قدم زن تصادفی ساده و شبکه‌های الکتریکی

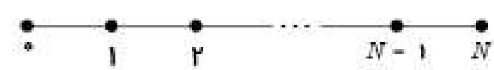
سایه خانی‌ها

چکیده

ارتباط جالب و عمیقی بین قدم زن تصادفی ساده روی گراف‌ها و تحلیل شبکه‌های الکتریکی وجود دارد. مقادیری مانند زمان جابه‌جایی و احتمال فرار به وسیله روش‌های موجود در نظریه مدارها قابل محاسبه هستند. همچنین از مفهوم مقاومت معادل می‌توانیم برای تشخیص گذرا یا بازگشتی بودن یک قدم زن تصادفی ساده روی گراف‌ها استفاده کنیم.

۱ قدم زن تصادفی ساده

یک گراف همبند $G = (V, E)$ در نظر بگیرید، یک قدم زدن تصادفی ساده روی G از یک رأس مشخص در گراف شروع می‌شود و قدم زن تصادفی در هر حرکت، از یک رأس به رأس مجاوری که به احتمال یکنواخت از بین رئوس مجاور انتخاب شده، حرکت می‌کند. به عنوان مثال می‌توانید قدم زدن تصادفی را روی گراف زیر در نظر بگیرید،



شکل ۱: گراف مسیر

فرض کنید از یک نقطه مثلاً نقطه k قدم زدن را شروع کنیم. می‌توانیم به این قدم زدن تصادفی به عنوان مسئله ورشکستگی قمار باز نگاه کنیم. قماربازی با k دلار شروع به بازی می‌کند، بازی این چنین است که او در هر مرحله سکه‌ای سالم را پرتاب می‌کند، اگر سکه شیر بیاید، قمارباز یک دلار می‌برد و اگر خط بیاید، یک دلار از دست می‌دهد. در این صورت مایلیم جواب این سؤال را پیدا کنیم که احتمال رسیدن قمارباز به مبلغ N دلار قبل از ورشکستگی، یعنی رسیدن به مبلغ 0 دلار، چقدر است؟

برای پاسخ دادن به این سؤال تابع $p(k)$ را احتمال این که قمار باز با شروع از k دلار قبل از ورشکستگی به مبلغ N دلار برسد، تعریف می‌کنیم. واضح است که $p(0) = 0$ و $p(N) = 1$. همچنین اگر $k \notin \{0, N\}$، در این صورت می‌توانیم با شرطی کردن روی قدم بعد رابطه ای بازگشتی به شکل زیر بنویسیم،

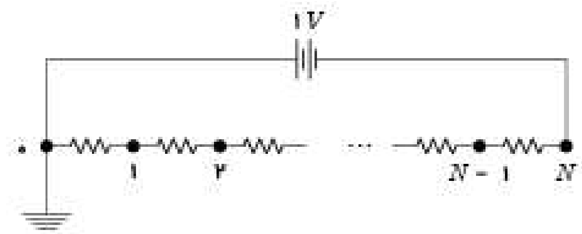
$$p(k) = \Pr(A) \times p(k+1) + \Pr(B) \times p(k-1)$$

در رابطه بالا A این پیشامد است که قمارباز در پرتاب بعدی ۱ دلار برنده شود و B این پیشامد که قمارباز در پرتاب بعدی ۱ دلار ببازد.

اگر رابطه بازگشتی بالا را با شرایط اولیه‌ای که داریم حل کنیم، جوابی به صورت $p(k) = \frac{k}{N}$ به دست می‌آید. در ادامه خواهیم دید که خیلی راحت‌تر می‌توانیم به این جواب برسیم.

۲ شبکه‌های الکتریکی

بیایید به این سؤال به ظاهر نامربوط به بحث قبل در مورد شبکه‌های الکتریکی پاسخ دهیم؛ مدار زیر را که در آن هر مقاومت ۱ اهم است، در نظر بگیرید،



فرض کنید $f(k)$ اختلاف پتانسیل بین نقطه k و نقطه 0 باشد، در این صورت مقدار $f(k)$ چقدر است؟

برای پاسخ دادن به این سؤال ابتدا نیاز به مرور چند نماد داریم. برای هر دو رأس $a,b \in V$ اختلاف پتانسیل آن دو راس را با $\phi(a,b)$ نشان می‌دهیم. اگر $\{a,b\} \in E$، آنگاه $I(a,b)$ نشان‌دهنده جریان الکتریکی جاری از نقطه‌ی a تا b و $R_{a,b}$ مقاومت یال (a,b) است.

