دو فرهنگ ریاضی

علیرضا توکلی، علی چراغی

در سخنرانی مشهور سال ۱۹۵۹، با عنوان "دو فرهنگ"، اسنو[1] در مورد مضر بودن کمبود ارتباطات بین علوم انسانی و علوم طبیعی بحث کرد و از کسانی که روی علوم انسانی کار می‌کنند به دلیل عدم فهم علوم طبیعی انتقاد کرد. یکی از به یادماندنی‌ترین نقل‌قول‌ها که عدم تقارنی را نشان می‌دهد، در یک فرم متعادل‌تر، هنوز بعد از ۴۰ سال وجود دارد:

بسیاری از اوقات، من در جمعی از مردم بوده‌ام که، با استانداردهای جامعه سنتی، تحصیل‌کرده محسوب می‌شوند که با ذوق بسیاری ناباوریشان به بی‌سوادی دانشمندان را ابراز می‌کردند. یک بار یا دو بار، من تحریک شدم و پرسیدم که چند نفر از آنها می‌توانند قانون دوم ترمودینامیک را توضیح دهند. واکنش سرد بود و همچنین منفی بود. با این‌که، من در حال پرسیدن چیزی معادل علمی "آیا کاری از شکسپیر را خوانده‌اید؟" بودم.

من می‌خواهم در مورد یک اتفاق جامعه‌شناسانه مشابه که در ریاضیات محض دیده می‌شودو امر کاملاً سالمی نیست، صحبت کنم.

"دو فرهنگی" که من می‌خواهم در مورد آن بحث کنم، برای همه‌ی ریاضیدانان حرفه‌ای آشنا است. به طور غیردقیق، منظور من جدایی بین ریاضیدانانی است که هدف اصلی خود را حل مسئله می‌دانند، و آنهایی که بیشتر به ساختن و فهم نظریه‌ها می‌پردازند. این تفاوت نگرش توسط بسیاری از مردم اظهار شده است، و من هیچ ادعایی برای پی بردن به آن ندارم. مانند بسیاری از طبقه‌بندی‌ها، این نیز یک فراساده‌سازی را دربردارد، ولی نه آن‌قدر که آن را عبث کند. اگر شما مطمئن نیستید که در کدام دسته هستید، این دو عبارت را در نظر بگیرید.

۱) هدف حل مسئله این است که ریاضی را بهتر بفهمیم.

۲) هدف بهتر فهمیدن ریاضی این است که بهتر قادر باشیم مسائل را حل کنیم.

بیشتر ریاضیدان‌ها می‌گویند که درستی در هر دو (۱) و (۲) وجود دارد. همه مسائل به یک اندازه جالب نیستند، و یک راه تمیز دادن سوالات جالب‌تر این است که شرح دهیم که آن‌ها فهم ریاضی ما را در کل افزایش می‌دهند. به همان شکل، اگر کسی سال‌های زیادی را برای فهم قسمت سختی از ریاضی بگذراند، ولی هیچ کاری با این فهم انجام ندهد، چه اهمیتی برایش دارد؟ با این حال، بسیاری از ریاضیدانان با دو عبارت قبل به یک اندازه موافق نیستند. مایکل اتیه[2] یکی از ریاضیدانانی است که با این دو عبارت به یک اندازه موافق نیست، همان‌طور که در مصاحبه‌ای در سال ۱۹۸۴ نشان داده است [۲].

مصاحبه‌کننده: چگونه یک مسئله را برای مطالعه انتخاب می‌کنید؟

اتیه: من فکر می‌کنم این سوال، پیش‌فرضی را دربردارد. من فکر

[1] C.P. Snow

[2] Sir Micheal Atiyah

نمی‌کنم این همان راهی باشد که من کار می‌کنم. بعضی از مردم ممکن است بگویند "من می‌خواهم این سوال را حل کنم" و سپس آن‌ها با خود بگویند"چگونه این سوال را حل کنم؟"، من این کار را نمی‌کنم. من در آب‌های ریاضیات حرکت می‌کنم، در مورد چیزها فکر می‌کنم، با کنجکاو بودن، علاقه‌مند بودن، حرف زدن با مردم، دامن زدن به ایده‌ها؛ حقایق پدیدار می‌شوند و من آنها را دنبال می‌کنم. یا این‌که من چیزی می‌بینم که با دانسته های قبلی ام ارتباط دارد، و تلاش می‌کنم که آنها را کنار هم قرار دهم و پیشرفتی پدید می‌آید. من هیچگاه عملاً هیچ ایده‌ای را به این شکل که من چه کار می‌خواهم بکنم یا این ایده به کجا دارد می‌رود، شروع نکرده‌ام. من به ریاضی علاقه‌مندم، صحبت می‌کنم، یاد می‌گیرم، بحث می‌کنم و سپس به‌سادگی سوالات جالب پدیدار می‌شوند. من هرگز با هدف مشخصی شروع نکرده‌ام، بجز هدف فهم ریاضی.

این مصاحبه اولین بار در متمتیکال اینتلیجنسر[۳] ظاهر شد، ولی در قسمت عمومی کارهای جمع شده‌ی اتیه نیز دوباره چاپ شد. من مقاله‌ها و سخنرانی‌های عمومی او را به هر کسی که می‌خواهد ایده‌هایش در مورد اهمیت ریاضی طبقه‌بندی کند، پیشنهاد می‌دهم.

شخص دیگری که روی این دو عبارت وزن یکسانی قرار نمی‌داد، پاول اردوش[۴] بود، که جهانی از تعداد زیادی سوال‌های شگفت انگیز، به همراه جواب‌هایی شگفت انگیز به بسیاری دیگر به ارث گذاشت، ولی به همان اندازه با پیشرفت نظریه کاری نداشت. این به معنی انکار این نیست که اردوش در حال تلاش برای فهم ریاضیات بوده است: بسیاری از مردمی که سوالات اردوش راحل کرده‌اند (افسوس که من یکی از آنها نیستم)، شهادت می‌دهند که هر چقدر در مورد مسئله بیشتر فکر می‌کردند، در مسیرهای بسیار پرثمرتری قرار می‌گرفته‌اند و به این نتیجه رسیده‌اند که این مسئله از یک کنجکاوی جذاب بیشتر بوده است. پس وقتی من در مورد این صحبت می‌کنم که ریاضیدانها به دو دسته‌ی نظریه‌ساز و مسئله‌حل‌کن دسته‌بندی می‌شوند، من در حال صحبت در مورد اولویت‌های آن‌ها هستم، تا این ادعای مسخره که ریاضیدان ها منحصراً به یکی از دسته‌های کار ریاضی اختصاص داده شده‌اند.

واضح است که ریاضیات، هر دو نوع ریاضیدان را نیاز دارد (همان‌طور که اتیه در آخر [۱] می‌گوید) همچنین به همان اندازه واضح است که شاخه‌های مختلف ریاضی استعدادهای مختلفی نیاز دارند. در بعضی، مثل نظریه جبری اعداد، یا خوشه‌ای از موضوع‌ها که الان به‌سادگی هندسه نامیده می‌شوند، به نظر می‌آید (حداقل به عنوان یک بیگانه ــ من هیچ سندیتی برای حرف‌هایی که می‌زنم، ندارم) که به دلایل زیادی مهم است که فرد مقدار قابل توجهی تجربه و دانش در مورد کارهای دیگر ریاضیدانها داشته باشد، زیرا پیشرفت معمولاً حاصل ترکیب هوشمندانه برد وسیعی از نتایج موجود است. علاوه بر این، اگر کسی سوالی را انتخاب کند، و در انزوا چند سال روی آن کار کند و در آخر آن را حل کند، یک خطر وجود دارد، که شاید دیگر اهمیت قبل را نداشته باشد،مگر این‌که سوال بسیار معروفی باشد.

