چند مساله

تینا ترکمان، علی چراغی

مساله ها

مساله ۱. فرض کنید p یک چندجمله‌ای تکین با ضرایب مختلط باشد. ثابت کنید z_0 ای روی دایره ی واحد هست به‌طوری که

$$|p(z_0)| \geq 1$$

مساله ۲. فرض کنید A و B دو ماتریس مربعی روی میدان $\mathbb{R}$ باشند که با هم جابجا می‌شوند. فرض کنید $\det(A+B) \geq 0$. ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\det(A^n + B^n) \geq 0$$

مساله ۳. برای یک چندجمله‌ای

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0$$

با ضرایب حقیقی قرار دهید

$$\Gamma(p) = a_m^2 + a_{m-1}^2 + \cdots + a_0^2$$

فرض کنید $f(x) = 3x^2 + 7x + 2$ و $g(x)$ را به گونه‌ای پیدا کنید که دو شرط زیر برقرار باشد،

۱) $g(0) = 1$

۲) برای هر $n \geq 1$، $\Gamma(f^n) = \Gamma(g^n)$ که در این جا منظور از f^n و g^n به توان n ام رساندن است.

مساله ۴. آیا دامنه ی صحیح D که $D \subsetneq \mathbb{R}$ وجود دارد که $\mathbb{R}$ میدان کسرهای آن باشد؟

مساله ۵. آیا یک مجموعه‌ی نامتناهی شمارا وجود دارد که یک خانواده‌ی ناشمارا از زیرمجموعه‌های آن باشد به طوری که اشتراک هر دو تای متمایز از آنها متناهی باشد؟

مساله ۶. فرض کنید H یک زیرگروه متناهی از گروه توابع پیوسته و یک به یک و پوشا از بازه‌ی $[0,1]$ به خودش باشد. نشان دهید $|H| \leq 2$.

مساله ۷. فرض کنید k و n اعدادی طبیعی و مثبت باشند و $k > 1$. R را حلقه‌ای در نظر بگیرید که لزوما یکدار نیست و در دو شرط زیر صدق می کند،

۱) R دارای حداقل یک عضو غیر پوچ‌توان است.

۲) اگر $x_1, x_2, \cdots, x_k$ اعضای ناصفری از حلقه باشند، آنگاه

$$x_1^n + x_2^n + \cdots + x_k^n = 0$$

نشان دهید که R یک حلقه‌ی تقسیم است.

مساله ۸. فرض کنید $C = C^0(\mathbb{R})$ حلقه‌ی توابع پیوسته روی $\mathbb{R}$ باشد و D حلقه‌ی توابع مشتق‌پذیر روی $\mathbb{R}$ باشد. ثابت کنید D زیرحلقه‌ای یکریخت با C ندارد که شامل عنصر همانی حلقه (تابع ثابت ۱) باشد. جمع و ضرب را همان جمع و ضرب مقدار توابع در هر نقطه در نظر می‌گیریم.

مساله ۹. فرض کنید $f:[0,1]\to[0,\infty)$ تابعی پیوسته باشد به طوری که $f(0)=f(1)=0$ و $f(x)>0$ برای هر $x\in(0,1)$. ثابت کنید مربعی وجود دارد که دو رأسش روی محور x و دو رأس دیگرش روی نمودار f قرار دارند.

مساله ۱۰. فرض کنید H ماتریسی حقیقی، مربعی و متقارن باشد که مقادیر ویژه‌ی متمایز داشته باشد و A ماتریسی حقیقی با ابعاد برابر با H باشد. فرض کنید

$$H_0=H, H_1=AH_0-H_0A, H_2=AH_1-H_1A$$

متقارن باشند. ثابت کنید $AA^T=A^TA$.

پاسخ ها

پاسخ ۱. فرض کنید برای همه‌ی zهای روی دایره ی واحد داشته باشیم $|p(z)|<1$ و قرار دهید $n=\deg p$ و فرض کنید $n\geq 1$، زیرا برای $n=0$ حکم بدیهی است. حال قرار دهید $f(z)=-z^n$ و $g=p$. در این صورت برای هر z روی دایره ی واحد داریم،

$$|g(z)|=|p(z)|<1=|-z^n|=|f(z)|$$

پس روی دایره ی واحد داریم $|f|>|g|$ و طبق قضیه روشه[1] تعداد ریشه‌های با احتساب تکرر f و $f+g$ درون دایره ی واحد با هم یکسان است. اما f دقیقا n ریشه درون دایره دارد و $f+g$ حداکثر $n-1$ ریشه دارد زیرا یک چندجمله‌ای ناصفر با درجه ی حداکثر $n-1$ است. این تناقض کار را تمام می‌کند.

