تبدیل فوریه در گروه‌ها

امیرحسین اخلاصی

۱ مقدمه

تبدیل فوریه[1] یکی از معروفترین و پرکاربردترین ابزارهای ریاضی است که توسط بسیاری از ریاضی‌دانان، فیزیک‌دانان و مهندسان به کار می‌رود. تحلیل فوریه در واقع یک ابزار خوب برای تحلیل خواص یک تابع از جمله امواج و سیگنال‌ها است. برای مثال در تحلیل سیگنال‌ها، تبدیل فوریه‌ی یک تابع نشان‌دهنده‌ی فرکانس‌های موجود در آن تابع و در کوانتوم، تبدیل فوریه‌ی یک تابع موج مکان، تابع موج تکانه را به ما می‌دهد. در حل معادلات دیفرانسیل نیز به علت خواص خوب تبدیل فوریه، از آن استفاده می‌شود. در احتمال و ... می‌توان حضور تبدیل فوریه را دریافت.

اما در باب چیستی تبدیل فوریه، باید گفت که نشان‌دهنده‌ی آن است که یک تابع چه جور ترکیب خطی‌ای از توابع به شکل $e^{2\pi ix}$ است. یعنی یک موج از ترکیب خطی امواج با فرکانس‌های مختلف به وجود آمده است و تبدیل فوریه می‌خواهد به ما نشان دهد که ضرایب این ترکیب خطی چگونه هستند. برای مثال اگر $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi inx}$ یک تابع با تناوب ۱ باشد و $\hat{f}(n) = \int_0^1 e^{-2\pi inx} f(x)dx$ سری فوریه f باشد، آنگاه $\hat{f}(n) = c_n$. البته این گزاره تحت شرایطی ممکن است برقرار نباشد و شرایط لازم به قضیه‌ی وارون فوریه[2] معروف است.

اما ما در مسائلمان معمولاً با چهار نوع تبدیل فوریه مواجه می‌شویم:

۱. **تبدیل فوریه:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ix\xi} f(x)dx, \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi ix\xi} \hat{f}(\xi)d\xi \tag{1}$$

۲. **سری فوریه:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ با تناوب ν

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{\nu}\int_0^{\nu} e^{-\frac{2\pi ixn}{\nu}} f(x)dx, \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{\frac{2\pi ixn}{\nu}} \tag{2}$$

۳. **تبدیل فوریه‌ی گسسته‌زمان:** $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-2\pi inx}, \quad f(n) = \int_0^1 e^{2\pi inx} \hat{f}(x)dx \tag{3}$$

۴. **تبدیل فوریه‌ی گسسته:** $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ با تناوب N

$$\hat{f}(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{\frac{-2\pi imn}{N}}, \quad f(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{f}(m) e^{\frac{2\pi imn}{N}} \tag{4}$$

یکی از سؤالاتی که می‌خواهیم به آن جواب دهیم این است که آیا می‌توان ادبیات مشترکی برای هر چهار نوع تبدیل پیدا کرد؟ درواقع این سؤال وقتی بیشتر مطرح می‌شود که بدانیم خواص تبدیل فوریه در تمام چهار مورد فوق شبیه هم است. از طرف دیگر وقتی پای

[1] Fourier transform
[2] Fourier inversion theorem

تابع دلتا به میان می‌آید، مسائل بیشتری برای ریاضی‌دانان مطرح می‌شود. زیرا تابع دلتا از لحاظ ریاضی بی‌معنی است و صرفاً یک نماد فیزیکی است که فقط زیر انتگرال معنا می‌دهد. به عنوان مثال در تبدیل فوریه‌ی پیوسته به پیوسته، برای تابع $f(x) = e^{2\pi ixax}$ تبدیل فوریه‌ی آن موجود نمی‌باشد، یعنی $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ix\xi} f(x)dx$ موجود نیست. این در حالی‌ست که

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi ix\xi}\delta(\xi - a)d\xi = e^{2\pi ixax} = f(x) \qquad (۵)$$

اما همان طور که می‌دانیم، تابع دلتا در واقع وجود خارجی ندارد و صرفاً مفهومی است که توسط فیزیک‌دانان توسعه یافته است. در واقع تابع دلتا نمادی برای نمایش اندازه‌ی $d\mu(x) = \delta(x-a)dx$ است که در آن

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } a \in E \\ 1 & \text{اگر } a \notin E \end{cases} \qquad (۶)$$

پس تبدیل فوریه چیزی فرای یک تبدیل از توابع به توابع است. در این مقاله سعی شده است چیستی تبدیل فوریه مورد بحث قرار گیرد. در سه بخش اول ابتدا به بیان مقدمات و پیش‌نیازها می‌پردازیم و بخش‌های بعدی را به بیان تبدیل فوریه و مسائل مورد نیاز اختصاص می‌دهیم.