در طیف دیگر، برای مثال، نظریه گراف، که شیء ابتدایی، یک گراف، می‌تواند بلافاصله درک شود، یک نفر با نشستن بروی مبل و تلاش برای فهم بیشتر نظریه گراف به جایی نمی‌رسد. همچنین نیازی نیست که فرد قبل از این‌که به سوال حمله کند، مقدار زیادی از ادبیات آن را بداند. البته مفید است که از مهم‌ترین تکنیک‌های آن آگاه باشد، ولی سوالات جالب معمولاً به این دلیل باز هستند که تکنیک‌های بدست آمده را نمی‌توان به‌سادگی اعمال کرد.

اجازه دهید به‌طور مختصر یک عدم تقارن مشابه آن که اسنو به آن اشاره کرد را ذکر کنم. موضوع‌هایی که در حال حاضربه نظر نظریه‌سازها بسیار جذاب است بسیار مدروزتر از موضوع‌هایی است که برای مسئله‌حل‌کن‌ها جذاب است. علاوه بر این، ریاضیدانان در قسمت‌های نظریه‌سازی به عنوان کسانی که در حال انجام هسته اصلی هستند، دیده می‌شوند، در حالی که موضوع‌هایی مانند ترکیبیات، حاشیه‌ای و نامربوط به اهداف ریاضی دیده می‌شوند. کسی می‌تواند یک جمع از ریاضیدانهای بسیار تحصیل‌کرده را تصور کند که در حال ابراز ناباوری‌شان به بی‌سوادی ترکیبیات‌دان‌ها

[3] Mathematical Intelligencer

[4] Paul Erdos

[5] Calabi-Yau

هستند، که بسیاری از آن‌ها نمی‌توانند چیز هوشمندانه‌ای در مورد گروه‌های کوانتومی، تقارن آینه‌ای، منیفلدهای کالابی–یاو[5]، معادله‌ی یانگ–میلز [6]، یا حتی کوهمولوژی بگویند. اگر یک ترکیبیات‌دان، این صحبت را قطع کند و بپرسد چند زیرمجموعه از $\{1, 2, \cdots, n\}$ را می‌توان پیدا کرد که تفاضل متقارن هر دو تا از آنها اندازه حداقل $\frac{n}{3}$ داشته باشد، واکنش همچنین ممکن است کمی سرد باشد (این مسئله ساده است اگر و تنها اگر کسی تکنیک مربوطه را بداند، که این است که به طور تصادفی مجموعه‌ها را انتخاب کنیم و نشان دهیم که شانس این که هر جفتی از آنها تفاضل متقارن با اندازه کمتر از $\frac{n}{3}$ داشته باشد به‌طور نمایی کوچک است، پس جواب e^{cn} است برای $c > 0$ای.)

هدف من اینجا این است که از موضوع‌های کمتر مدروز در برابر انتقادهایی که در برابر آنها انجام می‌شود دفاع کنم. من مقدار زیادی از توجهم را به ترکیبیات اختصاص می‌دهم، زیرا این قسمتی است که از همه قسمت‌ها بهتر می‌شناسم. با این حال، چیزی که می‌گویم به بقیه قسمت‌ها نیز اعمال می‌شود.

من معمولاً کلمه‌ی "ترکیبیات" را به کار می‌برم نه به شیوه‌ای مرسوم، بلکه به عنوان یک کلمه عمومی که به سوالاتی اشاره کنم که معقول است از اولین اصول به آنها حمله کرد (این در واقع یک زاویه دید است تا یک جدایی کامل). این مسائل نیازی ندارند که گسسته باشند یا به شمارش ربط زیادی داشته باشند.

چرا باید موضوعات مسئله‌حل‌کردنی کمتر از نظری‌ها در نظر گرفته شوند؟ برای این که جواب این سوال را بدهیم باید یک سوال بنیادی‌تر را در نظر بگیریم: چه چیزی باعث می شود که قسمتی از ریاضی جالب‌تر از قسمت دیگری باشد؟ یک بار دیگر، اتیه بسیار واضح و جالب در مورد این موضوع می‌نویسد (در حالی که به ریاضیدانان بزرگ گذشته ادای دین می‌کند). او این نکته را خاطرنشان می‌کند (برای مثال [۱] را ببینید) که آن‌قدر ریاضیات زیاد تولید می‌شود که ممکن نیست همه آن را به خاطر نگاه داشت. پس روند مجردسازی و تعمیم، به عنوان معنی دادن به مقدار عظیمی داد ه خام (که اثبات قضیه‌های تکی هستند) بسیار مهم هست به طوری که این قابلیت را می‌دهد که مطالب انتقال یابند.

نتایجی که می‌مانند آن‌هایی هستند که می‌توانند به شکلی منسجم سازمان‌دهی شوند و به طور مقرون به صرفه به نسل‌های آینده ریاضیدانان توضیح داده شوند. البته، بعضی از نتایج به یاد می‌مانند به دلیل آن که می‌توانند مسئله‌های بسیار معروفی را حل کنند، و لی حتی اگراین نتایج نیزدر یک چارچوب سازمان‌دهنده قرار نگیرند، بعید است که به طور مفصل توسط ریاضیدانان مطالعه شوند.

پس، مفید است زیادتر در مورد جذابیت ذاتی نتیجه‌ی ریاضی بحث نکنیم تا این که چگونه این نتیجه می‌تواند به طور مؤثر به بقیه ریاضیدانان حاضر و آینده ابلاغ شود. ترکیبیات در نظر بسیاری، شامل تعداد زیادی از سوالات و نتایج ایزوله است، پس از این نظر، اشکال دارد. هر نتیجه به طور کلی ممکن است ابتکار بسیاری نیاز داشته باشد، و افراد مبتکر وجود دارند، ولی نسل‌های آینده‌ی ترکیبیات‌دان‌ها زمان یا تمایل این را ندارند که بیشتر از کسر کوچکی از این‌ها را بخوانند و تحسین کنند.

اجازه دهید که تلاش کنم به این انتقاد جواب دهم. قطعاً نادر است که در ترکیبیات کسی بتواند یک حکم بسیار کلی پیدا کند که ناگهان مقدار زیادی از نتایج موجود در بحث مربوطه را حل کند. همچنین این درست است که بسیاری از نتایجی که توسط ترکیبیات‌دان‌ها اثبات می‌شوند تا حدی ایزوله هستند و کاملاً فراموش خواهند شد (ولی این ترکیبیات را از شاخه‌های دیگر جدا نمی‌سازد). با این وجود، این درست نیست که به هیچ وجه ،ساختاری برای این موضوع وجود ندارد. دلیلی که به نظر بسیاری از ریاضیدانها، ترکیبیات یک مجموعه متفرقه از سوالات و نتایج تکی است، این است که اصول سازمان‌دهنده کمتر مشخص هستند.

