کارهای شهشهانی در زمینه‌ی سیستم‌های دینامیکی

سعید ذاکری
ترجمه‌ی اوژن غنی‌زاده

۱ مقدمه

سیاوش شهشهانی فعالیت ریاضی خود را در اواسط دهه‌ی ۱۹۶۰، به عنوان یک دانشجوی فوق لیسانس در دانشگاه برکلی آغاز کرد. دهه‌ی ۱۹۶۰ دوران طلایی نظریه‌ی سیستم‌های دینامیک هموار بود؛ اسمیل به تازگی پایه‌های نوین این نظریه‌ی زیبا را بیان کرده بود، و کار پیش‌آهنگانه‌ی وی دینامیک‌کارها، گلوبال آنالیست‌ها و توپولوژی کارهای بسیاری را به مطالعه‌ی دینامیک جریان‌ها و وابریختی‌ها[۱] از دید گلوبال برانگیزانده بود. سیستم‌های دینامیک به سرعت نقل هر محفل شدند و شهشهانی، که همواره در مسائل ریاضی خوش‌سلیقه بوده‌است، فرصت را غنیمت شمرد و تحت نظر اسمیل[۲] به کار مشغول شد.

در آن زمان، از مسائل محوری سیستم‌های دینامیکی، مساله‌ی ثبات ساختاری و مساله‌ی عمومیت یک خانواده‌ی داده‌شده از سیستم‌های دینامیکی بود. مساله‌ی ثبات ساختاری، مساله‌ی یافتن عناصری در خانواده‌ی داده‌شده‌است که خواص کیفی آن‌ها تحت اختلال‌های کوچک ولی دلخواه ثابت بماند. از طرف دیگر مساله‌ی عمومیت، مساله‌ی یافتن خاصیت‌های دینامیکی مشترک بین عموم عناصر یک خانواده است. کار اول شهشهانی [Sh۱] به بررسی این دو موضوع روی خانواده‌ی معادلات دیفرانسیل عادی درجه‌ی دوم روی یک خمینه می‌پردازد؛ این معادلات تعمیم کلی معادلات حرکت نیوتون در مکانیک کلاسیک به شمار می‌آیند. یک زیرشاخه‌ی جالب در این زمینه معادلاتی هستند که از افزودن یک نیروی اتلافی[۳] به یک سیستم محافظه‌کار[۴] به‌دست می‌آیند. در [Sh۲]، شهشهانی نتایج عمومیت را به‌دست آورد و نسخه‌ای از نامساوی‌های مورس[۵] را برای چنین سیستم‌های اتلافی[۶] اثبات کرد. کارهای بعدی وی شامل مطالبی در زمینه‌ی سیستم‌های سیمپلکتیک[۷] روی خمینه‌های صحیح، [Sh۳] ثبات ساختاری صورت تعمیم یافته‌ی معادلات ون در پل[۸]، [Sh۴] کران‌های بر تعداد جواب‌های متناوب معادلات آبل، [Sh۶] و مشارکت عمده‌ی وی در پیش‌برد ریاضیات زیستی، [Sh۵] که در این مورد به مقاله‌ی عدالت اشاره می‌کنم. در سال‌های اخیر، عمده‌ی توجه وی معطوف تورق‌های هولومورفیک[۹] روی خمینه‌های پیچیده و تکررهای نگاشت‌های[۱۰] گویا روی کره‌ی ریمانی بوده‌است.

---

[۱] Diffeomorphism
[۲] Smail
[۳] Dissipation Force
[۴] Conservative
[۵] Morse Inequality
[۶] Dissipative
[۷] Symplectic
[۸] van der Pol
[۹] Holomprphic Foliation
[۱۰] Abel Equations

۲ سه مثالون

در ادامه، تلاش خواهم کرد به توضیح اجمالی سه نمونه از کارهای شهشهانی در زمینه‌ی سیستم‌های دینامیکی بپردازم تا بتوانم شمائی از کار وی در این زمینه را به تصویر کشیده‌باشم.

