+1$ با ریشه‌های مجزا است، آبل نشان داد که انتگرال‌های نوع اول[۲۱] عبارتند از:

$$\begin{cases} \omega = \frac{g(x)\mathrm{d}x}{y} \\ \deg g(x) \le \left[\frac{n}{2}\right] \end{cases}$$

---

[۱۷] meromorphic
[۱۸] single-valued
[۱۹] Lagrange interpolation formula
[۲۰] hyperelliptic curves
[۲۱] در زبان مدرن‌تر ، هر ۱–فرم مرومورفیک بر یک رویه‌ی ریمانی، یک دیفرانسیل آبلی نامیده می‌شود. اگر ۱–فرم مذکور هولوموروف باشد، آن را «نوع اول» می‌نامند، اگر مانده‌ی آن در تمامی قطب‌هایش صفر باشد آن را «نوع دوم» می‌نامند و در غیر این صورت «نوع سوم».

به ویژه با فرض اینکه ریشه‌های چندجمله‌ای درجه سوم $x^۳ + ax + b$ متمایز هستند، عبارت (ii) در ۹ انتگرال نوع اول می‌شود. پس قضیه‌ی آبل را برای خانواده‌ای از خط‌ها که خم درجه سوم $y^۲ = x^۳ + ax + b$ را قطع می‌کنند، می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$u_۱ + u_۲ + u_۳ = c \tag{۱۳}$$

توضیح ضروری آنکه خط‌ها خم درجه‌ی سوم را با حساب تکرر در ۳ نقطه قطع می‌کنند و لذا در تعریف $u(t)$ در ۸ سه انتگرال ظاهر می‌شود و به علاوه سمت راست قضیه‌ی ۱ به دلیل آنکه $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^۳+ax+b}}$ یک دیفرانسیل نوع اول (به عبارت دقیق‌تر یک ۱-فرم هولومورف بر خم تصویری‌ای در $\mathbb{P}^۲$ که در معادله‌ی آفین آن به صورت مذکور داده می‌شود) است، باید ثابت باشد. در ۱۳، c یک عدد ثابت است و

$$u = \int_{(x_۰, y_۰)}^{(x(u), y(u))} \frac{\mathrm{d}x}{y} \tag{۱۴}$$

و با قرار دادن u_i برای $i = ۱, ۲, ۳$ در ۱۳ و ۱۴ برقرار خواهد شد. با مشتق گرفتن از ۱۴، بدست می‌آید:

$$۱ = \frac{x'(u)}{y(u)}$$

به طوری‌که

$$x'(u) = y(u) \tag{۱۵}$$

با انتخاب مناسب $(x_۰, y_۰)$ (به ویژه انتخاب نقطه‌ی $[۰, ۱, ۰]$ که در تقاطع خم تصویری

$$F = \{[X, Y, Z] \in \mathbb{P}^۲ \mid Y^۲ Z = X^۳ + aXZ^۲ + bZ^۳\}$$

با «خط در بی‌نهایت قرار دارد«)، خواهیم داشت

$$\begin{cases} c = ۰ \\ x(-u) = x(u) \end{cases}$$

و به این ترتیب ۱۳ به یکی از مشهورترین قضیه‌ها برای انتگرال‌های بیضوی تبدیل می‌شود

$$x(u_۱ + u_۲) = R(x(u_۱), x'(u_۱), x(u_۲), x'(u_۲)) \tag{۱۶}$$

که R یک تابع گویاست که مختصات x نقطه‌ی سوم از اشتراک یک خط با F را به عنوان یک تابع گویا از مختصات دو نقطه‌ی دیگر بیان می‌کند.

البته $x(u)$ تابع معروف $\mathscr{P}$-وایرشتراس[۲۲] است و بحث بالا معادله‌ی تابعی ۱۶ و معادله‌ی دیفرانسیل

$$x'(u)^۲ = x(u)^۳ + ax(u) + b$$

توسط تابع $\mathscr{P}$ برآورده می‌شود. چرا که $(x(u), y(u))$ نقطه‌ای از خم $y^۲ = x^۳ + ax + b$ بود و همان‌گونه که در ۱۵ دیدیم: $x'(u) = y(u)$. در اینجا با ذکر دو نکته بحث بالا را با تفصیل بیشتری ادامه می‌دهیم.