۲ قضیه‌ی استون ـ وایرشتراس

فرض کنید X یک فضای توپولوژیک موضعاً فشرده و هاوسدرف باشد. فرض کنید $C(X,\mathbb{C})$ مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته‌ی $f : X \to \mathbb{C}$ باشد.[۳] $C(X,\mathbb{C})$ را می‌توان به توپولوژی فشرده‌ـ‌باز مجهز کرد که در آن مفهوم همگرایی $f_n \to f$ به معنای آن است که f_n روی همه‌ی زیرمجموعه‌های فشرده‌ی X به طور یکنواخت به f همگرا باشد. همچنین فرض کنید $C_c(X,\mathbb{C})$ مجموعه‌ی تمام توابع $f \in C(X,\mathbb{C})$ با محمل فشرده باشد.

تعریف ۱. برای تابع $f : X \to \mathbb{C}$ می‌گوییم f در بی‌نهایت صفر می‌شود هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ ، مجموعه‌ی فشرده‌ی K وجود داشته باشد که برای xهای خارج از K داشته باشیم $|f(X)| < \epsilon$.

مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته‌ی مختلط‌مقدار که در بی‌نهایت صفر می‌شوند را با $C_0(X,\mathbb{C})$ نشان می‌دهیم. واضح است که $C_c(X,\mathbb{C}) \subset C_0(X,\mathbb{C}) \subset C(X,\mathbb{C})$ ؛ در واقع $C_0(X,\mathbb{C}) = \overline{C_c(X,\mathbb{C})}$. همچنین می‌توان روی $C_0(X,\mathbb{C})$ نرم L^∞ را به شکل $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X}|f(x)|$ تعریف کرد. مجموعه‌ی $A \subset C(X,\mathbb{C})$ را یک جبر خودالحاق می‌گویند هرگاه تحت جمع، ضرب، ضرب اسکالر و مزدوج‌گیری بسته باشد. می‌گوییم جبر A هیچ جا صفر نمی‌شود هرگاه همه‌ی اعضای A همزمان در یک نقطه صفر نشوند. می‌گوییم جبر A نقاط X را جدا می‌کند هر گاه برای هر دو نقطه‌ی متمایز $x, y \in X$ تابع $f \in A$ وجود داشته باشد که $f(x) \neq f(y)$.

قضیه ۱ (استون‌ـ وایرشتراس[۴]). *اگر $A \subset C_0(X,\mathbb{C})$ یک جبر خودالحاق باشد که هیچ جا صفر نشود و نقاط X را جدا کند، در این صورت A در $C_0(X,\mathbb{C})$ چگال است.*

برای اطلاعات بیشتر در این زمینه به [۲] مراجعه شود.

۳ نظریه‌ی اندازه

در این قسمت به ارائه‌ی خلاصه‌ای از موارد مورد نیاز در نظریه‌ی اندازه می‌پردازیم.

۱.۳ اندازه

اندازه اولین بار توسط لبگ مطرح شد که به هر زیرمجموعه از $\mathbb{R}$ عددی را نسبت داد که به آن اندازه‌ی مجموعه می‌گفت به طوری که خاصیت جمع‌پذیری را دارا باشد و تحت انتقال ناوردا باشد. وی دو مفهوم اندازه‌ی داخلی و خارجی را معرفی کرد و مجموعه‌هایی را که برای آن‌ها این دو عدد مساوی می‌شدند مجموعه‌های اندازه‌پذیر نامید. در ابتدا معلوم نبود که آیا مجموعه‌ی اندازه‌ناپذیر وجود دارد

[۳] تمام تعاریف و قضایای مربوط به این بخش با جایگزین کردن $\mathbb{R}$ به جای $\mathbb{C}$ نیز برقرار است.

[4] Stone-Weierstrass theorem

یا نه ولی چندی بعد ویتالی مثالی از چنین مجموعه‌ای ساخت. کار لبگ برای تعریف اندازه‌ی لبگ روی $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^n$، بعدها تعمیم پیدا کرد و اندازه‌های انتزاعی روی هر فضایی قابل تعریف شد. بخصوص اندازه‌ی احتمال روی فضاهای احتمال بسیار مورد توجه قرار گرفت.

اندازه را روی گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های یک فضا که به σـجبر معروف است تعریف می‌کنند. یک σـجبر مانند Σ از مجموعه‌ی X گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X است که شامل X و $\emptyset$ است و تحت متمم‌گیری و اجتماع شمارا بسته باشد. به اعضای Σ اصطلاحاً مجموعه‌های اندازه‌پذیر می‌گویند.