خواص کلی معادلات دیفرانسیل معمولی درجه‌ی دوم. معادلات دیفرانسیل عادی درجه‌ی دوم (ODE) به طور طبیعی به عنوان معادلات حرکت در مکانیک کلاسیک ظاهر می‌شوند. یک ODE درجه‌ی دوم $\ddot{q} = f(q, \dot{q})$ روی محور اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را می‌توان با وارد ساختن پارامتر سرعت، $v = \dot{q}$ به مشابه یک ODE درجه‌ی اول روی کلاف مماس $T\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{۲}$ در نظر گرفت. ODE درجه‌ی اول مورد بحث را می‌توان توسط میدان برداری $v\frac{\partial}{\partial q} + f(q,v)\frac{\partial}{\partial v}$ روی $\mathbb{R}^{۲}$ نمایش داد. این ایده را می‌توان به شیوه‌ی زیر به هر خمینه‌ی n بعدی M هموار گسترش داد: فرض کنید $q = (q^{۱}, \ldots, q^n)$ و $(q,v) = (q^{۱}, \ldots, q^n, v^{۱}, \ldots, v^n)$ مختصات‌های موضعی به ترتیب روی M و کلاف مماس آن، TM باشند. یک ODE درجه‌ی دوم روی M یک میدان برداری روی TM است که به طور موضعی فرم

$$X(q,v) = \sum_{i=۱}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \sum_{i=۱}^{n} f_i(q,v)\frac{\partial}{\partial v^i}$$

را برای f_iهای هموار اختیار می‌کند. اساسا ODE درجه‌ی دوم روی M را می‌توان توسط میدان‌های برداری $X : TM \to T^{۲}M$ تعریف کرد که شرط $D\pi o X = id_{TM}$، که $\pi : TM \to M$ افکنش کانونی است، را ارضا می‌کنند.

حال فرض کنید M یک خمینه‌ی هموار فشرده باشد و $\mathcal{S}(M)$ فضای همه‌ی هایODE هموار درجه‌ی دوم روی M که با توپولوژی ویتنی[۱۱] مجهز شده‌اند. سوالی که بطور طبیعی در اینجا مطرح می‌شود این است که یک میدان برداری نوعی در $\mathcal{S}(M)$ دارای چه خواص دینامیکی ساده‌ایست. برای ادامه‌ی کار، ابتدا عمومیت را چنین تعریف می‌کنیم که می‌گوییم یک زیرمجموعه‌ی $\mathfrak{g} \subset \mathcal{S}(M)$ عمومی است اگر شامل اشتراک شمارا مجموعه‌ی باز چگال در $\mathcal{S}(M)$ باشد. به طور خاص، یک مجموعه‌ی عمومی چگال است، چرا که به آسانی می‌توان نشان داد که $\mathcal{S}(M)$ یک فضای بئر[۱۲] است. شهشهانی به سوال فوق به کمک قضیه‌ی زیر پاسخ گفت. به یاد بیاورید که تکینگی p در میدان برداری X با جریان[۱۳] $\{\phi_t\}$ هذلولوی[۱۴] است اگر تمامی مقدار ویژه‌های $D\phi_{۱}(p)$ خارج از دایره‌ی واحد باشند. خمینه‌ی پایدار (ناپایدار) p مجموعه‌ی تمام qهاییست که با $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$) داشته باشیم $\phi_t(p) \to q$. به طور مشابه، فرض کنید γ یک مدار متناوب X باشد، $p \in \gamma$، و f اولین تبدیل بازگشت پوانکاره[۱۵] باشد که روی یک عرضی موضعی[۱۶] γ روی p تعریف شده است، به طوری که $f(p) = p$. آن‌گاه می‌گوییم γ هذلولوی است اگر تمامی مقادیر ویژه‌ی $Df(p)$ خارج از دایره‌ی واحد باشند. خمینه‌ی پایدار (ناپایدار) γ نیز مجموعه‌ی تمامی qهاییست که با $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$) داشته باشیم $\phi_t(q) \to \gamma$.

قضیه [Sh۱]. مجموعه‌ی عمومی $\mathfrak{g} \subset \mathcal{S}(M)$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $X \in \mathfrak{g}$ داشته باشیم:

۱) تمام تکینگی‌ها و مدارهای متناوب X هذلولوی باشند،

۲) تمامی خمینه‌های پایدار و ناپایدار تکینگی‌ها و مدارهای متناوب X به صورت عرضی تلاقی کنند،

۳) اگر $\dim M > ۱$، هیچ مدار متناوبی از X با مقطع صفر TM تلاقی نکند.