اول این‌که برای تعریف انتگرال

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^۳ + ax + b}} \tag{۱۷}$$

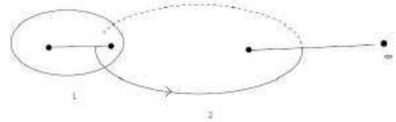
می‌توان صفحه‌ی x را در امتداد شکافی برید که دو ریشه‌ی $x^۳ + ax + b$ را به هم وصل می‌کند و همچنین شکاف دوم که نیم‌خطی است که از ریشه‌ی سوم خارج می‌شود و در واقع در $\mathbb{P}^۱$ آن را به $x = \infty$ وصل می‌کند، شکل ۴. در این صورت تابع $\sqrt{x^۳ + ax + b}$ روی زیرمجموعه‌ی بازی از صفحه‌ی x که پس از این برش‌ها بر جای می‌ماند، به طور تک مقداره قابل تعریف

---

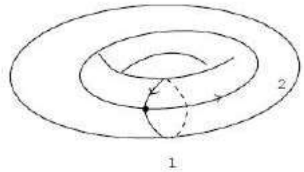
[۲۲] Weierstrass $\mathscr{P}$-function

فرض کنید Γ یک شبکه در $\mathbb{C}$ باشد. در این صورت تابع $\mathscr{P}$-وایرشتراس وابسته به Γ تابعی مرومورفیک بر $\mathbb{C}$ وتناوبی نسبت به شبکه‌ی Γ است که تنها در نقاط Γ قطب دارد و ضابطه‌ی آن به صورت زیر است:

$$\mathscr{P}_r(z) = \frac{۱}{z^۲} + \sum_{\omega \in \Gamma - \{۰\}} \left(\frac{۱}{(z-\omega)^۲} - \frac{۱}{\omega^۲}\right)$$



شکل ۴: برش صفحه‌ی x



شکل ۵: تصویر توپولوژیک F

است و می‌توان خم تصویری F (که فشرده سازی $y^2 = x^3 + ax + b$ بود و لذا با معادله‌ی همگن $Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3$ داده می‌شود.) را از طریق نگاشت $(x, y) \mapsto x$ به عنوان یک «پوشش دو لایه[۲۳]» (البته پوشش دو لایه‌ی شاخه‌دار چرا که $\mathbb{P}^1$ همبند ساده است.) از صفحه‌ی x به انضمام ∞ (یعنی همان $\mathbb{P}^1$) در نظر گرفت که با این دید، از به هم چسباندن دو نسخه از این صفحه‌های شکاف‌دار بدست می‌آید و عبور از شکاف‌ها ما را به لایه‌ی دیگر می‌برد. در واقع F همان رویه‌ی ریمانی[۲۴] فشرده‌ی نسبت داده شده به تابع جبری $\sqrt{x^3 + ax + b}$ است. همان‌گونه که در شکل ۵ دیده می‌شود، F از نظر توپولوژیک همان چنبره[۲۵]ی آشنا است.

حال انتگرال ۱۷، به عنوان انتگرال در راستای خم روی رویه‌ی ریمانی تفسیر می‌شود. انتخاب مسیر انتگرال‌گیری نسبت به ترکیب خطی δ_1 و δ_2 (که خم‌های بسته‌ی مشخص شده در شکل ۵ اند.) خوش‌تعریف است. علی‌الخصوص از ۱۴ نتیجه می‌شود که:

$$\begin{cases} x(u + \lambda_i) = x(u) \\ y(u + \lambda_i) = y(u) \end{cases} \tag{۱۸}$$

که

$$\lambda_i = \oint_{\delta_i} \frac{\mathrm{d}x}{y}$$

تناوب‌های $\frac{\mathrm{d}x}{y}$ هستند. حال فرض کنید Λ شبکه‌ی[۲۶] تولید شده توسط λ_1 و λ_2 در صفحه‌ی مختلط باشد. پرمایش آشنای

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}/\Lambda \arrow[r] \arrow[d] & F \\ u \arrow[r] & (x(u), x'(u)) \arrow[u, "\in"'] \end{tikzcd} \tag{۱۹}$$

از خم بیضوی $\mathbb{C}/\Lambda$ توسط تابع وایرشتراس و مشتق آن را داریم. (می‌دانیم که می‌توان رویه‌ی ریمانی فشرده‌ی $\mathbb{C}/\Lambda$ را از طریق نگاشت $x \mapsto [1, \mathscr{P}(x), \mathscr{P}'(x)]$ در $\mathbb{P}^2$ نشاند که در آن $\mathscr{P}$ تابع وایرشتراس متناظر شبکه‌ی Λ است.)