تعریف ۲. یک اندازه روی (X, Σ) تابعی مانند $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ می‌باشد که دارای خواص زیر است:

۱. $\mu(\emptyset) = 0$

۲. (**σـجمع‌پذیری**[5]) اگر $A_1, A_2, \ldots$ حداکثر شمارا مجموعه‌ی دو به دو مجزا از Σ باشند، داشته باشیم

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n) \tag{۷}$$

اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، به σـجبر تولیدشده با مجموعه‌های باز آن، σـجبر بُرل می‌گوییم و به اندازه‌های روی آن، اندازه‌ی بُرل می‌گوییم. در نظریه‌ی اندازه مجموعه‌های اندازه‌صفر (مجموعه‌هایی که $\mu(E) = 0$) قابل اغماض هستند و می‌توان در گزاره‌ها به آن‌ها توجه نکرد. برای مثال اگر دو تابع از X همه جا غیر از یک مجموعه‌ی اندازه‌صفر با هم برابر باشند، ما آن دو تابع را در نظریه‌ی اندازه یکی در نظر می‌گیریم و می‌گوییم این دو تابع تقریباً همه جا با هم برابرند. اندازه‌ی μ را کامل می‌گوییم هرگاه برای هر مجموعه‌ی اندازه‌صفر A، اگر $B \subset A$ ، آنگاه B نیز اندازه‌پذیر (و در نتیجه اندازه‌صفر) باشد. اگر μ یک اندازه روی (X, Σ) باشد، می‌توان با اضافه کردن این گونه مجموعه‌ها به Σ، آن را کامل کرد. (واضح است که برای همه‌ی اندازه‌ها نمی‌توان همزمان این کار را انجام داد.) مجموعه‌های اندازه‌پذیر روی $\mathbb{R}^n$ کامل‌شده‌ی σـجبر برل آن به توسط اندازه‌ی لُبگ[6] هستند. اندازه‌ی لبگ تحت انتقال و دوران ناوردا است. برای $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ نیز می‌توان مجموعه‌های اندازه‌پذیر و اندازه‌ی لبگ را به راحتی تعمیم داد.

اما مهمترین خاصیتی که اندازه‌ها برای بسیاری از کارها مانند تعریف انتگرال و قضایای گوناگون باید دارا باشند، σـمتناهی بودن است؛ یعنی حداکثر شمارا مجموعه‌ی $A_1, A_2, \ldots$ موجود باشند که

$$X = \bigcup_n A_n \quad \text{و} \quad \forall i,\ \mu(A_i) < \infty \tag{۸}$$

برای جزئیات بیشتر به [۴] مراجعه شود.

در قسمت آخر به تعریف جلو دادن[7] یک اندازه با یک تابع و توابع ناوردا اشاره می‌کنیم.

تعریف ۳. فرض کنید (X, Σ_1) و (Y, Σ_2) دو فضای اندازه باشند. در این صورت تابع $f : X \to Y$ را اندازه‌پذیر می‌نامیم هرگاه برای هر $E \in \Sigma_2$، $f^{-1}(E) \in \Sigma_1$. اگر μ یک اندازه روی (X, Σ_1) باشد، آنگاه می‌توان اندازه‌ی $f_*\mu$ را روی (Y, Σ_2) به صورت $f_*\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$ تعریف کرد. تابع اندازه‌پذیر $f : X \to X$ را μـناوردا می‌گوییم هرگاه $f_*\mu = \mu$.

۲.۳ انتگرال لبگ

از مهمترین ارکان نظریه‌ی اندازه انتگرال لبگ است؛ برای تابع اندازه‌پذیر $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ می‌توان

$$\int_X f d\mu \tag{۹}$$

را تعریف کرد که تعمیمی از جمع وزن‌دار مقادیر تابع f روی X با وزن μ است. البته اگر تابع f هر دوی مقادیر منفی و مثبت را اتخاذ کند، ممکن است انتگرال فوق تعریف‌ناپذیر باشد. لذا ابتدا برای توابع نامنفی f، انتگرال تعریف می‌شود که مقدار آن می‌تواند ∞ باشد. در قدم بعدی تابع f را که می‌تواند مقادیر منفی را هم اتخاذ کند انتگرال‌پذیر می‌گوییم هرگاه $\int_X |f| d\mu < \infty$. اگر f

[5] σ- additivity
[6] Lebesgue measure
[7] push forward

انتگرال‌پذیر باشد، انتگرال f را به شکل

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \qquad (۱۰)$$

تعریف می‌کنند که در آن $f^+ = \max(0, f)$ و $f^- = -\min(0, f)$.

انتگرال لبگ تمام خواص خوبی که از آن انتظار می‌رود، مانند خطی بودن و نامساوی مثلث را دارا است. مهمتر از آن اگر 1_A تابع مشخصه‌ی مجموعه‌ی اندازه‌پذیر A باشد، آنگاه

$$\int_X 1_A d\mu = \mu(A) \qquad (۱۱)$$

برای جزئیات بیشتر از خواص انتگرال لبگ به [۴] مراجعه کنید.