اگر روند مجردسازی و تعمیم که در ریاضیات بسیار مهم هست، به طور محدود قابل استفاده در ترکیبیات می باشد، پس چگونه ممکن است که این موضوع به نسل‌های آینده انتقال داده شود؟ یک راه تفکر به این سوال این است که بپرسیم چه چیزهایی الزامات ترکیبیات‌دان‌های آینده خواهند بود؟ طبق چیزی که گفتم، اولویت آنها احتمالاً حل مسائل خواهد بود، پس علاقه آنها به نتایج امروز

[6] Yang-Mills equation

بسیار مربوط می‌شود به این که، آیا با فهمیدن آن، می‌توانند قدرت حل مسئله خود را افزایش دهند یا نه. و این‌ها ما را سرراست به اصل مطلب می‌برند. ایده‌های مهم ترکیبیات معمولاً به طور یک قضیه مشخص ظاهر نمی‌شوند، بلکه معمولاً به عنوان یک اصل عمومی با کاربرد بسیار ظاهر می‌شوند.

یک مثال کمک می‌کند که این نکته مبرهن‌تر شود. یک فرم قضیه رمزی[7] عبارت زیر است:

قضیه. برای هر عدد صحیح مثبت k، یک عدد صحیح مثبت N وجود دارد که اگر یال‌های یک گراف کامل n رأسی قرمز یا آبی شوند، آنگاه حتماً k رأس وجود دارند که یال‌های وصل کننده آن‌ها همگی یک رنگ دارند.

کوچکترین N را با $R(k)$ می‌شناسند.

بحث زیر نشان می‌دهد که $R(k) \leq 2^{2k}$. فرض کنید G گرافی با 2^{2k} رأس باشد و برای راحتی فرض کنید که رئوس کاملاً مرتب شده هستند. فرض کنید x_1 رأس اول باشد، آنگاه طبق اصل لانه کبوتری یک مجموعه از رئوس، A_1، از اندازه حداقل 2^{2k-1} وجود دارد که هر یال از x_1 به A_1 یک رنگ را دارد. حال فرض کنیم x_2 کوچکترین رأس A_1 باشد. آنگاه طبق اصل لانه کبوتری $A_2 \subseteq A_1$ از اندازه حداقل 2^{2k-2} وجود دارد که هر یال از x_2 به A_2 یک رنگ دارد. با ادامه دادن این روند، یک دنباله از رئوس $x_1, x_2, \cdots, x_{2k}$ و یک دنباله $A_{2k} \subseteq A_{2k-1} \subseteq \cdots \subseteq A_1$ از مجموعه‌ها پیدا می‌کنیم که $x_i \in A_{i-1}$ برای هر i و هر یال از x_i به A_i یک رنگ دارد. بدست می‌آید که رنگ یال متصل‌کننده x_i به x_j فقط به $\min\{i, j\}$ بستگی دارد. دوباره با استفاده از اصل لانه کبوتری، یک زیرمجموعه H از $\{x_1, x_2, \cdots, x_{2k}\}$ پیدا می‌کنیم که این رنگ همیشه یکسان باشد، پس تمام یال‌های وصل‌کننده رئوس H یک رنگ دارند.

یک تغییر کوچک در استدلال بالا کران بالا را به $\binom{2k}{k}$ بهبود می‌بخشد. با این وجود، من بیشتر به کران‌های *پایین* $R(k)$ علاقه‌مندم. یکی از نتایج مشهور اردوش این نتیجه است که $R(k) \geq 2^{k/2}$ و بدین شکل اثبات می‌شود. به جای تلاش برای ساختن یک رنگ‌آمیزی هوشمندانه، یکی به سادگی یال‌ها را به طور تصادفی در واضح‌ترین راه رنگ می‌کند که این است که هر یال با احتمال $\frac{1}{2}$ قرمز است و با احتمال $\frac{1}{2}$ آبی است و همه این انتخاب‌ها مستقل‌اند. فرض کنید تعداد رئوس N باشد، و $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ kتا از آن‌ها باشند. احتمال اینکه هر x_i به هر x_j با یک یال قرمز وصل شده باشد $2^{-\binom{k}{2}}$ است، و برابر این است که همگی با یال‌های آبی وصل شده باشند. پس مقدار مورد انتظار برای مجموعه‌های k رأسی که همگی آن‌ها با یال‌های همرنگ به هم وصل باشند $2^{1-\binom{k}{2}}\binom{n}{k}$ است. اگر این کمتر از ۱ باشد، باید ممکن باشد که هیچ چنین زیرمجموعه‌ی k رأسی برای آن موجود نباشد. یک محاسبات کوچک نشان می‌دهد که این کمتر از ۱ است اگر $N = 2^{k/2}$.

نتیجه‌ی اردوش [۵] مشهور است نه به این دلیل که کاربردهای بسیاری دارد، نه به دلیل اینکه سخت است، و نه به دلیل اینکه یک سوال باز طولانی‌مدت را حل کرد. شهرت آن به این دلیل است که راه‌های عظیم استدلال‌های احتمالاتی را به ترکیبیات باز کرد. اگر شما استدلال ساده‌ی اردوش را می‌فهمید (یا یکی از بسیار استدلال‌های مشابه) آنگاه در ذهن شما یک اصل کلی به همراه خط‌های زیر ایجاد می‌شود:

اگر کسی بخواهد اندازه‌ی یک ساختار را تحت تعدادی محدودیت ماکسیمم کند، و اگر محدودکننده‌ها به نظر مثال‌های اکسترمال را مجبور کنند که به شکلی یکنواخت پخش شوند، آنگاه انتخاب یک مثال به طور تصادفی به نظر می‌آید جواب خوبی دهد.

همین که شما از این اصل آگاه می‌شوید، قدرت ریاضی شما بلافاصله افزایش می‌یابد. سوالاتی مانند آن که قبلاً گفتم در مورد پیدا کردن تعداد زیادی از مجموعه‌ها با تفاضل متقارن‌های بزرگ ناگهان از غیرممکن به تقریباً بدیهی تبدیل می‌شوند.

البته، بیشتر از این کاربرد ساده در مورد ترکیبیات وجود دارد. برای مثال ممکن است کسی تصمیم بگیرد که از روش‌های احتمالاتی استفاده کند و بعد بفهمد که تخمین زدن احتمال‌های مربوطه کار آسانی نیست. با این وجود مقدار زیادی کار در این مورد انجام

[7] Ramsey

شده، و تکنیک‌های هوشمندانه بسیاری ساخته شده‌اند. بعضی از این‌ها دوباره در قانون‌های مفیدی محصور شده‌اند. یکی از آن‌ها، که به دوستانش به عنوان تمرکز اندازه[۸] شناخته شده است، عبارت زیر است:

اگر یک تابع f به شکل قابل قبول پیوسته‌ای به تعداد زیادی متغیر کوچک وابسته باشد، آنگاه $f(x)$ تقریباً همیشه به مقدار مورد انتظارش نزدیک است.

اهمیت کامل تمرکز اندازه اول توسط ویتالی میلمن[۹] در اثبات انقلابی‌اش [۱۱] از قضیه زیر از دورتسکی[۱۰] [۴] پی برده شد.