همچنین حقایق آشنای زیر را درباره مدارهای الکتریکی داریم،

قانون اهم: در یال جهت‌دار (a,b) داریم $\phi(a,b) = I(a,b)R_{a,b}$.

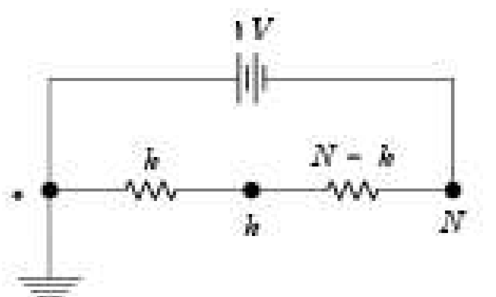
قانون اول کرشهف: در هر رأس v از مدار، جمع جریان‌هایی که به آن رأس وارد می‌شود با جمع جریان‌هایی که از آن خارج می‌شود برابر است، یعنی $\sum_{u:u\sim v} I(u,v) = 0$.

قانون دوم کرشهف: برای هر v_0، v_1، ... و $v_k = v_0$ داریم $\sum \phi(v_i, v_{i+1}) = 0$. یعنی در هر حلقه یا مسیر بسته مجموع جبری اختلاف پتانسیل در المان‌های مدار برابر صفر است.

حال می‌توانیم به سؤالمان درباره $f(k)$ برگردیم. می‌توان دید که $f(0) = 0$ و $f(N) = 1$. همچنین اگر $k \notin \{0, N\}$ داریم،

$$
\begin{aligned}
0 &= I(k-1,k) + I(k+1,k) \\
&= \phi(k-1,k) + \phi(k+1,k) \\
&= \phi(k-1,0) - \phi(k,0) \\
&\quad + \phi(k+1,0) - \phi(k,0) \\
&= (f(k-1) - f(k)) + (f(k+1) - f(k)) \\
&= f(k+1) + f(k-1) - 2f(k)
\end{aligned}
$$

با توجه به روابط بالا داریم $f(k) = \frac{f(k+1)+f(k-1)}{2}$. با برگشتن به قدم زن تصادفی ساده‌ای که داشتیم، می‌بینیم که توابع f و p هر دو در شرایط مرزی و روابط بازگشتی یکسانی صدق می‌کنند. این مطلب نشان می‌دهد که این دو باید با هم برابر باشند. در واقع به سادگی می توان این معادله ی تفاضلی را حل کرد و جواب آن تحت این شرط مرزی یکتاست. گاهی اوقات مراجعه به نسخه مداری مسئله و تحلیل مدار می‌تواند حل آن را راحت‌تر کند. از آنجایی که مقاومت‌های بین نقطه 0 تا k در مدار فوق به صورت سری بسته شده‌اند، می‌توانیم آن‌ها را با یک مقاومت بزرگتر جایگزین کنیم. همچنین همین کار را می‌توانیم با مقاومت‌های بین نقطه k تا N نیز انجام دهیم. در نتیجه مدار معادلی به شکل زیر خواهیم داشت،



از آنجایی که جریان در کل مدار برابر با $\frac{1}{N}$ است، پس می‌بینیم که $p(k) = f(k) = \phi(k,0) = \frac{k}{N}$. یعنی در این حالت برای پیدا کردن $p(k)$ راحت‌تر بود که به جای نگاه کردن به قدم زن تصادفی ساده به مدار نگاه کنیم. برای هر گراف دیگری به جز گراف مسیر

نیز می‌توانیم استدلالی مشابه آنچه گفته شد، انجام دهیم.