تذکر. اگر $E \subset X$ زیرمجموعه‌ی اندازه‌پذیری از X باشد، آنگاه

$$\int_E f d\mu = \int_X 1_E f d\mu \qquad (۱۲)$$

تا اینجا انتگرال را برای توابع اندازه‌پذیر حقیقی‌مقدار تعریف کردیم. اما به راحتی می‌توان این تعریف را برای توابع مختلط‌مقدار تعمیم داد. اگر $f = u + iv$ یک تابع اندازه‌پذیر مختلط‌مقدار باشد، f را انتگرال‌پذیر می‌گوییم هرگاه $\int_X |f| d\mu < \infty$. در صورتی که f انتگرال‌پذیر باشد، انتگرال آن را می‌توان به شکل

$$\int_X f d\mu = \int_X u d\mu + i \int_X v d\mu \qquad (۱۳)$$

تعریف کرد. انتگرال برای توابع مختلط نیز دارای تمام خواص خوب اشاره‌شده در بالا می‌باشد. نکته‌ی دیگری که می‌توان به آن اشاره کرد خاصیت خوب انتگرال در جلو دادن است. اگر $L : X \to Y$ تابعی اندازه‌پذیر باشد، آنگاه رابطه‌ی

$$\int_Y f d(L_* \mu) = \int_X (f \circ L) d\mu \qquad (۱۴)$$

برای توابع μـ انتگرال‌پذیر f برقرار است. تا اینجا با خواص خوب انتگرال لبگ آشنا شدیم، اما در همه‌ی شرایط انتگرال لبگ رفتار مورد انتظار را ندارد و همان طور که در بخش قبل اشاره شد برای بعضی از خواص مورد انتظار نیاز است μ، σـ متناهی باشد.

قضیه ۲. *فرض کنید μ یک اندازه‌ی σـ متناهی باشد و $f \geq 0$ یک تابع اندازه‌پذیر باشد. در این صورت*

(آ) *اگر $\int_X f d\mu < \infty$ آنگاه $f < \infty$ a.e.*

(ب) *اگر $\int_X f d\mu = 0$ آنگاه $f = 0$ a.e.*

حال به تعریف فضای L^p می‌پردازیم.

تعریف ۴. برای $1 \leq p < \infty$ نرم L^p برای توابع اندازه‌پذیر به شکل

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (۱۵)$$

تعریف می‌شود. تابع f را L^p می‌گوییم هرگاه $\|f\|_p < \infty$. $L^p(X, \mu)$ مجموعه‌ی تمام توابع L^p است که در آن دو تابع را که تقریباً همه جا با هم برابر باشند را یکی در نظر می‌گیریم.

می‌توان نشان داد که $L^p(X, \mu)$ یک فضای برداری کامل (فضای باناخ) با نرم $\| \|_p$ می‌باشد. معمولاً مجموعه‌ی $L^p(X, \mu)$ را بر حسب استفاده به اختصار با $L^p(X)$ یا $L^p(\mu)$ نمایش می‌دهند. همگرایی L^p نیز به این معنا است که $\|f_n - f\|_p \to 0$.

قضیه ۳ (نامساوی هولدر[8]). *فرض کنید $1 \leq p, q \leq \infty$ اعدادی باشند به طوری که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$، در این صورت برای هر دو تابع $f \in L^p(X, \mu)$ و $g \in L^q(X, \mu)$،*

$$\|f\|_p \|g\|_q \geq \|fg\|_1 \qquad (۱۶)$$

در آخر به قضایای همگرایی انتگرال اشاره می‌کنیم. می‌گوییم دنباله‌ی f_n تقریباً همه جا به f همگرا است و می‌نویسیم $f_n \to f$ a.e. هرگاه برای تمام مقادیر x به غیر از حداکثر یک مجموعه‌ی اندازه‌صفر $f_n(x) \to f(x)$. سؤال این جاست که در چه صورت $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$؟ دو قضیه‌ی زیر به این موضوع پرداخته است.

قضیه ۴ (قضیه‌ی همگرایی یکنوا). *اگر f_n توابع نامنفی اندازه‌پذیر باشند به طوری که $f_n \to f$ a.e. و $f_n(x) \leq f(x)$ a.e. در این صورت*

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu \qquad (۱۷)$$

[8] Holder's inequality

قضیه ۵ (قضیه‌ی همگرایی تسلطی). *فرض کنید f_n دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر باشند که تحت تسلط تابع $g \in L^p(X,\mu)$ باشند. یعنی $|f_n| \leq |g|$ $a.e.$ (در نتیجه f_nها نیز L^p هستند.) در این صورت اگر $f_n \to f$ $a.e.$ آنگاه*

(آ)

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0 \qquad (۱۸)$$

یعنی $f_n \xrightarrow{L^p} f$.