قضیه. برای هر عدد صحیح مثبت k و $\epsilon > 0$ یک n هست که هر فضای نرمدار n بعدی X یک زیرفضای k بعدی با فاصله باناخ–میزر[۱۱] حداکثر $1+\epsilon$ تا l_2^k دارد.

این معادل این است که بگوییم می‌توان بردارهای $x_1, x_2, \cdots, x_k \in X$ [مستقل خطی] پیدا کرد که

$$(\sum_{i=1}^{k} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}} \leq ||\sum_{i=1}^{k} a_i x_i|| \leq (1+\epsilon)(\sum_{i=1}^{k} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

برای هر دنباله $a_1, a_2, \cdots, a_k$ از اسکالرها. یک راه هندسی‌تر (و حتی غیر شهودی‌تر) برای دوباره فرمول‌بندی این قضیه این است که بگوییم هر جسم محدب متقارن n بعدی، یک مقطع مرکزی k بعدی دارد که یک بیضی‌گون k بعدی B را در بر دارد و در $(1+\epsilon)B$ قرار دارد و پس خود آن نیز تقریباً بیضی‌گون است.

رویکرد میلمن به این قضیه این است که یک زیرفضای k بعدی از X را بطور تصادفی انتخاب کنیم. قبل از انجام این کار، اول باید یک اندازه احتمال با معنی انتخاب کرد، که می‌تواند با استفاده از قضیه‌ای از فریتز جان[۱۲] انجام شود. این بیان می‌کند که یک پایه $x_1, x_2, \cdots, x_n$ از X وجود دارد که به شکل ناامیدکننده‌ای دور از متعامد یکه نیست، به این معنی که:

$$(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}} \leq ||\sum_{i=1}^{n} a_i x_i|| \leq \sqrt{n}(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

برای هر دنباله $a_1, a_2, \cdots, a_k$ از اسکالرها. حال یکی اندازه عادی روی گراسمانیان‌های $G_{n,k}$ نسبت به این پایه را قرار می‌دهد (در واقع این یک فراساده‌سازی است، ولی جزئیات دقیق را کاری نداریم).

در حالت دو نتیجه‌ای که قبلاً به آن اشاره کردم، راحت بود که ببینیم، که روش‌های تصادفی با معنی بودند. بعد از این همه، ممکن است کسی فکر کند که یک مقطع نوعی از یک جسم محدب غیرمنظم، غیرمنظم خواهد بود. با این وجود، همین که یک نفر با ایده‌ی تمرکز اندازه آشنا باشد، به این پی می‌برد که نرم بردار $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ به متغیرهای چندگانه a_i وابسته است. همچنین، چون ما فقط به نسبت این نرم به نرم l_2 علاقه‌مندیم، می‌توانیم فرض کنیم که هیچ کدام از a_iها تغییر نمی‌کنند. پس، با تمرکز اندازه، ممکن است انتظار داشته باشیم که نسبت نرم X به نرم l_2 خیلی به مقدار مورد انتظار خود در همه زمان‌ها نزدیک باشد. و الآن ایده‌ی مقاطع تقریباً بیضی‌گون به یک ضدشهود منجر شده است.

نتیجه اصلی برای این که حکم بالا را دقیق کنیم، این نتیجه از نامساوی برابر محیطی[۱۳] لوی[۱۴] روی کره است. تابع $f : S_n \to \mathbb{R}$ را تابعی با میانه M قرار دهید. فرض کنید $A \subseteq S_n$ مجموعه‌ی همه‌ی نقاط x باشد که $f(x) \leq M$. آنگاه احتمال اینکه یک نقطه‌ی تصادفی در S_n فاصله بیشتر از ϵ تا A داشته باشد، حداکثر $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\exp(\frac{-\epsilon^2 n}{2})$ است. حال قرار دهید $f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = ||\sum_{i=1}^{k} a_i x_i||$. چون f به شکلی قابل قبول پیوسته است، و پس چون اکثر نقاط y به نقاط $x \in A$ نزدیک‌اند، پس نتیجه می‌شود که $f(y)$ خیلی بزرگتر از M نیست. به طور مشابه، برای اکثر yها،

[8] Concentration of measure
[9] Vitali Milman
[10] Dvoretzky
[11] Banach-Mazur distance
[12] Fritz John
[13] Isoperimetric inequality
[14] Levy

$f(y)$ خیلی کمتر از M نیست.

قضیه دورتسکی، به خصوص با اثبات میلمن، یک سنگ بنا در نظریه موضعی (به معنی متناهی بعد) فضاهای باناخ است. در حالی که متأسفم برای ریاضیدانی که نمی‌تواند جذبه ذاتی را ببیند، این جذبه به خودی خود، اثر عظیم اثبات را، که بالاتر از نظریه فضاهای باناخ، به عنوان نتیجه‌ای از قرار دادن ایده‌ی تمرکز اندازه در ذهن بسیاری ریاضیدان داشته است، توضیح نمی‌دهد. تعداد بسیاری از مقالات این ایده را باز کرده‌اند یا تکنیک‌های جدیدی برای این‌که این اتفاق می‌افتد، نشان داده‌اند.

می‌توان اصول کلی بیشتری از این دست را نام برد. در اینجا چندتا را نوشته‌ام. اهمیت این اصل‌ها با هم برابر نیستند و همان‌گونه که گفتم دقیق نیستند ولی همه‌ی آنها به مقدار زیادی بررسی شده اند.

۱) به وضوح اگر پیشامدهای $E_1, E_2, \cdots, E_n$ مستقل از هم باشند و دارای احتمال ناصفر باشند، در این صورت با احتمال ناصفری همه‌ی این پیشامدها با هم اتفاق می‌افتند. در واقع این حکم می‌تواند در حالتی که این پیشامدها وابستگی کمی به هم داشته باشند نیز مورد استفاده قرار گیرد. [۶]،[۹]

۲) همه‌ی گراف‌ها از چند قسمت تصادفی‌گون تشکیل شده‌اند و ما می‌دانیم که این قسمت‌ها چگونه رفتار می‌کنند. [۱۴]

۳) اگر داریم تعداد جواب‌های یک معادله خطی را درون یک مجموعه می‌شماریم، کافیست و معمولاً ساده‌تر است که ضرایب فوریه تابع مشخصه این مجموعه را تخمین بزنیم.