قضیه ۱. *گراف متناهی و همبند $G=(V,E)$ و دو رأس a و z از آن را در نظر بگیرید. در قدم زدن تصادفی با شروع از نقطه k، احتمال برخورد به رأس a قبل از برخورد به رأس z برابر است با اختلاف پتانسیل بین نقاط k و z در شبکه‌ای مشابه که هر یال آن دارای مقاومت 1 است و بین نقاط a و z اختلاف پتانسیل 1 اعمال شده است.*

این قضیه در واقع به یکتایی توابع هارمونیک روی گراف‌های متناهی مربوط می‌شود. یک تابع $f: V \to \mathbb{R}$ ، یک تابع هارمونیک در رأس v است، اگر

$$f(v)=\frac{1}{\deg(v)}\sum_{u\sim v} f(u)$$

لم ۱. *فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف متناهی همبند و $B\subset V$ ناتهی باشد. اگر f روی $V\backslash B$ هارمونیک و روی B مساوی صفر باشد، در این صورت f متحد با صفر خواهد بود.*

اثبات. *ابتدا نشان می‌دهیم که $f\leq 0$. از آن‌جایی که گراف متناهی است، رأسی مانند v_0 در آن وجود دارد که $f(v_0)=M$ و M بیشینه مقدار f روی V است. حال فرض کنید $w\sim v_0$. در این صورت اگر $f(w)<f(v_0)$ داریم،*

$$\begin{aligned} f(v_0) &= \frac{1}{\deg(v_0)}\sum_{u\sim v_0} f(u) \\ &= \frac{1}{\deg(v_0)}.f(w) \\ &+ \frac{1}{\deg(v_0)}\sum_{u\sim v_0, u\neq w} f(u) < M \end{aligned}$$

که این ممکن نیست، بنابراین $f(w)=f(v_0)$. از آن‌جایی که گراف همبند است، مسیری از v_0 به رأسی از B مثل y وجود دارد. با تکرار استدلال بالا نتیجه می‌گیریم که $f(v_0)=f(y)=0$، بنابراین بیشینه مقدار f روی V مساوی صفر است. با استدلالی مشابه روی $-f$ نتیجه می‌گیریم که $f\geq 0$ و این اثبات را کامل می‌کند.

اثبات قضیه ۱. *اگر تابع مربوط به قدم زن تصادفی را با p و تابع مربوط به نظریه مدارها را با f نمایش دهیم، در هر رأس v به جز a و z داریم،*

$$\begin{aligned} p(v) &= \sum_{u\sim v}\Pr(\text{اولین گام از } v \text{ به } u \text{ باشد})\times p(u) \\ &= \frac{1}{\deg(v)}\sum_{u\sim v} p(u) \end{aligned}$$

بنابراین p روی $V\backslash\{a,z\}$ هارمونیک است. به طور مشابه با استفاده از قوانین کرشهف داریم،

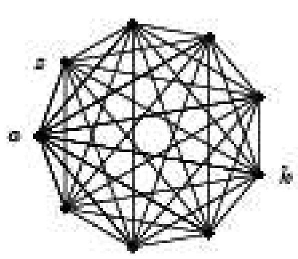
$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{u\sim v} I(u,v) \\ &= \sum_{u\sim v} \phi(u,v) \\ &= \sum_{u\sim v} \phi(u,z)-\phi(v,z) \\ &= \Big(\sum_{u\sim v} f(u)\Big)-\deg(v)f(v). \end{aligned}$$

رابطه بالا نشان می‌دهد که f نیز یک تابع هارمونیک روی $V\backslash\{a,z\}$ است. در نتیجه می‌توانیم مشاهده کنیم که

$$(f-p)(a)=(f-p)(z)=0$$

و $f-p$ روی $V\backslash\{a,z\}$ هارمونیک است. با استفاده از لم ۱ نتیجه می‌شود که $f-p\equiv 0$ یعنی $f=p$.

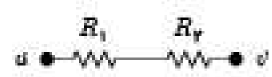
از این رابطه دو طرفه بین قدم زدن تصادفی روی گراف‌ها و شبکه‌های الکتریکی می‌توانیم برای ساده‌تر کردن مسائل احتمالاتی و همچنین سؤالات مربوط به تحلیل مدارها استفاده کنیم. مثال ورشکستگی قمارباز مثالی بود که در آن استفاده از تحلیل مداری ساده‌تر از نگاه احتمالاتی بود ولی ممکن است برعکس این اتفاق نیز بیفتد. برای مثال مداری با n گره در نظر بگیرید که در آن هر رأس به همه رئوس دیگر متصل است یعنی گراف کامل با n رأس را در نظر بگیرید،