پاسخ ۲. داریم

$$A^n+B^n=\prod_{\zeta}(A-B\zeta)$$

که ضرب روی ریشه‌های چند جمله ای x^n+1 محاسبه می شود. ریشه‌های حقیقی x^n+1 در حالتی که n فرد است، فقط -1 است و در حالت n زوج ریشه حقیقی وجود ندارد. پس در هر حال می‌توان این ضرب را به شکل

$$A^n+B^n=(A+B)^{\epsilon}\prod_{\zeta}(A-B\zeta)(A-B\bar{\zeta})$$

نمایش داد که البته این‌بار ضرب روی ریشه‌های غیر حقیقی x^n+1 محاسبه می شود و از بین هر زوج ریشه ی مزدوج مختلط تنها یکی را در نظر می گیریم و ϵ صفر یا یک است بر حسب این که n زوج یا فرد باشد. پس داریم

$$\det(A^n+B^n)=\det(A+B)^{\epsilon}\prod_{\zeta}\det(A-B\zeta)(A-B\bar{\zeta})$$

پس کافی است برای هر ماتریس M اثبات کنیم $\det M\overline{M}\geq 0$ که این هم واضح است زیرا،

$$\det M\overline{M}=\det M\det\overline{M}=$$
$$\det M.\overline{\det M}=|\det M|^2\geq 0$$

پاسخ ۳. تعریف کنید

$$\gamma\Big(p(x)\Big)=p(x)p(\frac{1}{x})$$

در این صورت $\Gamma(p)$ ضریب جمله ی ثابت در چندجمله‌ای لوران[2] بالا خواهد بود. حال از آنجا که $\gamma\Big(p(x)\Big)$ نسبت به تعویض x با $\frac{1}{x}$ تغییر نمی‌کند و ضربی است و $\gamma\Big(x^n\Big)=1$ داریم،

$$\begin{aligned}\gamma\Big(f(x)^n\Big)=\ &\gamma\Big((3x+1)^n(x+2)^n\Big)=\\&\gamma\Big((3x+1)^n\Big)\gamma\Big((x+2)^n\Big)=\\&\gamma\Big((3x+1)^n\Big)\gamma\Big((\frac{1}{x}+2)^n\Big)=\\&\gamma\Big((3x+1)^n\Big)\gamma\Big((1+2x)^n\Big)=\\&\gamma\Big(((3x+1)(1+2x))^n\Big)=\\&\gamma\Big((6x^2+5x+1)^n\Big)\end{aligned}$$

پس کافی است قرار دهیم $g(x)=6x^2+5x+1$.

[1] Rouché
[2] Laurent

پاسخ ۴. بله وجود دارد. ابتدا یک مجموعه ی مستقل جبری روی $\mathbb{Q}$ از اعداد حقیقی پیدا کنید که ماکسیمال باشد. منظور از مجموعه ی مستقل جبری روی $\mathbb{Q}$، مجموعه ای از اعداد است که هیچ چند جمله ای ناصفر چند متغیره با ضرایب گویا وجود نداشته باشد که اگر اعضای آن مجموعه را به جای متغیرهای ورودی چندجمله ای قرار دهیم برابر با صفر شود. ساختن این مجموعه ی ماکسیمال به وسیله ی لم زرن[۳] قابل انجام است. این مجموعه را T بنامید و توجه کنید اگر $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}[T]$ آن گاه x روی $\mathbb{Q}[T]$ جبری است، یعنی ریشه ی یک چند جمله ای ناصفر با ضرایب داخل $\mathbb{Q}[T]$ است، که در این جا $\mathbb{Q}[T]$ حلقه ی تشکیل شده توسط اعداد گویا و اعضای T است. دلیلش این است که با افزودن x به T به یک مجموعه ی وابسته ی جبری می رسیم پس چند جمله ای نابدیهی ای شامل x صفر می شود. اکنون فرض کنید D بستار صحیح[۴] حلقه ی $\mathbb{Q}[T]$ باشد، یعنی مجموعه ی تمام اعداد حقیقی مانند x که به ازای یک $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ و اعدادی مانند $a_i \in \mathbb{Q}[T]$ داشته باشیم