۴) بسیاری از خواص گراف‌های تصادفی با هم هم‌ارز هستند و نتیجتاً می‌توان آنها را به عنوان تعاریف گراف‌های شبه تصادفی درنظر گرفت. [۷]،[۱۵]

۵) گاهی اوقات مجموعه دنباله‌های در نهایت صفر از صفر و یک‌ها مدل خوبی برای یک فضای باناخ جدایی‌پذیر است و یا حداقل به فرد اجازه می‌دهد که فرضیات جالب توجهی را تولید کند. نکته اصلی که در مورد این گونه اصول می‌خواهم بگویم این نیست که اینها بسیار پرکاربرد هستند؛ که البته نکته تعجب‌برانگیزی هم نیست؛ بلکه این است که اصول نقش جهت‌دهنده‌ای را در ترکیبیات دارند که قضایای عمیق و کلی در زمینه‌های نظری دیگر دارند. وقتی برای فهمیدن نتیجه‌ای تلاش می‌کنیم زمان زیادی را می‌توانیم صرفه‌جویی کنیم اگر بتوانیم نتیجه را به دو یا سه ایده کلی تحویل دهیم. بعد از انجام این کار ممکن است که نیازی به بررسی دقیق جزئیات نبینیم. آشنایی کلی با اصول کلی و چند مثال از کاربردهای آن باعث می‌شود که فرد بتواند در صورت نیاز، خود جزئیات را انجام دهد. برای مثال من برهان اردوش از کران پایین برای $R(k)$ را این‌گونه به خاطر سپرده‌ام: رنگ آمیزی گراف را به صورت تصادفی انجام دهید و محاسبات بدیهی را انجام دهید. یک مثال دیگر قضیه قابل توجه زیر از کاشین است. [۱۰]

قضیه. برای هر عدد صحیح n یک تجزیه عمود از $\mathbb{R}^{2n}$ (نسبت به ضرب داخلی معمولی) به دو زیر فضای n بعدی X و Y وجود دارد به طوری که برای هر $x \in X \cup Y$ نسبت نرم l_1 x به نرم l_2 x بین $c\sqrt{2n}$ و $\sqrt{2n}$ برای ثابت مطلق $c > 0$.

برهانی از زارک[15] [۱۳] از این قضیه به شکل زیر است (اگر با ایده های مبهم درستی آشنا باشید): یک استدلال ساده بر مبنای حجم نشان می‌دهد که تقریبا هیچ‌یک از گوی‌های یکه‌ی l_1^n در گوشه‌ها قرار ندارد (منظور از گوشه، قسمت‌هایی است که نسبت l_1ـنرم به l_2ـنرم کوچک است)، پس کار ساده‌ایست که نشان دهیم یک تجزیه رندم خاصیت موردنظر را دارد. مثال سوم قضیه زیر از رات[16] است. [۱۲]

قضیه. برای هر δ، عدد طبیعی N وجود دارد که هر زیرمجموعه از $\{1, 2, \cdots, N\}$ به اندازه حداقل δN (یعنی با چگالی حداقل δ) شامل یک تصاعد حسابی به طول 3 باشد.

برهان فشرده این حکم از قرار زیر است. به $A \subseteq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ نگاه کنید و ضرایب فوریه تابع مشخصه A را در نظر بگیرید. اگر این ضرایب کوچک باشند (به غیر از $\hat{A}(0)$) در این صورت A عملاً تصادفی خواهد بود، و در نتیجه شامل تعداد زیادی تصاعد حسابی به طول 3 خواهد بود. در غیر این صورت ضریب بزرگی وجود خواهد داشت که به ما اجازه می‌دهد زیرتصاعدی از $\{1, 2, \cdots, N\}$ را بیابیم که A در آن دارای چگالی بیشتری است.

[15] Szarek
[16] Roth

اجازه دهید مطالبی که تاکنون گفته‌ام را خلاصه کنم. تاکنون سعی کرده‌ام علیه این ایده که موضوع ترکیبیات ساختار کمی دارد و فقط از تعداد زیادی مسئله تشکیل شده است، استدلال کنم. در حالی که این ساختار نسبت به موضوعات دیگر کمتر جلوه می‌کند، این ساختارها به صورت جملاتی کلی و مبهم وجود دارند که اجازه می‌دهند که ما برهان‌ها را به صورت فشرده‌ای در ذهن خود نگاه داریم و در نتیجه راحت‌تر به خاطر بسپاریم و به دیگران منتقل کنیم.

با این حال انتقادات زیادی به ترکیبیات وارد است. یک مورد که من شنیده‌ام این است که این موضوع جهت‌دهی و اهداف کلی ندارد. یکی دیگر این است که این موضوع عمیق نیست و دیگر این که ترکیبیات ارتباطات جالبی به بقیه بخش‌های دیگر ریاضی (یعنی بخش‌های محوری ریاضیات) ندارد و دیگر این که خیلی از نتایج دارای کاربرد نیستند.

این انتقادات را می‌توان به شیوه‌ی مشابهی پاسخ داد. مثلاً این نکته را در نظر بگیرید که اهداف کلی در ترکیبیات وجود ندارد. دوباره، من از یک مصاحبه با اتیه نقل می‌کنم [۲]: من داشتم در مورد گرایش امروزه‌ی افراد به ایجاد یک شاخه‌ی کامل ریاضی به طور شخصی و به طور مجرد فکر می‌کردم. این‌ها فقط خشت بر می‌زنند و اگر از آنها بپرسیم که به خاطر چه این کار را انجام می دهند، اهمیت این موضوع در چیست، به چه مربوط است، متوجه خواهید شد که خودشان نمی‌دانند.

منظور اتیه به طور خاص ترکیبیات نبود ولی او به نکته‌ی مهمی اشاره می‌کند و این موضوع برای ترکیبیات‌دان‌ها حائز اهمیت است همان‌گونه که برای هر کس دیگری این گونه است که نشان دهد که کاری را که انجام می‌دهند بیش از زیاده‌کاری است. بعضی از بخش‌های ریاضیات هستند که تحت سلطه‌ی تعداد کمی مسئله که دارای اهمیت جهانی هستند، قرار گرفته‌اند. می‌توان خیلی از نتایج را این گونه توجیه کرد که آنها هر چند به طور جزئی در مورد فرضیه ریمان، حدس بیرچ سوینرتون‑ـ دایر، حدس هندسی‌سازی ترستن، حدس نوویکوف یا چنین چیزی روشنگری می‌کنند. شاخه‌های دیگر ریاضی جذابیت خود را از فراوانی پدیده‌های رمزآلود که نیازمند توضیح هستند، بدست می‌آورند. ممکن است که همرویدادهای عددی باشند که ارتباط عمیقی را بین حوزه هایی که در نگاه اول بی‌ارتباط به نظر می‌رسند پیشنهاد کنند، استدلال‌هایی که نتایج جالبی را با توسل به محاسبه اثبات می‌کنند و در نتیجه آنها را به خوبی توضیح نمی‌دهند، اثبات‌هایی که بر اساس چند خوش‌شانسی یا استدلال‌های اکتشافی که نتیجه می‌دهند ولی دقیق کردن آنها سخت است.

کار سختی است که نشان دهیم ترکیبیات اهدافی از نوعی که ذکر شد دارد (به استثنای مطلق مسئله $P = NP$) با این حال همان‌گونه که اهمیت یک نتیجه در ترکیبیات معمولاً خود نتیجه نیست، بلکه چیزی است غیرصریح‌تر که از اثبات یاد می‌گیریم. پس اهداف کلی ترکیبیات نیز همیشه به طور صریح بیان نمی‌شوند. برای روشن شدن این موضوع اجازه دهید به قضیه رمزی و کران تابع $R(k)$ برگردیم. علیرغم سادگی استدلال‌هایی که قبلاً ارائه کردم بهترین کران‌های شناخته شده را همین‌ها می‌دهند. اگر بخواهم دقیق‌تر بگویم مسئله زیر باز است.