(ب) در حالت $p=1$ از (۱۸) نتیجه می‌شود که

$$\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu \qquad (۱۹)$$

۳.۳ قضیه‌ی فوبینی‌ـ تونلی

زمانی که با انتگرال‌های دوگانه یا چندگانه کار می‌کنیم، در ابتدا از یک مؤلفه و در ادامه از مؤلفه‌ی دیگر انتگرال می‌گیریم. همین کار را می‌توان برای اندازه‌ها کرد. اگر (X_1,Σ_1) و (X_2,Σ_2) دو فضای اندازه باشند، می‌توان σـ جبر $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ را که از مجموعه‌هایی به شکل $A \times B$ که $A \in \Sigma_1$ و $B \in \Sigma_2$ تولید می‌شود در نظر گرفت. حال اگر μ_1 و μ_2 دو اندازه‌ی مختلط به ترتیب روی (X_1,Σ_1) و (X_2,Σ_2) باشند، می‌توان اندازه‌ی $\mu_1 \times \mu_2$ را روی $(X_1 \times X_2, \Sigma_1 \times \Sigma_2)$ تعریف کرد به طوری که

$$\mu_1 \times \mu_2(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B) \qquad (۲۰)$$

البته برای یکتایی نیاز است که μ_1 و μ_2 هر دو σـ متناهی باشند. (در نتیجه $\mu_1 \times \mu_2$ نیز σـ متناهی خواهد بود.)

قضیه‌ی فوبینی‌ـ تونلی[9] در واقع ترکیبی از دو قضیه‌ی فوبینی و تونلی است که برای انتگرال گرفتن دوگانه و چندگانه از توابع استفاده می‌شود.

قضیه ۶ (تونلی). *فرض کنید μ_1 و μ_2 دو اندازه‌ی σـ متناهی به ترتیب روی (X_1,Σ_1) و (X_2,Σ_2) باشند و f یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی روی $X_1 \times X_2$ باشد. فرض کنید*

$$g(x) = \int_{X_2} f(x,y) d\mu_2(y) \qquad (۲۱)$$

در این صورت g یک تابع اندازه‌پذیر روی X_1 است و

(۲۲)

$$\int_{X_1} g(x) d\mu_1(x) = \int_{X_1 \times X_2} f(x,y) d(\mu_1 \times \mu_2)(x,y)$$

قضیه ۷ (فوبینی). *فرض کنید μ_1 و μ_2 دو اندازه‌ی σـ متناهی به ترتیب روی (X_1,Σ_1) و (X_2,Σ_2) باشند و f یک تابع $\mu_1 \times \mu_2$ـ انتگرال‌پذیر روی $X_1 \times X_2$ باشد. در این صورت توابع $f^x(y) = f(x,y)$ روی X_2 تقریباً برای همه‌ی xها μ_2ـ انتگرال‌پذیر است و اگر*

$$g(x) = \int_{X_2} f(x,y) d\mu_2(y) \quad a.e. \qquad (۲۳)$$

آنگاه g یک تابع اندازه‌پذیر و μ_1ـ انتگرال‌پذیر روی X_1 است و

(۲۴)

$$\int_{X_1} g(x) d\mu_1(x) = \int_{X_1 \times X_2} f(x,y) d(\mu_1 \times \mu_2)(x,y)$$

در واقع وقتی می‌خواهیم انتگرال دوگانه بگیریم ابتدا لازم است که بدانیم آیا تابع انتگرال‌پذیر است که این را با استفاده از قضیه‌ی تونلی (قضیه ۶) بررسی می‌کنیم، سپس قضیه‌ی فوبینی (قضیه ۷) به ما کمک می‌کند تا انتگرال دوگانه بگیریم. البته در این مقاله خیلی به جزئیات توجه نمی‌کنیم و محک انتگرال‌پذیری توابع را به عهده‌ی خواننده می‌گذاریم.

۴.۳ قضیه‌ی رادون‌ـ نیکدیم

در حساب دیفرانسیل، با عباراتی مانند $dy = f(x)dx$ روبه‌رو میشویم. معنای این جمله معمولاً این است که برای هر تابع h، $\int h(y)dy = \int h(x)f(x)dx$. حال این سؤال پیش می‌آید که آیا این صورت‌بندی را می‌توان برای اندازه‌ها ادامه داد؟ اگر μ یک اندازه روی (X,Σ) و f یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی باشد، آنگاه اندازه‌ی ν را می‌توان به شکل

$$\nu(E) = \int_E f d\mu \qquad (۲۵)$$

[9] Fubini-Tonelli theorem

تعریف کرد. در این حالت می‌توان نشان داد که برای هر تابع اندازه‌پذیر h،

$$\int_X h(x)d\nu(x) = \int_X h(x)f(x)d\mu(x) \qquad (۲۶)$$

لذا می‌نویسیم $d\nu = fd\mu$. حال این سؤال پیش می‌آید که برای دو اندازه‌ی μ و ν، چه موقع می‌توان رابطه‌ای به شکل $d\nu = fd\mu$ نوشت. واضح است که در این حالت اگر E یک مجموعه‌ی μـ اندازه‌صفر باشد، آنگاه νـ اندازه‌صفر نیز هست.

تعریف ۵. فرض کنید μ و ν دو اندازه روی (X, Σ) باشند. در این صورت می‌گوییم ν نسبت به μ پیوسته‌ی مطلق است و می‌نویسیم $\nu \ll \mu$، هرگاه هر مجموعه‌ی μـ اندازه‌صفر، νـ اندازه‌صفر نیز باشد.