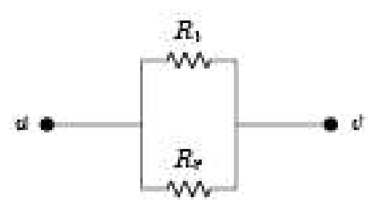
اگر ما دو رأس a و z را در نظر بگیریم و اختلاف پتانسیل 1 بین آن‌ها ایجاد کنیم، اختلاف پتانسیل بین یک رأس دیگر و z چقدر خواهد بود؟ به سؤال متناظر با این سؤال در قدم زدن تصادفی ساده نگاه کنید، می‌بینید که در قدم زدن تصادفی ساده احتمال رسیدن به دو رأس a و z با هم برابر است پس برای همه k هایی که a و z نیستند، داریم $p(k) = \frac{1}{2}$. این یعنی اختلاف پتانسیل هر رأس به جز a با z برابر با $\frac{1}{2}$ است.

۳ زمان جابه‌جایی و مقاومت معادل

به یاد دارید که ما در مثال ورشکستگی قمارباز k مقاومت کوچک را با یک مقاومت بزرگ جایگزین کردیم. این مثالی از به دست آوردن مقاومت معادل است. مقاومت معادل بین دو نقطه u و v میزان اختلاف پتانسیل مورد نیاز بین آن دو نقطه است که بتواند یک واحد جریان را از نقطه u به نقطه v بفرستد. این کمیت را با $R(u,v)$ نشان می دهیم. یادآوری می‌کنیم که اگر دو مقاومت سری باشند مانند شکل زیر،



در این صورت $R(u,v) = R_1 + R_2$. اگر دو مقاومت موازی باشند،



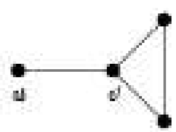
در این صورت $R(u,v) = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}$. یک بیان احتمالاتی از مقاومت معادل بر اساس احتمال فرار وجود دارد.

گزاره ۱. *فرض کنید که $p(a,z)$ این احتمال باشد که قدم زن تصادفی ساده با شروع از a قبل از بازگشت به a به z برخورد کند.* *در این صورت،*

$$p(a,z) = \frac{1}{\deg(a)R(a,z)}$$

با توجه به گزاره بالا می‌بینید که مفهوم مقاومت معادل برای پی بردن به این مطلب که رسیدن از یک رأس به رأس دیگر چقدر دشوار است، مفید است.

$H_{u,v}$ را امید ریاضی زمان برخورد قدم زن تصادفی ساده به راس v با شروع حرکت از راس u تعریف کنید. توجه کنید که $H_{u,v}$ لزوماً با $H_{v,u}$ برابر نیست. برای مثال در گراف زیر،



قدم زن تصادفی که از u شروع به حرکت می‌کند، همواره در اولین قدم به v می‌رسد. پس $H_{u,v} = 1$. ولی $H_{v,u} > 1$ زیرا یک قدم زن تصادفی که از v شروع به حرکت کرده است، ممکن است که اول به سمت راست حرکت کند. برای این که مشکل عدم تقارن را رفع کنیم، زمان جابه‌جایی بین دو رأس u و v را به صورت $C_{u,v} = H_{u,v} + H_{v,u}$ تعریف می‌کنیم. به طرز شگفت انگیزی، این زمان جابه‌جایی رابطه‌ی نزدیکی با مقاومت معادل دارد.

گزاره ۲. *برای هر دو رأس u و v در گراف همبند $G = (V,E)$ داریم،*

$$C_{u,v} = 2|E|R(u,v)$$

این گزاره نیز یک رابطه دوطرفه بین قدم زدن تصادفی ساده و تحلیل مدارها به دست می‌دهد. بیایید این رابطه را روی گراف مسیر (شکل ۱) نگاه کنیم. $H_{0,N}$ در این مثال چقدر است؟ چون این گراف متقارن است، پس اینجا $H_{0,N} = H_{N,0}$. در نتیجه با استفاده از گزاره قبل خواهیم داشت،

$$H_{0,N} = |E|R(0,N) = N.N = N^2$$

همان طور که می‌بینید این رابطه بدون ذره‌ای تلاش متوسط زمان برخورد را به ما می‌دهد. درصورتی که اگر می‌خواستیم به مسئله از دیدگاه احتمالاتی نگاه کنیم اوضاع پیچیده‌تر بود. این رابطه می‌تواند