[۲۳] 2-sheeted covering
[۲۴] Riemann surface
[۲۵] torus
[۲۶] lattice

$$\begin{array}{ccc} & I \subset F \times \mathbb{P}^1 & \\ {}^{\pi_1}\swarrow & & \searrow^{\pi_2} \\ F & & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

شکل ۶: دیاگرام اثبات قضیه‌ی آبل

در مقاله‌ی Paris memoir'e، آبل در حالت کلی ویژگی اساسی توابع بیضوی را بدست می‌دهد: آن‌ها توابعی‌اند که از اعمال وارونگی به انتگرال نوع اول بر رویه‌های ریمانی بدست می‌آیند که چنین انتگرالی دارند.

یادآوری می‌کنیم که بعد فضای انتگرال‌های نوع اول یک تعریف برای گونه[۲۷]ی خم جبری F است (یا گونه‌های حسابی[۲۸] در حالتی که F تکین[۲۹] است). گسترش مباحث بالا که توسط آبل آغاز شد به خم‌های از گونه‌ی دلخواه توسط ژاکوبی[۳۰]، ریمان[۳۱] و دیگر ریاضیدانان قرن نوزدهم انجام شد.

نکته‌ی دوم این است که تابع‌های $x(u)$ و $y(u)$ در معادله‌ی ۱۴، می‌توانند به صورت موضعی به گونه‌ای تعریف شوند که ۱۵ حفظ شود و معادله‌ی تابعی ۱۶، در دامنه‌ی تعریف برقرار باشد. اما در این حالت این معادله‌ی تابعی می‌تواند برای گسترش $x(u)$ و $y(u)$ به توابعی مرومورفیک به کار رود. اگر $x(u)$ برای $|u| < \epsilon$ تعریف شده باشد، در این صورت به کمک ۱۶ می‌توان $x(2u)$ را تعریف کرد و به همین ترتیب می‌توانیم ادامه دهیم و $x(u)$ را برای $|u| < 2\epsilon, |u| < 3\epsilon, \ldots$ تعریف کنیم. این مسئله که یک معادله‌ی تابعی ممکن است برای گستردن یک شئ موضعی به حالت کلی استفاده شود از نتایج اصلی قضیه‌ی آبل محسوب می‌شود که در زیر در مورد آن بحث خواهد شد.

در انتهای این بخش دو نتیجه‌ی مستقیم قضیه‌ی آبل در هندسه‌ی جبری را بیان می‌کنیم:

الف) نتایج مقدماتی نظریه‌ی هاج[۳۲]

ب) استفاده از تطابق[۳۳]

منظور از الف این است که آبل چیزی را که امروزه فضای ۱-فرم‌های هلومورف $H^0(\Omega^1_F)$ نامیده می‌شود، به عنوان یک ناوردای بنیادی یک خم جبری شناسایی کرد. او در تعدادی از مثال‌ها $h^0(\Omega^1_F) = \dim H^0(\Omega^1_F)$ را محاسبه کرد، اقدامی که می‌تواند به عنوان نخستین گام برای شناسایی $h^0(\Omega^1_F)$ به عنوان ناوردای جبری-هندسی شاخص گونه‌ی حسابی محاسبه شود. تعبیر دقیق‌تر $h^0(\Omega^1_F)$ به عنوان نصف عدد بتی[۳۴] اول - که شروع حقیقی نظریه‌ی هاج است - توسط ریمان انجام پذیرفت.

در مورد ب، چیز که در بالا به عنوان اثبات قضیه‌ی آبل ارائه شد را می‌توان توسط دیاگرام شکل ۶ خلاصه کرد. که

$$I = \{(x, y, t) : f(x, y) = g(x, y, t) = 0\}$$

به عنوان وقوع تطابق است، و تابع

$$\omega \to \mathrm{d}\Big(\sum_i \int_{x_0}^{x_i(t)} \omega\Big)$$

در اثبات، که در نمادگذاری مدرن، نگاشت تریس[۳۵]

$$\omega \to (\pi_2)_*(\pi_1^*\omega)$$

است، که ۱-فرم گویای روی F را به ۱-فرمی گویا روی $\mathbb{P}^1$ می‌برد.

---

[۲۷] genus
[۲۸] arithemetic genus
[۲۹] singular
[۳۰] Jacobi
[۳۱] Riemann
[۳۲] Hodge theory
[۳۳] correspondence
[۳۴] Betti number
[۳۵] trace

تشکر و قدردانی

با تشکر از استاد بزرگوار، دکتر علیرضا بحرینی برای معرفی [۱]، و آقای خشایار فیُلم که در ویرایش این مقاله ما را همراهی کردند.

مراجع

[1] Phillip Griffiths, *The Lagacy of Abel in Algebraic Geometry*.