واضح است که اگر $d\nu = fd\mu$، در این صورت $\nu \ll \mu$ اما قضیه‌ی زیر عکس این گزاره را بیان می‌کند:

قضیه ۸ (قضیه‌ی رادون‌ـ نیکدیم[10]). *فرض کنید μ و ν دو اندازه‌ی σـ متناهی روی (X, Σ) باشند به طوری که $\nu \ll \mu$. در این صورت تابع اندازه‌پذیر $f : X \to [0, \infty)$ موجود است که $d\nu = fd\mu$؛ یعنی*

$$\nu(E) = \int_E fd\mu \qquad \forall E \in \Sigma \qquad (۲۷)$$

و این f تقریباً یکتا است؛ به این معنا که اگر g تابع دیگری با خواص فوق باشد، آنگاه $f = g \ a.e.$.

۵.۳ اندازه‌ی علامت‌دار و اندازه‌ی مختلط

در بسیاری از مواقع، وقتی ترکیب خطی مقادیر یک تابع را حساب می‌کنیم، ضرایب می‌توانند منفی یا حتیٰ مختلط باشند، لذا لازم است که مفهوم اندازه را به اندازه‌های علامت‌دار یا حتیٰ مختلط‌مقدار تعمیم داد.

تعریف ۶. فرض کنید (X, Σ) یک فضا همراه با یک σـ جبر باشد. در این صورت

(آ) $\mu : \Sigma \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ را یک اندازه‌ی علامت‌دار می‌نامیم، هرگاه $\mu(\emptyset) = 0$ و μ دارای خاصیت σـ جمع‌پذیری باشد. (رجوع شود به تعریف ۲)

(ب) $\mu : \Sigma \to \mathbb{C}$ را یک اندازه‌ی مختلط می‌نامیم، هرگاه $\mu(\emptyset) = 0$ و μ دارای خاصیت σـ جمع‌پذیری باشد.

تذکر. در قسمت σـ جمع‌پذیری اندازه‌های علامت‌دار و مختلط، معادله‌ی (۷) به ما می‌گوید جمع سمت راست، همگرایی مطلق است. لذا اندازه‌های علامت‌دار، تنها قادرند حداکثر یکی از مقادیر ∞ و $-\infty$ را اختیار کنند.

تعریف علامت‌دار و مختلط‌مقدار از اندازه‌ها به ما کمک می‌کند تا اندازه‌ها را با هم جمع و تفریق کنیم و فضای اندازه‌ها تبدیل به یک فضای برداری شود. همچنین انتگرال‌گیری در این فضای برداری خاصیت خطی داشته باشد. یعنی اعضا در رابطه‌ی

$$\int_X fd(\mu_1 + c\mu_2) = \int_X fd\mu_1 + c\int_X fd\mu_2 \qquad (۲۸)$$

صدق کنند. البته تعریف انتگرال برای اندازه‌های علامت‌دار و مختلط دارای ریزه‌کاری‌هایی است که در این جا به قسمتی از آن اشاره می‌کنیم.

تعریف ۷. فرض کنید μ یک اندازه‌ی علامت‌دار یا مختلط روی (X, Σ) باشد و برای هر $E \in \Sigma$، $S(E)$ مجموعه‌ی تمام دنباله‌های حداکثر شمارا از اعضای Σ مانند $(E_n)_n$ باشد که E_n ها دو به دو مجزا باشند و $\bigcup_n E_n = E$. در این صورت اندازه‌ی تغییرات μ یا قدر مطلق μ را به شکل

$$|\mu|(E) = \sup\left\{\sum_n |E_n| \mid (E_n)_n \in S(E)\right\} \qquad (۲۹)$$

تعریف می‌کنیم و تغییرات کل μ را برابر با $\|\mu\| = |\mu|(X)$ می‌گیریم.

می‌توان نشان داد که $|\mu|$ یک اندازه است که برای هر $E \in \Sigma$، $|\mu(E)| \leq |\mu|(E)$. همچنین اگر μ یک اندازه‌ی مختلط باشد $\|\mu\| < \infty$. $|\mu|$ به ما کمک می‌کند تا انتگرال‌پذیری یک تابع را

[10] Radon-Nikodym theorem

تعریف کنیم. تابع اندازه‌پذیر f را μـ انتگرال‌پذیر می‌گوییم هرگاه $|\mu|$ـ انتگرال‌پذیر باشد.

تذکر. اگر μ یک اندازه علامت‌دار یا مختلط باشد و A یک مجموعه‌ی اندازه‌پذیر باشد که $\mu(A)=0$ ، این به معنای اندازه‌صفر بودن A (ناچیز بودن A) نیست. زیرا ممکن است A از دو قسمت تشکیل شده باشد که اندازه‌ی یک قسمت مثبت و اندازه‌ی قسمت دیگر منفی باشد و جمع آنها صفر شود. لذا A را μـ اندازه‌صفر می‌نامیم هرگاه برای هر مجموعه‌ی اندازه‌پذیر $B\subseteq A$، $\mu(B)=0$ یا به طور معادل $|\mu|(A)=0$.