مسئله. ۱) آیا ثابت $a > \sqrt{2}$ وجود دارد که $R(k) \geq a^k$ برای kهای به اندازه کافی بزرگ؟

۲) آیا ثابت $b < 4$ وجود دارد که برای kهای به اندازه کافی بزرگ داشته باشیم $R(k) \leq b^k$.

من این مسئله را یکی از مسائل مهم ترکیبیات می‌بینم و ماه‌های زیادی از عمر خود را بدون توفیق، برای حل آن تلاش کرده‌ام. ولی هنوز احساس خجالت می‌کنم که این را بنویسم، چرا که می‌دانم ریاضیدان‌های زیادی این سوال را بیشتر یک معما می‌بینند تا یک مسئله جدی ریاضی. علت ارادت زیاد من به این مسئله این است که برای من واضح شده است (همان‌گونه که به افراد زیاد دیگری که امتحانش کرده‌اند ثابت شده است) بسیار نامحتمل است این مسئله با یک استدلال هوشمندانه تک‌کاره که مخصوص این مسئله ساخته شده است حل شود (در واقع منظور من به طور خاص قسمتی از مسئله است که به کران بالای $R(k)$ مربوط می‌شود). اگر بخواهیم کمی در این مورد مبهم‌گویی کنیم اثبات حکم $R(k) \leq 4^k$ دارای روحیه‌ای موضعی است، به این مفهوم که بیشتر گراف را دور می‌ریزیم و روی همسایگی کوچکی از چند رأس تمرکز می‌کنیم.

به نظر می‌آید که کران بالای بهتر نیازمند استدلالی سرتاسری‌تر باشد، شامل کل گراف، و هیچ مدل کارایی برای چنین استدلالی در نظریه گراف موجود نیست. در نتیجه، حل این مسئله تقریبا مجبور است که تکنیک جدید بزرگی را در ترکیبیات ایجاد کند. یکی از دشواری‌های مسئله این است که، در حالی که رنگ‌آمیزی تصادفی کران پایین چندان بهتری از $2^{\frac{k}{2}}$ به دست نمی‌دهد، به نظر می‌آید که هیچ‌گونه فاصله گرفتنی از تصادفی بودن (مثل این که رأس‌ها را به پنج دسته تقسیم کنیم و احتمال این که یک یال قرمز باشد را برحسب این که در یک دسته قرار دارد و یا این که دو دسته را به هم وصل می‌کند تعیین کنیم) کران پایین را بهتر نمی‌کند. با این حال اگر کسی در این ایده پافشاری کند ، مجبور به تحلیل جداگانه‌ی اقسام مختلفی از گراف‌ها می‌شود که هیچ یک از آنها به خودی خود چالش برانگیز نیستند ولی پی‌گیری سیستماتیک آنها کار دشواری است. این من را به این خیال واداشت که ممکن است نوعی دسته‌بندی از رنگ‌آمیزی‌های آبی و قرمز (یا معادلاً از گراف‌ها) وجود داشته باشد. در این صورت با چک کردن این که در هر دسته کران کمتر از مثلا 3.99^k است می‌توانیم مسئله را حل کنیم. ایده‌ی رده‌بندی گراف‌ها در وهله‌ی اول عجیب به نظر می‌رسد، پس اجازه دهید نتیجه‌ای را که تا به حال بارها و بارها استفاده شده است را بیان کنم. ابتدا باید مفهومی از شبه تصادفی بودن را تعریف کنیم. فرض کنید G یک گراف است و A و B مجموعه‌های جدا از همی از رئوس G هستند. زوج (A,B) را ϵـ یکنواخت می‌گوییم اگر که عدد $\alpha > 0$ وجود داشته باشد که هرگاه $A' \subseteq A$ و $B' \subseteq B$ مجموعه‌هایی با عدد اصلی به ترتیب حداقل $\epsilon|A|$ و $\epsilon|B|$ باشند، تعداد یال‌هایی که A' را به B' وصل می‌کند با $\alpha|A'||B'|$ حداکثر به اندازه‌ی $\epsilon|A'||B'|$ اختلاف دارد. اگر ϵ کوچک باشد، این شرط به ما می‌گوید که گراف متشکل از یال‌های G که A را به B وصل می‌کند مانند یک گراف تصادفی با احتمال یال α است. نتیجه بعدی منسوب به زمردی [۱۴] است و به لم یکنواختی، یا لم نظم معروف است.

قضیه. فرض کنید G یک گراف است و ϵ عدد مثبتی است و k یک عدد طبیعی است. در این صورت ثابت K وجود دارد که فقط به k و ϵ بستگی دارد، به طوری که رأس‌های G را می‌توان به m زیرمجموعه‌ی $A_1, A_2, \cdots, A_m$ افراز کرد که در آن $k \le m \le K$، به طوری که حداقل $(1-\epsilon)\binom{m}{2}$ از زوج‌های (A_i, A_j) (که $i<j$ است) ϵـ یکنواخت باشند.

این قضیه، همان‌طور که خواننده ی هوشیار متوجه شده است، بیان دقیقی از اصل کلی (۲) است که قبلاً بیان کردیم (ولی تأکید می‌کنم که همه‌ی این اصول را نمی‌توان دقیق کرد). متاسفانه با این که لم یکنواخت‌سازی زمردی ابزاری ایده‌آل برای مسائل پرشماراست، مسائل دیگری، مانند کران پایین بهتر برای قضیه رمزی هستند، که این لم در مورد آنها چیزی برای گفتن ندارد. پس یکی از اهداف کلی نظریه گراف این است که رده‌بندی‌های مفصل‌تر و ظریف‌تری را بیابد و هدفی دیگر، که به گونه‌ای مخالف قبلی است، این است که راه‌حل‌هایی را بدون استفاده از لم یکنواختی زمردی پیدا کند. پیشرفت قابل توجه در هر یک از این دو پروژه تأثیر متقابل قابل توجهی را روی نظریه گراف خواهد داشت (این به گونه‌ای حشو است چرا که یک معیار خوب برای میزان پیشرفت این است که آیا اجازه حل سوالات جالب را می‌دهند؟). به طور کلی با کسب مهارت در حل مسائل در زمینه‌ای مانند ترکیبیات متوجه خواهیم شد که برخی دشواری‌ها مرتباً تکرار می‌شوند. ممکن است نتوانیم این دشواری‌ها را در قالب یک حدس به خوبی بیان کنیم، پس به جای آن روی مسئله خاصی متمرکز می‌شویم که شامل این دشواری‌ها باشد. در این حالت این مسئله اهمیتی می‌یابد که فراتر از این است که جواب مسئله آری یا نه است. این موضوع روشن می‌کند که چگونه تعداد زیادی از مسائل اردوش دارای عمق پنهان زیادی بوده‌اند. اما تکلیف این انتقاد که ترکیبیات زمینه‌ای سطحی است چه می‌شود؟ یکی از خرسندی‌های ریاضیات این است که به قول معروف، با سوار بودن بر دوش غول‌ها، می‌توانیم به نتایج مرتفعی برسیم که برای نسل‌های قبلی قابل تصور نبوده است. حال آن که، بیشتر مقالات ترکیبیات همه‌ی آنچه نیاز است را در خود دارند، یا این که پیشینه اطلاعاتی کمی را از خواننده مطالبه می‌کنند. این را با مقاله‌ای در نظریه جبری اعداد مقایسه کنید که اگر با اطلاعات معمولی دروس کارشناسی شروع کنیم، درک آن ممکن است سال

ها طول بکشد.