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = 0$$

ادعا می کنیم D دامنه ی صحیح مورد نظر است. ابتدا توجه کنید D شامل $\mathbb{Q}[T]$ و در نتیجه شامل $\mathbb{Q}$ هست. از طرفی D یک حلقه است زیرا اگر α, β اعدادی حقیقی در D باشند، این اعداد ریشه ی چندجمله ای هایی تکین با ضرایب داخل $\mathbb{Q}[T]$ هستند، و به کمک قضیه ی اساسی چند جمله ای های متقارن[۵] می توان ثابت کرد که اعداد $\alpha\beta$ و $\alpha + \beta$ و $-\alpha$ نیز چنین خاصیتی دارند. اثبات مشابه حکم معروفی است که در آن نشان می دهیم اگر α, β روی میدان F جبری باشند، $\alpha\beta$ و $\alpha + \beta$ نیز جبری هستند، تنها تفاوت این است که در این جا ضرایب از یک دامنه ی صحیح می آیند. پس D یک حلقه ی جابجایی و یکدار است و چون زیر حلقه ی $\mathbb{R}$ است پس دامنه ی صحیح است. از طرفی D میدان نیست، زیرا اگر $t \in T$ عضوی از مجموعه ی مستقل جبری فوق باشد، ادعا می کنیم $\frac{1}{t}$ در D قرار ندارد. اگر این طور نباشد پس عدد طبیعی $n \geq 1$ و ضرایب $a_i \in \mathbb{Q}[T]$ وجود دارند که $(\frac{1}{t})^n + a_{n-1}(\frac{1}{t})^{n-1} + ... + a_0 = 0$ پس داریم،

$$1 + a_{n-1}t + a_{n-2}t^2 + ... + a_0t^n = 0$$

اما همگی ضرایب و همچنین t داخل $\mathbb{Q}[T]$ هستند. این خود یک چند جمله ای نابدیهی است زیرا جمله ی ثابت آن برابر با 1 است و روی اعضای T صفر شده است و این با انتخاب T در تناقض است. پس D میدان نیست و در نتیجه $D \subsetneqq \mathbb{R}$.
در انتها ثابت می کنیم میدان کسر های D کل $\mathbb{R}$ است. فرض کنید $x \in \mathbb{R}$ است. اگر x داخل T باشد که حکم واضح است و گرنه x روی $\mathbb{Q}[T]$ جبری است و داریم

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = 0$$

که $a_i \in \mathbb{Q}[T]$ و $a_n \neq 0$. اکنون می توانیم محاسبات زیر را روی میدان کسر های D انجام دهیم،

$$\begin{aligned}
0 &= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 \\
&= a_n\Big(\frac{a_nx}{a_n}\Big)^n + a_{n-1}\Big(\frac{a_nx}{a_n}\Big)^{n-1} + ... + a_0 \\
&\Rightarrow a_n(a_nx)^n + a_{n-1}a_n(a_nx)^{n-1} + ... + a_0a_n^n = 0 \\
&\Rightarrow (a_nx)^n + a_{n-1}(a_nx)^{n-1} + ... + a_0a_n^{n-1} = 0
\end{aligned}$$

که در آخرین گام از دامنه ی صحیح بودن D استفاده کردیم و a_n را حذف کردیم. در آخرین رابطه یک چند جمله ای تکین با ضرایب داخل $\mathbb{Q}[T]$ در مقدار $y = a_nx$ صفر شده است. پس $y \in D$. از طرفی به وضوح $a_n \in \mathbb{Q}[T] \subset D$ پس $x = \frac{y}{a_n} \in \mathrm{Frac}(D)$ یعنی x در میدان کسر های D است. پس میدان کسر های D برابر با $\mathbb{R}$ است.

پاسخ ۵. بله وجود دارد. اعداد گویا را در نظر بگیرید و برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ یک دنباله از اعداد گویا انتخاب کنید که به α میل کند و اعضای این دنباله را در یک مجموعه‌ی S_α قرار دهید. در این صورت به دلیل یکتایی حد این خانواده از زیرمجموعه‌های اعداد گویا خواص موردنظر را دارد.