با توجه به اینکه تکینگی‌های یک ODE درجه‌ی دوم باید به مقطع صفر تعلق داشته‌باشند، از قضیه‌ی فوق نتیجه می‌شود که به طور کلی باید فقط تعداد متناهی نقطه‌ی تکین وجود داشته باشد. ولی به طور کلی می‌توان حتی شمارا مدار متناوب داشت، حتی زمانی که M شکلی به سادگی یک دایره باشد [Sh۱].

نتیجه‌ی فوق یادآور قضیه‌ی کوپکا–اسمیل[۱۷] است که بنا به آن یک میدان برداری عمومی روی یک خمینه‌ی فشرده فقط شامل تکینگی‌ها و مدارهای متناوب هذلولوی است، و خمینه‌های پایدار و ناپایدار آن‌ها به طور عرضی تلاقی می‌کنند ([K] و [Sm۲]

[۱۱] Whitney Topology
[۱۲] Baire Space
[۱۳] flow
[۱۴] hyperbolic
[۱۵] Poincare's first return map
[۱۶] local transversal
[۱۷] Kupka-Smale Theorem

را مقایسه کنید). برهان شهشانی (برای قضیه‌ی مطرح شده) از تکنیک‌های اختلال جعبه‌ی جریان[۱۸] کوپکا و اسمیل بهره می‌برد، و بر مبنای لمی پایه‌ای است که نشان می‌دهد اگر $X \in \mathcal{S}(M)$ در یک جعبه‌ی جریان F به وسیله‌ی یک دنباله‌ی Y_n از میدان‌های برداری TM تقریب زده شود، آن‌گاه X را می‌توان در F توسط دنباله‌ای چون $X_n \in \mathcal{S}(M)$ تقریب زد که هر X_n در F به‌صورت هموار مزدوج Y_n است.

سیستم‌های اتلافی. در این زمینه، شهشهانی به مطالعه‌ی نمونه‌های خاصی از هایODE درجه‌ی دوم روی خمینه‌ها پرداخته است که نظیرهای عمومی سیستم‌های اتلافی در مکانیک کلاسیکند. n-خمینه‌ی فشرده و هموار M و کلاف مماس آن TM و افکنش کانونی $\pi : TM \to M$ را در نظر بگیرید. متر هموار ریمانی g روی M را تثبیت کنید. تابع انرژی $E : TM \to \mathbb{R}$ را چنین تعریف کنید: $E = K + V$. در اینجا انرژی جنبشی، K چنین تعریف شده: $K(q,v) = g_q(v,v)$ و V یا انرژی پتانسیل تابع هموار دلخواهی است که روی تارهای[۱۹] π ثابت است. از روی تابع انرژی همیلتونی E، میدان برداری X_E چنین ساخته می‌شود: فرم سیمپلکتیک کانونی روی کلاف مماس T^*M را با ω^* نمایش دهید. یادآوری می‌کنیم که ω^* فقط به ساختار هموار M بستگی دارد و اگر $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$ یک دستگاه مختصات موضعی روی T^*M باشد، آن‌گاه:

$$\omega^* = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i$$

عقب‌گرد[۲۰] ω از ω^* تحت یکریختی $TM \xrightarrow{\cong} T^*M$ با متریک g یک فرم سمپلکتیک روی TM است، و به‌وضوح به g وابسته است. حال میدان برداری X_E روی TM توسط ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{d}E = \omega(., X_E)$$

به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که $D\pi o X_E = id_{TM}$ و در نتیجه X_E یک ODE درجه‌ی دوم است.