این انتقاد تفاوت اولویت‌های نظریه‌سازان و مسئله‌حل‌کن‌ها را منعکس می‌کند. یک نظریه‌ساز تمایل دارد که بگوید قضیه A عمیق است چرا که از قضیه B استفاده می‌کند که آن هم از قضیه C استفاده می‌کند و قس علی هذا، که همه‌ی اینها به طور منفرد نتایج قابل توجهی هستند. یک مسئله‌حل‌کن ممکن است که چنین زنجیری طولانی از وابستگی‌های منطقی را در ذهن خود نداشته باشد. با این حال، اگر که ما نوع مناسب‌تری از وابستگی را، دوباره بر اساس اصول کلی، در نظر بگیریم در این صورت ماجرا متفاوت می‌شود. اکثریت مواقع این‌گونه خواهد بود که، در حالی که هیچ وابستگی صوری بین دو نتیجه وجود ندارد، هیچ امیدی برای حل یکی از آنها وجود نخواهد داشت اگر که ما از اصول کلی معرفی شده در اثبات دیگری مطلع نباشیم. زنجیرهای وابستگی از این نوع می‌توانند بسیار طویل باشند، پس ترکیبیات‌دان‌ها نیز می‌توانند از این موضوع خشنود باشند که مسائلی را حل کرده‌اند که بسیار دور از دسترس نسل پیش بوده‌اند. در این حالت فرد احساس می‌کند که موضوع در کلیت خود در حال پیشرفت است.

تا بحال تمامی استدلال‌های ما مربوط به درون ترکیبیات بوده است. سعی کرده‌ام که نشان دهم که این موضوع دارای انسجام و جهت‌گیری است که برای بیگانگان واضح نیست ولی با این همه، مهم است. با این حال، چیزی در مورد این که ریاضیات در کلیت خود چگونه می‌تواند از پیشرفت ترکیبیات بهره جوید نگفته‌ام. اجازه دهید ببینیم که اتیه در این رابطه چه می‌گوید [۳]:

... توجیه نهایی برای انجام دادن ریاضی در ارتباط تنگاتنگ با یکپارچگی کلی آن است. اگر ما قبول کنیم که، از دیدی کاملاً کارکردگرایانه ریاضیات با استفاده از کاربردهایش خودش را توجیه می‌کند، در این صورت کل ریاضیات موجه خواهد شد، در صورتی که یک کل به هم پیوسته باقی بماند. هر بخشی از آن که از تنه‌ی اصلی جدا شود، باید خود را به گونه‌ی مستقیم‌تری توجیه کند.

اگر نیاز به چنین توجیهی را بپذیریم ترکیبیات چه چیزی برای گفتن دارد؟ یک نکته‌ی روشن این است که می‌توانیم ترکیبیات را به طور مستقیم توجیه کنیم، به خاطر ارتباط نزدیک آن به علوم کامپیوتر، که کارکردهای آن مشخص هستند (عجیب این که وقتی کمیته برنامه‌ریزی کنگره بین‌المللی ریاضیدان‌ها در سال ۱۹۹۸ ارتباط بین قسمت‌های مختلف ریاضی را لیست می‌کردند، این ارتباط را تشخیص ندادند) و اما ارتباط با دیگر زمینه‌ها، کاربردهایی از ترکیبیات در زمینه‌های احتمالات، نظریه مجموعه‌ها، رمز نگاری، نظریه ارتباطات، هندسه فضاهای باناخ، آنالیز هارمونیک، نظریه اعداد و ... وجود دارد. با این وجود، الآن که این را می‌نویسم می‌دانم که خیلی از این کاربردها نمی‌توانند توجه مثلاً یک هندسه دیفرانسیل‌دان را جلب کند، او ممکن است همه‌ی این‌ها را به‌گونه‌ای متعلق به آن قسمت دور و پرفاصله از ریاضیات ببیند که می‌توان بدون خطر آن را نادیده گرفت. حتی کاربردها در نظریه اعداد "نوع بدی" از نظریه اعداد هستند. شاید مفید باشد که راه‌های مختلفی که یک شاخه از ریاضیات می‌تواند برای بقیه مفید باشد را بررسی کنیم. در اینجا لیستی را که بر اساس مستقیم بودن مرتب شده را آورده‌ایم که چگونه زمینه A میتواند به زمینه B کمک کند. ۱)قضیه‌ای از A بلافاصله منجر به نتیجه‌ای مفید در B می‌شود.

۲)قضیه‌ای از A نتیجه‌ای در B دارد ولی اثبات آن نیازمند مقداری کار است.

۳)قضیه‌ای در A به مسئله‌ای در B به‌قدری شبیه است که ما را قادر می‌سازد از اثبات A تقلید یا اقتباس کنیم و مسئله را در B پاسخ بدهیم.

۴)برای این که مسئله‌ای در A را حل کنیم، انگیزه پیدا می‌کنیم که ابزارهایی در B را درست کنیم که دارای جذابیت مستقل هستند.

۵)زمینه B شامل تعریفاتی است که به تعریف های A شبیه هستند. (اگر بخواهم یک مثال ارائه کنم، برخی اوقات فرد می‌خواهد که مفهومی از استقلال را تعریف کند که از بعضی جهت ها ،ولی نه به‌طور کامل،مثل استقلال در فضاهای برداری رفتار کند). در این حالت زمینه A روش‌های پرباری را برای دسته‌بندی و فکر کردن روی نتایج و مسائل B پیشنهاد می‌دهد.

۶)اگر کسی در زمینه A متخصص شود، در این صورت فرد عادت‌هایی فکری را کسب می‌کند که او را قادر می‌سازد کمک‌های قابل توجهی را به زمینه B ارائه کند.