اما برای تعریف انتگرال روی اندازه‌های حقیقی‌مقدار، نیاز به قضیه‌ی زیر است.

قضیه ۹ (تجزیه‌ی هان‌ـ‌ژردان[11]). *فرض کنید μ یک اندازه‌ی علامت‌دار روی (X,Σ) باشد. در این صورت اندازه‌های یکتای μ^+ و μ^- وجود دارند که $\mu=\mu^+-\mu^-$ و μ^+ و μ^- نسبت به هم تکینه هستند؛ یعنی مجموعه‌های اندازه‌پذیر P و N موجود باشند که $X=P\cup N$ و $P\cap N=\emptyset$ و P یک مجموعه‌ی μ^-ـ اندازه‌صفر و N یک مجموعه‌ی μ^+ـ اندازه‌صفر باشد.*

در قضیه‌ی قبل واضح است که $|\mu|=\mu^++\mu^-$. حال با استفاده از قضیه ۹ می‌توان انتگرال را برای اندازه‌های علامت‌دار تعریف کرد. درواقع ایده‌ی اصلی تعریف استفاده از رابطه‌ی مورد انتظار (۲۸) برای اندازه‌ها است. اگر f یک تابع μـ انتگرال‌پذیر باشد، انتگرال f را به شکل

$$\int_X f d\mu=\int_X f d\mu^+-\int_X f d\mu^- \qquad (۳۰)$$

تعریف می‌کنیم. همچنین اگر μ یک اندازه‌ی مختلط باشد، μ را می‌توان به طور یکتا به شکل $\mu=\mu_1+i\mu_2$ نوشت که μ_1 و μ_2 اندازه‌های علامت‌دار هستند. در این صورت برای تابع μـ انتگرال‌پذیر f، انتگرال f را می‌توان به شکل

$$\int_X f d\mu=\int_X f d\mu_1+i\int_X f d\mu_2 \qquad (۳۱)$$

تعریف کرد. انتگرال برای اندازه‌های علامت‌دار و مختلط دارای خواص خوب مورد انتظار مانند خطی بودن نسبت به توابع و صحت رابطه‌ی (۲۸) است. برای اطلاعات بیشتر از خواص انتگرال به [۷] مراجعه کنید.

اندازه‌های علامت‌دار و مختلط در بسیاری از قضایای مهمی که در قبل ذکر شدند، صدق می‌کنند؛ در قضیه‌ی همگرایی تسلطی (قضیه ۵) و قضیه‌ی فوبینی (قضیه ۷) می‌توان اندازه‌ها را علامت‌دار یا مختلط در نظر گرفت. همچنین در صورت قضیه‌ی رادون‌ـ نیکدیم (قضیه ۸) نیز می‌توان ν را مختلط در نظر گرفت. از طرفی می‌توان نشان داد برای دو اندازه‌ی مختلط μ و ν که در رابطه‌ی $\nu=f\mu$ صدق می‌کنند، رابطه‌ی

$$|d\nu|=|f||d\mu| \qquad (۳۲)$$

برقرار است. علاوه بر این ها برای توابع مختلط می‌دانیم $\mu\ll|\mu|$، در نتیجه با استفاده از قضیه‌ی رادون‌ـ نیکدیم و رابطه‌ی (۳۲) می‌توان نتیجه گرفت که تابع $\theta:X\to\mathbb{R}$ موجود است که $d\mu=e^{i\theta}|d\mu|$ که از این معادله می‌توان به عنوان راه حل جایگزینی برای تعریف انتگرال برای اندازه‌های مختلط استفاده کرد.

۶.۳ اندازه‌ی منظم

فرض کنید X یک فضای توپولوژیک هاوسدرف و موضعاً فشرده باشد و $\mathscr{B}$ σـ جبر برل آن باشد.

تعریف ۸. اندازه‌ی برل μ را روی $(X,\mathscr{B})$ منظم می‌گوییم هرگاه

۱. برای هر مجموعه‌ی فشرده K، $\mu(K)<\infty$

۲. برای هر مجموعه‌ی برل E،

$$\mu(E)=\inf\{\mu(U)\mid E\subseteq U,\ U \text{ باز}\} \qquad (۳۳)$$

۳. برای هر مجموعه‌ی برل E که $\mu(E)<\infty$،

$$\mu(E)=\sup\{\mu(K)\mid K\subseteq E,\ K \text{ فشرده}\} \qquad (۳۴)$$

اگر μ یک اندازه‌ی علامت‌دار یا مختلط باشد، آن را منظم می‌نامیم هرگاه $|\mu|$ منظم باشد.