با افزودن یک نیروی اتلافی به چنین میدان X_E یک سیستم اتلافی حاصل می‌شود. بنابه تعریف، یک میدان برداری Δ روی TM یک نیروی اتلافی است اگر (۱) Δ "عمودی" باشد، به این معنا که $D\pi o\Delta = 0$؛ (۲) $\hat{g}(\Delta, \nabla_{\hat{g}} K) < 0$ در هرجا خارج از مقطع صفر TM. در اینجا $\hat{g}$ متر ریمانی القا شده روی TM است که نسبت به آن $\nabla_{\hat{g}} K$ عمودی و $\nabla_{\hat{g}} V$, افقی است. به طور ساده، شرط (۱) به این معناست که نیروی اتلافی فقط به سرعت بستگی دارد، در حالیکه شرط (۲) نشان می‌دهد که این نیرو در تضاد با انرژی جنبشی عمل می‌کند تا از سرعت سیستم بکاهد. میدان‌های برداری به شکل $X_E + \Delta$ سیستم‌های اتلافی نامیده می‌شوند؛ و به‌وضوح هایODE درجه‌ی دوم هستند.

در ،[Sh۲] شهشهانی ساختار دینامیکی یک سیستم اتلافی عمومی را مشخص می‌کند. برای بیان کار وی، به یاد بیاورید که مجموعه‌ی غیر-سرگردان[۲۱] Ω_X میدان برداری X با جریان $\{\phi^t\}$ مجموعه‌ی تمام نقاط q است که برای هر همسایگی U از q، t دلخواه به اندازه‌ی کافی بزرگ وجود دارد که $\phi_t(U) \cap U \neq \emptyset$. میدان برداری X را Ω-پایدار می‌نامیم اگر ساختار مداری آن روی مجموعه‌ی ناوردای Ω_X تحت اختلال‌های کوچک تغییر نکند. به طور مشخص، برای هر میدان برداری Y که به اندازه‌ی کافی به X نزدیک باشد، همریختی مدار-نگهدار $h : \Omega_X \to \Omega_Y$ وجود دارد.

قضیه .[Sh۲] میدان برداری X_E را که شامل تعداد متناهی تکینگی ناتباهیده است را تثبیت کنید. در این صورت زیرمجموعه‌ی باز و چگال D از مجموعه‌ی تمامی نیروهای اتلافی TM وجود دارد به طوری که اگر $\Delta \in D$ و $X = X_E + \Delta$ آن‌گاه:

۱) X، Ω-پایدار است و Ω_X مجموعه‌ی تعداد متناهی تکینگی هذلولوی است؛

۲) کلاف مماس TM اجتماع تمام خمینه‌های پایدار تکینگی‌های X است؛

۳) روی هر تکینگی X بعد خمینه‌ی پایدار حداقل به اندازه‌ی بعد خمینه‌ی ناپایدار است.

در حالت خاصی که میدان برداری X_E به فرم $\ddot{x} = f(x)$ روی $M = S^1$ با ساختار استاندارد ریمانی باشد، نسخه‌ی قوی‌تری از قضیه‌ی فوق قابل اثبات است (ن. ک. قضیه‌ی ۲ [Sh۲]).

[۱۸] flow-box
[۱۹] fiber
[۲۰] pull-back
[۲۱] non-wandering set

نتیجه‌ی دیگری که شهشهانی به‌دست آورد "نامساوی‌های مورس" برای سیستم‌های اتلافی بود. برای میدان برداری داده شده‌ی X روی خمینه‌ی M، نامساوی مورس قیاسی بین اعداد بتی[۲۲] M و تعداد خمینه‌های پایدار X با بعد مشخص ارائه می‌کنند. این نامساوی‌ها توسط مورس برای گرادیان میدان‌های برداری بدست آمد (ن. ک. [M]). این نامساوی‌ها توسط اسمیل برای میدان‌های برداری‌ای که اکنون به نام "اسمیل-مورس" شناخته می‌شوند تعمیم داده‌شدند.[Sm۱]

نسخه‌ی ارائه شده توسط شهشهانی از این نامساوی‌ها را می‌توان به شکل زیر بیان کرد. برای M و یک $X = X_E + \Delta$ ی عمومی که در بالا آمد، فرض کنید β_i، i-امین عدد بتی M باشد و M_i تعداد خمینه‌های پایدار X با بعد i. دقت کنید که بنا بر قضیه‌ی فوق، $M_i = ۰$ برای $i = ۰, ۱, \ldots, n-۱$.