۷)زمینه A در روح خود به زمینه B نزدیک است، به طوری که کسی که در زمینه A مستعد باشد، احتمالاً در زمینه B نیز مستعد است. درضمن ریاضیدان‌های زیادی در هر دو زمینه کار می‌کنند. ارتباطات غیرمستقیم‌تر مثل ۴ تا ۷ به همان نسبت هم غیرآشکارتر هستند. با این همه سهم آنها در یک‌پارچگی ریاضیات را نباید دست کم گرفت. من خود بالاخص این احساس را بعد از سال‌ها کار کردن در هندسه فضاهای باناخ دارم. علت اولیه من برای کار کردن در این زمینه این بود که نتایجی مانند قضیه دورتسکی و مسائل باز طبیعی زیادی را بسیار جالب می‌دیدم. بعداً متوجه شدم که زمینه منتخب من قویاً به خاطر جدا شدن از ریشه‌های اصلی‌اش در معادلات دیفرانسیل مورد انتقاد است و در پی آن هدفش را گم کرده است. من تصدیق می‌کنم که ارتباطات زیادی از نوع ۱ و ۲ از نظریه محض فضاهای باناخ به بقیه زمینه‌ها وجود ندارد، هرچند که ایده‌های عمیقی وجود دارند که عده زیادی معتقد هستند روی آنها به اندازه کافی کار نشده است. ولی، به محض این که ارتباطات ضعیف‌تر را در نظر بگیریم به وفور شاهد آنها خواهیم بود. استخراج تمرکز اندازه مثال خوبی از ۳ است (یا ۴ ــ دسته‌بندی تا حدودی مصنوعی است.) و برای ۶ و ۷، می‌توانم از تجربه شخصی خود بگویم، اخیراً روی مسائل زیادی خارج از نظریه فضاهای باناخ کار کرده‌ام؛ با این که نتایج فضاهای باناخ را استفاده نکرده‌ام، تجربه‌ی من در این زمینه من را قادر ساخت که به مسائل به گونه‌ای فکر کنم که در حالت دیگری به ذهنم نمی‌رسید. به هیچ وجه این گونه نیست که من در این مورد تنها باشم؛ بسیاری از ریاضیدان‌هایی که در زمینه فضاهای باناخ کار کرده بودند، در زمینه‌های دیگری مانند آنالیز هارمونیک ،معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ،جبرهای C^* ، احتمالات و ترکیبیات کارهای موفقی داشته‌اند. تنها راهی که می‌توان این ارتباطات را نادیده گرفت این است که فرد باور داشته باشد که همه‌ی این ارتباطات بین دو زمینه کم ارزش و غیرجالب است. این دیدگاهی افراطی است و قسمت زیادی از ریاضیات نوین شامل نتایج زیادی با کاربردهای عملی مستقیم را معزول می‌کند، و دشوار است که باور کنیم کسی این دیدگاه را جدی می‌گیرد. با این حال به نظر می‌رسد بعضی این دید را دارند

که باز این ایده را به ذهن می‌رساند که دو فرهنگ در ریاضیات محض داریم. احتمالاً این حرف درستی است که ارتباطات بیشتری بین قسمت‌های مسئله‌حل‌کردنی و نظریه‌سازی ریاضی وجود دارد تا این که بین آنها، و همین علت آن است که برچسب ”دو فرهنگ” مناسب است (باید دوباره بگویم که این نام‌گذاری‌ها فراساده‌سازی هستند و من کاملاً متوجه هستم که افراد زیادی به آنچه من نظریه سازی نامیده ام از این جهت جذب شده‌اند که می‌خواستند مسائل خاصی را پاسخ دهند). اگر درست باشد که ریاضی محض به دو فرهنگ گسترده تقسیم می‌شود که ارتباط چندانی بین آنها وجود ندارد، هنوز می‌توان پرسید که آیا این موضوع حائز اهمیت است؟ به نظر من بله. یک دلیل این است که این وضعیت نتایج عملی نامطلوبی را دارد. برای مثال ریاضیدانان از یک فرهنگ ممکن است تصمیم‌هایی بگیرند که آینده‌ی کاری ریاضیدان‌های فرهنگ دیگر را تحت تأثیر قرار دهد. اگر که درک متقابل کمی بین این دو گروه وجود داشته باشد، تصمیم‌گیری عادلانه، که در بهترین شرایط، کار سختی است، سخت‌تر می‌شود. (من به شخصه گله‌مند نیستم، ولی من در وضعیت کاری خود خوش‌شانس بوده‌ام.) اثر دوم این است که دانشجویان پژوهشگری که به طور طبیعی مناسب یک فرهنگ هستند ممکن است خود را تحت این فشار بیابند که در زمینه‌ای از فرهنگ دیگر کار کنند و در نهایت استعداد خود را تلف کنند. این خطری شایع برای دانشکده‌ای است که تحت سلطه‌ی تعداد کمی موضوع قرار گرفته است. این تأثیرات شاید محصولات جانبی زندگی آکادمیک باشند، و دلایل اصلی من برای مصر بودن به ارتباط بهتر بین این دو گروه نیست. مهم ترین اشکال کمبود ارتباط این است که نشان از یک فرصت بزرگ از دست رفته است. من بعضاً از ریاضیدانانی از جناح نظریه‌سازان گلایه از مسئله‌ای را شنیده‌ام که همه‌ی ابزارهای موجود را روی آن امتحان کرده‌اند ولی یک هسته‌ی سرسخت باقی‌مانده است که ”دراصل ترکیبیات” است. این راهی است برای گفتن این که مسئله خیلی سخت است، ولی، به عبارتی دقیق‌تر، به گونه‌ای سخت است که دقیقاً ریاضی‌دان‌های با ذهن مسئله‌حل‌کن را جذب می‌کند. متأسفانه همچنین سخت است که به درجه‌ای از فهم برسیم که ذات در اصل ترکیبیات مسئله را درک کنیم

. چنین شرایطی مخصوص همکاری بین فرهنگی است، ولی چنین همکاری نیازمند تلاش زیادی از طرف مسئله‌حل‌کن‌ها است که کمی تئوری یاد بگیرند، و احساس همدردی بیشتری از طرف نظریه‌سازان نسبت به ریاضیدان‌هایی که نمی‌دانند کوهومولوژی چیست، است. این تلاش‌ها قطعاً مایه غنای هر دو فرهنگ ریاضی خواهند بود.

مراجع

[1] M. F. Atiyah. How research is carried out. Bull. I.M.A. 10, pages 232–4, 1974.

[2] M. F. Atiyah. An interview with michael atiyah. Math. Intelligencer 6, pages 9–19, 1984.

[3] M. F. Atiyah. Identifying progress in mathematics. ESF conference in Colmar, C.U.P., pages 24–41, 1985.

[4] A. Dvoretzky. Some results on convex bodies and banach spaces. Proc. Symp. on Linear Spaces, Jerusalem, pages 123–160, 1961.

[5] P. Erdos. Some remarks on the theory of graphs. Bull. A.M.S. 53, pages 292–4, 1987.

[6] P. Erdos and L. Lovasz. Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions. in A. Hajnal et al. eds, Infinite and finite sets, North-Holland, Amsterdam, pages 609–628.

[7] R. L. Graham F. Chung and R. M. Wilson. Quasi-random graphs. Combinatorica 9, pages 345–362, 1990.

[8] W. T. Gowers. The two cultures of mathematics. Mathematics: Frontiers and Perspectives, pages 65–79, 2000.

[9] S. Janson. Poisson approximation for large deviations. Random structures and Algorithms 1, pages 221–230.

[10] B. S. Kashin. Sections of some finite dimensional sets and classes of smooth functions. Isv. ANSSSR, ser. mat. 41 (Russian), pages 334–351, 1977.

[11] V. D. Milman. A new proof of the theorem of A. Dvoretzky on sections of convex bodies. Funct. Anal. Appl. 5 (translated from Russian), pages 28–37, 1971.

[12] K. Roth. On certain sets of integers. J. London Math. Soc. 28, pages 245–252, 1953.

[13] S. J. Szarek. On Kashin's almost Euclidean orthogonal decomposition of l_1^n. Bull. Acad. Polon. Sci. 26, pages 691–694, 1978.

[14] E. Szemeredi. Regular partitions of graphs. in Proc. Colloque Inter. CNRS, J.-C. Bermond et al. eds, pages 399–401, 1978.

[15] A. Thomason. Pseudo-random graphs. in M. Karonski, ed., Proceedings of Random Graphs, Poznan, Annals of Discrete Mathematics 33, pages 307–331, 1985.