برای حل مسائل مربوط به مدارها هم مفید باشد. فرض کنید می خواهیم در گراف کامل n رأسی مقاومت معادل بین دو رأس a و b را پیدا کنیم. با استفاده از گزاره ۲ می‌توانیم بنویسیم،

$$R(a,b) = \frac{H_{a,b}+H_{b,a}}{2|E|} = \frac{H_{a,b}}{\binom{n}{2}}$$

می‌توانیم به راحتی $H_{a,b}$ را محاسبه کنیم. قدم زن تصادفی هرجایی به جز نقطه b باشد، احتمال رفتن آن به نقطه b در قدم بعد برابر $\frac{1}{n-1}$ است. این نشان می‌دهد که تعداد قدم‌های لازم برای رسیدن از a به b یک متغیر تصادفی هندسی با پارامتر $\frac{1}{n-1}$ است. پس امید ریاضی این متغیر هندسی $n-1$ است. با جای گذاری این مقدار در رابطه قبل خواهیم داشت،

$$R(a,b) = \frac{n-1}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n}.$$

۴ کران بالایی برای زمان پوشش

برای گراف متناهی و همبند G و هر رأس v از آن، زمان پوشش [1] گراف با شروع از رأس v را با C_v نمایش می‌دهیم. C_v در واقع متوسط تعداد قدم‌های لازم برای مشاهده‌ی همه رأس‌ها است، با این فرض که قدم زدن تصادفی را از رأس v شروع کرده‌باشیم. زمان پوشش گراف را $C(G) := \max_{v\in V} C_v$ تعریف می‌کنیم. برای گراف خطی به طول N، زمان پوشش با شروع از نقطه‌ی صفر، در واقع همان زمان برخورد به نقطه‌ی N است که قبلاً مقدار آن را برابر با $C_0 = N^2$ حساب کردیم.
یک سؤال که مطرح می‌شود این است که آیا ارتباطی بین زمان پوشش و تعداد رأس‌ها و یال‌های گراف وجود دارد؟

قضیه ۲. *برای هر گراف همبند G داریم*

$$C(G) \le 2|E|.|V|$$

اثبات. *فرض کنید T یک زیردرخت فراگیر از G باشد. به‌ازای هر رأس v می‌توانیم با شروع از v کل درخت را طی کنیم و دوباره به v برگردیم به‌طوری که هر یال دقیقاً ۲ بار طی شده‌باشد. این یک ویژگی درخت‌هاست که به سادگی از طریق استقرا قابل اثبات است یا به عنوان مثال می‌توان از الگوریتم جستجوی عمق‌اول [2] استفاده کرد. می‌توانیم رأس‌ها را بر اساس ترتیبی که پیموده می‌شوند شماره‌گذاری کنیم، $v_0 = v, v_1, ..., v_{2n-2} = v$. زمان پوشش برای v کمتر یا مساوی متوسط زمانی است که قدم‌زن تصادفی رأس‌ها را با این ترتیب می‌پیماید، یعنی ابتدا قدم‌زن با تعدادی گام از v_0 به v_1 می‌رسد، سپس با تعدادی گام از v_1 به v_2 و الی آخر. اثبات دقیق این موضوع به کمک بررسی درخت حالت‌های قدم‌زن تصادفی ممکن است. بنابراین*

$$\begin{aligned} C_v &\le \sum_{k=0}^{2n-3} H_{v_k,v_{k+1}} \\ &= \sum_{(x,y)\in E_T} H_{x,y}+H_{y,x} \\ &= \sum_{(x,y)\in E_T} 2|E|R(x,y) \\ &\le \sum_{(x,y)\in E_T} 2|E|\cdot 1 \\ &\le 2|E|\cdot|V| \end{aligned}$$

در رابطه‌ی آخر از این شهود فیزیکی استفاده کردیم که مقاومت معادل بین دو راس که بین آن‌ها یال هست، از مقدار مقاومت ۱ اهمی یال بین آن‌ها بیشتر نیست. این نکته به طور ریاضی نیز قابل اثبات است زیرا حل معادلات کرشهف با مینیمم‌سازی توان اتلافی الکتریکی معادل است. در نهایت با گرفتن ماکسیمم از دو طرف اثبات کامل می‌شود.

مراجع

[1] J. Laurie Snell Peter G. Doyle. Random walks and electric networks. 2006.

[2] Yuval Peres Russell Lyons. Probability on Trees and Networks. 2010.

[1] Cover Time
[2] Depth-First search