قضیه .[Sh۲] برای هر $۰ \leq k \leq n$، نامساوی زیر را داریم:

$$\sum_{i=۰}^{k} (-۱)^{k+i} M_{n+i} \geq \sum_{i=۰}^{k} (-۱)^{k+i} \beta_i$$

به‌علاوه، در حالت $k = n$ تساوی به شکل زیر برقرار است:

$$\sum_{i=۰}^{k} (-۱)^{k+i} M_{n+i} = \sum_{i=۰}^{k} (-۱)^{k+i} \beta_i = \chi(M)$$

جواب‌های متناوب معادله‌ی آبل. بخش دوم سوال ۱۶ام هیلبرت، پرسش راجع به پیدا کردن یک کران $N = N(d)$ رویتعداد حلقه‌های حدی[۲۳] یک میدان برداری چندجمله‌ای مانند $P(x,y)\partial/\partial x + Q(x,y)\partial/\partial y$ در صفحه که در آن $d = \max\{\deg P, \deg Q\}$ است. با وجود تلاش‌های بسیار و نتایج جزئی بدست‌آمده، این مساله هنوز در حالت کلی حل نشده باقی‌مانده‌است. حتی اثبات این گزاره که یک میدان برداری چندجمله‌ای در صفحه تعداد متناهی حلقه‌ی حدی دارد نیز به تازگی (۱۹۸۷) توسط ایلیاشنکو[۲۴] بیان شده است.

مساله‌ی ساده‌تری با ماهیت مشابه مساله‌ی تقریب تعداد جواب‌های متناوب معادله‌ی دیفرانسیل آبل،

$$\dot{x} = x^n + a_{n-۱}(t)x^{n-۱} + \cdots + a_۱(t)x + a_۰(t)$$

است که در آن $t \in [۰,۱]$، $x \in \mathbb{R}$، و a_iها توابع هموار روی $[۰,۱]$اند. در اینجا، یک منظور از جواب متناوب $x = x(t)$ جوابی است که $x(۰) = x(۱)$ برای آن برقرار باشد. شهشهانی این مساله را برای حالت $n \leq ۳$ حل کرده است. وی با استفاده از روشی مقدماتی اما زیرکانه قضیه‌ی زیر را ثابت کرد:

قضیه .[Sh۶] معادله‌ی آبل در حالت $n \leq ۳$ حداکثر n جواب متناوب دارد.

در این‌جا ایده‌ی اثبات وی برای حالت $n = ۳$ را بیان می‌داریم(حالت‌های $n = ۱, ۲$ حالت‌های ساده‌ای هستند). وی ابتدا مشاهده کرد که جواب‌های متناوب ساده (با تکرر ۱) تحت اختلال‌های کوچک در معادله ثابت می‌مانند. به طور کلی‌تر، او نشان داد که از یک جواب متناوب با تکرر k حداکثر k جواب متناوب منشعب می‌شوند. او سپس با استفاده از این اثبات کرد که معادله‌ای با جواب متناوب با تکرر بیش از ۱ دقیقا ۳ جواب متناوب دارد. در آخر، برای یک معادله‌ی دلخواه وی روشی برای ارتباط دادن آن به معادله‌ای با ۳ جواب متناوب ساده ارائه کرده و با استفاده از پیوستار حکم مورد نظر را به اثبات رسانید.

جای تعجب نیست که روش وی برای درجات بالاتر کارآمد نیست. در حقیقت، برای $n \geq ۴$ معادله‌ی آبل می‌تواند هر تعداد جواب متناوب اختیار کند (ن. ک. [L]). جالب‌تر از آن این حقیقت است که وقتی $n \geq ۴$، تبدیل‌های بازگشت $x(۰) \to x(۱)$ این معادلات در فضای تمامی همریختی‌های جهت‌نگهدار چگال است .[P] به تازگی، ایلیاشنکو کران بالایی برای تعداد جواب‌های متناوب این معادله بر حسب n و اندازه‌ی a_i ارائه کرده است .[I] به‌طور مشخص وی نشان داده که اگر $n \geq ۴$ و $\sup_{t\in[۰,۱]} |(a_i(t))| < C$ برای هر $۰ \leq i \leq n-۱$، آن‌گاه معادله حداکثر $N = N(n, C)$ جواب متناوب دارد که

$$N \leq ۹ \exp\{(۳C + ۲)\exp(\frac{۳}{۲}(۲C + ۳)^n)\}$$

این کران دوبار نمایی به نظر بسیار فراتر از یک کران بهینه می‌آید، اما در حال حاضر تنها تخمین در دست است.