[3] Zorn
[4] Integral closure
[5] The fundamental theorem of symmetric polynomials

پاسخ ۶. فرض کنید g عضوی از H باشد. چون g تابعی پیوسته و یک به یک است پس به طور اکید یکنواست. از پوشایی آن نتیجه می گیریم یا $g(1) = 0$ و $g(0) = 1$ یا $g(0) = 0$ و $g(1) = 1$. حال اگر g اکیدا صعودی باشد و به ازای a ای $g(a) < a$ آنگاه برای هر $n \geq 1$ به استقرا نتیجه می گیریم $g^n(a) < g^{n-1}(a)$ و $g^n(a) < a$. اما چون g عضوی از گروه متناهی H است پس طبق قضیه لاگرانژ[۶]، $g^{|H|} = 1$ پس $g^{|H|}$ تابع همانی است و $g^{|H|}(a) = a$ که تناقض است. حالتی که g اکیدا صعودی باشد و به ازای a ای $g(a) > a$ نیز به طور مشابهی رد می شود. پس برای هر $a \in [0,1]$، $g(a) = a$. یعنی تنها عضو اکیدا صعودی در H همان تابع همانی است. حال توجه کنید اگر g و h اکیدا نزولی باشند آنگاه $g \circ h$ اکیدا صعودی و عضوی از گروه است، پس همانی است و h وارون g است و در اصل برابر با g است. پس مرتبه ی H برابر با 1 یا 2 است.

پاسخ ۷. فرض کنید a یک عضو غیر پوچ‌توان و x یک عضو ناصفر در R باشند. طبق شرط دوم، $kx^n = 0$ و $(k-1)x^n + a^n = 0$. پس اگر $a^n = e$، برای هر x ناصفر داریم $x^n = e$، دقت کنید تا این جا فرض نکردیم که e عنصر همانی ضرب است. از این نتیجه می‌شود هیچ عنصر ناصفر پوچ‌توانی در حلقه نیست. هم‌چنین داریم $e^2 = (a^2)^n = e$. ادعا می‌کنیم e همانی ضرب در حلقه است. ابتدا دقت کنید برای هر x ناصفر، $ex = x^n x = x x^n = xe$ و البته این رابطه برای $x = 0$ هم درست است. حال که می‌دانیم x و e جابه‌جا می‌شوند، نتیجه می گیریم،

$$(x - ex)^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} x^i (ex)^{n-i} =$$

$$x^n + e\Big(\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} x^n\Big) - ex^n =$$

$$x^n + e(x-x)^n - ex^n = x^n - ex^n = 0$$

پس $x - ex = 0 \Rightarrow x = ex = xe$، و e همانی حلقه است. پس برای هر x ناصفر عنصر وارون x^{n-1} وجود دارد. پس R حلقه ی تقسیم است.

نکته: چون $x^{n+1} = x$ از قضیه‌ی معروفی از جیکوبسن[۷] نتیجه می‌شود حلقه جابه‌جایی است. پس R میدان است.

پاسخ ۸. نشان می‌دهیم هر همریختی[۸] حلقه ای از C به D هر تابع را به تابع ثابت تصویر می‌کند. این نشان خواهد داد C با هیچ زیر حلقه ی D یکریخت نیست وگرنه می شد همریختی ای بین C و D یافت که بین C و آن زیرحلقه، یکریختی[۹] باشد. فرض کنید T یک همریختی از C به D باشد. هر تابع f در C را می‌توان به طور یکتا به صورت $f_+ - f_-$ نوشت که $f_+ \geq 0$ و $f_- \geq 0$ و $f_+ f_- = 0$، کافی است قرار دهید $f_+ = \frac{|f|+f}{2}$ و $f_- = \frac{|f|-f}{2}$. در این صورت چون

$$T(f_+) - T(f_-) = T(f_+ - f_-) = T(f),$$
$$T(f_+)T(f_-) = T(f_+ f_-) = 0,$$
$$T(f_+) = T(\sqrt{f_+}.\sqrt{f_+}) = T(\sqrt{f_+})T(\sqrt{f_+}) \geq 0,$$
$$T(f_-) = T(\sqrt{f_-}.\sqrt{f_-}) = T(\sqrt{f_-})T(\sqrt{f_-}) \geq 0$$

پس $T(f_+) = T(f)_+$ و $T(f_-) = T(f)_-$. دقت کنید که تابع ثابت 1 باید به خودش برود. قرار دهید $g = T(f)$ و فرض کنید برای یک t_0 رابطه ی $g'(t_0) \neq 0$ برقرار باشد. چون $T(f - g(t_0)) = g - g(t_0)$ داریم

$$\Big(g - g(t_0)\Big)_+ = T\Big(\big(f - g(t_0)\big)_+\Big) \in D$$

از آن جا که $g'(t_0) \neq 0$ تابع $g - g(t_0)$ در $t = t_0$ تغییر علامت می‌دهد. پس یکی از $\lim_{t \to t_0^+} \frac{(g(t)-g(t_0))_+}{t-t_0}$ و $\lim_{t \to t_0^-} \frac{(g(t)-g(t_0))_+}{t-t_0}$ برابر با 0 و دیگری برابر با $g'(t_0)$ است. چون $g'(t_0) \neq 0$ با مشتق پذیری $\big(g - g(t_0)\big)_+$ به تناقض می رسیم. این تناقض نشان می دهد برای هر t، $g'(t) = 0$ پس g تابع ثابت است و ادعای ما اثبات شد.

پاسخ ۹. تابع f را با برابر 0 قرار دادن در نقاط تعریف

[6] Lagrange
[7] Jacobson
[8] Homomorphism
[9] Isomorphism

نشده به روی $[0,\infty)$ گسترش می‌دهیم. اکنون تابع g را به صورت $g(x)=f\big(x+f(x)\big)-f(x)$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید برای یک $m\in(0,1)$ مقدار $f(m)$ ماکسیمم باشد، دقت کنید ماکسیمم حتما درون بازه اتفاق می افتد چون در دو سر بازه مقدار f صفر است. این ماکسیمم تابع روی کل $\mathbb{R}$ نیز هست و داریم $g(m)\leq 0$. از طرفی چون

$$0+f(0)=0<m$$
$$m+f(m)>m$$

پس طبق قضیه مقدار میانی y ای در بازه $(0,m)$ وجود دارد که $m=y+f(y)$. پس $g(y)\geq 0$. در نتیجه طبق قضیه مقدار میانی عددی بین m و y وجود دارد که g در آن صفر می‌شود. اکنون دیگر به وضوح می توانید رأس های مربع را بیابید،

$$\big(x,0\big),\big(x+f(x),0\big),\big(x,f(x)\big),\big(x+f(x),f\big(x+f(x)\big)\big)$$

پاسخ ۱۰. با تغییر پایه ی همزمان همه ی ماتریس ها توسط یک ماتریس متعامد، فرض و حکم عوض نمی‌شوند. چون H_0 حقیقی و متقارن است، با تغییر پایه می‌توان فرض کرد که H_0 قطری است و روی قطرش مولفه‌های متمایز دارد. چون H_1 متقارن است نتیجه می‌شود که

$$AH_0-H_0A=(AH_0-H_0A)^T=H_0A^T-A^TH_0$$

یعنی $(A+A^T)H_0=H_0(A+A^T)$. پس به دلیل متمایز بودن مقدار ویژه های روی قطر H_0 ماتریس $A+A^T$ نیز قطری است. قرار دهید $D=\frac{1}{2}(A+A^T)$، $S=\frac{1}{2}(A-A^T)$. حال $A=D+S$ و D متقارن است. چون H_2 متقارن است داریم $(A+A^T)H_1=H_1(A+A^T)$ و $H_1D=DH_1$. چون D و H_0 جابه‌جا می‌شوند، $AH_0-H_0A=SH_0-H_0S$ و

$$D(SH_0-H_0S)=D(AH_0-H_0A)=DH_1=$$
$$H_1D=(AH_0-H_0A)D=(SH_0-H_0S)D$$

پس خواهیم داشت $(DS-SD)H_0=H_0(DS-SD)$. از متمایز بودن مقدار ویژه های H_0 نتیجه می گیریم $DS-SD$ نیز قطری است. چون D قطری است داریم

$$(DS-SD)_{i,i}=(DS)_{i,i}-(SD)_{i,i}=$$
$$D_{i,i}S_{i,i}-S_{i,i}D_{i,i}=0$$

اما $DS-SD$ قطری است پس $DS-SD=0$. در نهایت با توجه به $S^T=-S$ داریم

$$AA^T-A^TA=$$
$$(D+S)(D^T+S^T)-(D^T+S^T)(D+S)$$
$$SD+DS^T-DS-S^TD$$
$$=2(SD-DS)=0$$