---
[۲۲] Betti number
[۲۳] limit cycles
[۲۴] Ilyashenko

۳ سخن آخر

اجازه بدهید سخن با کلماتی چند غیر ریاضی پایان دهم. زمانی که شهشهانی در اواسط دهه‌ی ۷۰ به ایران بازگشت، با نسل جدیدی از دانشجویان با استعداد رو به رو شد که مشتاق آموزش ایده‌های تازه و نوین ورای استاندارد و برنامه‌ی از مد افتاده‌ی دانشگاه بودند. برای پاسخ به این اشتیاق دانشجویان، او برنامه‌ی آموزشی نوینی را طرح ریخت، درس‌های نوین و هیجان‌انگیزی ارائه کرد و سمینارهای جالب‌ناکی برگزار کرد. به پاس زحمات وی، دانشجویان بسیاری برای اولین بار با توپولوژی‌جبری و دیفرانیسلی، سیستم‌های دینامیکی، ریاضیات زیستی، و مباحث و زمینه‌های زیبای دیگری آشنا شدند. دانش او در زمینه‌های مختلف ریاضیات و همچنین عشق او به ریاضی در کنار شخصیت روشنفکر وی از او شخصیتی کاریزماتیک ساخته است. در چشم دانشجویان، وی نمونه‌ی تمام عیار یک ریاضیدان حرفه‌ای است.

تاثیر بسزای شهشهانی بر ریاضیات ایران غیرقابل انکار است. آن‌هایی که از میان ما افتخار کار با وی را داشتند این امر تصدیق می‌کنند. اما حرف امثال من را برای این موضوع معیار قرار ندهید: نسل بعدی ریاضیدانان ایرانی که شهشهانی برای آن‌های بسیار فداکاری‌های شخصی هم کرده است شما را متقاعد خواهند کرد.

مراجع

[I] lyashenko, Yu., Hilbert-type numbers for Abel equations, growth and zeros of holomorphic functions, Nonlinearity 13 (2000) 1337-1342.

[K] upka, I., Contribution ‘a la th´eorie des champs g´en´eriques, Contributions to Differential Equations 2 (1963) 457-484.

[L] ins-Neto, A., The number of periodic solutions of the equation dx $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=0}^{n} a_i(t)x_j, 0 \leq t \leq 1$ for which $x(0) = x(1)$, Inv. Math. 59 (1980) 67-76.

[M] ilnor, J., Morse Theory, Annals of Mathematics Studies, No. 51, Princeton University Press, 1963.

[P] anov, A., On the diversity of Poincar´e maps for Abel equations, Func. Anal. Appl. 33 (1999) 84-88.

[Sh1] hahshahani, S., Second order ordinary differential equations on differentiable manifolds, 1970 Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968), pp. 265-272, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

[Sh2] hahshahani, S., Dissipative systems on manifolds, Invent. Math. 16 (1972) 177-190.

[Sh3] hahshahani, S., Symplectic structures on integral manifolds, Indiana Univ. Math. J. 23 (1973/74) 209-211, erratum: Indiana Univ. Math. J. 24 (1974) 93.

[Sh4] hahshahani, S., Some examples of dynamical systems, Control theory and topics in functional analysis (Internat. Sem., Internat. Centre Theoret. Phys., Trieste, 1974), Vol. II, pp. 227-234. Internat. Atomic Energy Agency, Vienna, 1976.

[Sh5] hahshahani, S., A new mathematical framework for the study of linkage and selection, Mem. Amer. Math. Soc. 17 (1979), no. 211, ix+34 pp.

[Sh6] hahshahani, S., Periodic solutions of polynomial first order differential equations, Nonlinear Anal. 5 (1981) pp. 157-165.

[Sm1] male, S., Morse inequalities for a dynamical system, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960) 43-49.

[Sm2] male, S., Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 17 (1963) 97-116.