[11] Hahn-Jordan decomposition theorem

در اینجا بررسی فضای $L^p(X,\mu)$ برای اندازه‌های برل، خصوصاً اندازه‌های منظم خالی از لطف نیست. توپولوژی روی فضای L^p با نرم $\|\ \|_p$ تعریف می‌شود. (تعریف ۴) همچنین برای $p=\infty$، $L^\infty(X)$ فضای توابع کران‌دار با نرم

$$\|f\|_\infty = \sup\{f(x) \mid x \in X\} \qquad (۳۵)$$

است که توپولوژی آن همان توپولوژی همگرایی یکنواخت است. اگر $\|\mu\| < \infty$ (تعریف ۷) آنگاه $L^q \subseteq L^p$ برای $1 \le p \le q \le \infty$ و توپولوژی L^q ظریفتر از توپولوژی L^p خواهد بود. در نتیجه

$$C_0(X,\mathbb{C}) \subseteq L^\infty(X) \subseteq L^p_\mu(X). \qquad (۳۶)$$

اگر μ یک اندازه‌ی منظم باشد، در این صورت $C_c(X,\mathbb{C})$ یک زیرمجموعه‌ی چگال L^p برای هر $1 \le p < \infty$ است.

از طرفی دیگر توابع مشخصه‌ی مجموعه‌های برل را می‌توان با توابع پیوسته به صورت نقطه به نقطه تقریب زد. برای حالت خاص $p=1$ می‌توان از توضیحات فوق استفاده کرد و قضیه‌ی زیر را نتیجه گرفت.

قضیه ۱۰. *فرض کنید X یک فضای توپولوژیک موضعاً فشرده و هاوسدرف باشد.*

(آ) *فرض کنید مجموعه‌ی $A \subseteq C_0(X,\mathbb{C})$ با نرم $\|\ \|_\infty$ در $C_0(X,\mathbb{C})$ چگال باشد. همچنین فرض کنید μ_1 و μ_2 دو اندازه‌ی برل مختلط روی X باشند به طوری که*

$$\int_X f d\mu_1 = \int_X f d\mu_2 \qquad \forall f \in A \qquad (۳۷)$$

در این صورت $\mu_1 = \mu_2$.

(ب) *فرض کنید μ_1 و μ_2 دو اندازه‌ی منظم روی X باشند به طوری که*

$$\int_X f d\mu_1 = \int_X f d\mu_2 \qquad \forall f \in C_c(X,\mathbb{C}) \qquad (۳۸)$$

در این صورت $\mu_1 = \mu_2$.

تابع $\psi : \mathbb{C}(X,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ را مثبت می‌گوییم هرگاه برای هر تابع $f \ge 0$، $\psi(f) \ge 0$.

قضیه ۱۱ (قضیه‌ی نمایش ریس_مارکف_کاکوتانی[12]). *فرض کنید $T : C_c(X,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ یک تابع خطی باشد. در این صورت*

(آ) *اگر T مثبت باشد، آنگاه اندازه‌ی منظم یکتای μ وجود دارد که*

$$T(f) = \int_X f d\mu\,, \qquad \forall f \in C_c(X,\mathbb{C}) \qquad (۳۹)$$

(ب) *اگر $\|T\| < \infty$، آنگاه اندازه‌ی مختلط منظم یکتای μ وجود دارد که*

$$T(f) = \int_X f d\mu\,, \qquad \forall f \in C_c(X,\mathbb{C}) \qquad (۴۰)$$

۴ گروه‌های آبلی موضعاً فشرده

یک گروه توپولوژیک گروهی است مانند G با یک ساختار توپولوژیک هاوسدرف که در آن تابع ضرب $(x,y) \to xy$ و تابع وارون $x \to x^{-1}$ پیوسته باشند. در این نوشته مجال پرداختن به گروه‌های توپولوژیک نیست و صرفاً به خواصی از گروه‌های توپولوژیک آبلی موضعاً فشرده پرداخته می‌شود. برای اطلاع بیشتر از خواص گروه‌های توپولوژیک به [۳] مراجعه شود.

۱.۴ اندازه‌ی هار

یکی از ویژگی‌هایی که اندازه‌ی لبگ روی $\mathbb{R}^n$ دارد این است که تحت انتقال ناوردا است. حال این سؤال پیش می‌آید که آیا می‌توان مشابه این حرف را به طور کلی برای گروه‌ها زد؟ جواب برای گروه‌های موضعاً فشرده مثبت است. برای هر $y \in G$ فرض کنید $R_y(x) = xy$ و $L_y(x) = yx$ به ترتیب انتقال از چپ و انتقال از راست تحت y باشند و $\mathrm{inv}\,(x) = x^{-1}$ تابع وارون باشد. با توجه به تعریف ۳ می‌خواهیم اندازه‌ی برل ناصفر μ روی G را طوری پیدا کنیم که تحت تمامی این عملگرها ناوردا باشد.

[12]Riesz-Markov-Kakutani representation theorem

قضیه ۱۲ (هار[۱۳]). *اگر G گروه موضعاً فشرده باشد، آنگاه اندازه‌ی منظم (تعریف ۸) غیر صفر μ موجود است که ناوردا تحت انتقال راست باشد. یعنی برای هر $y \in G$، $\left(R_y\right)_* \mu = \mu$. در ضمن این μ با تقریب ضریب ثابت ناوردا است. یعنی اگر ν اندازه‌ی دیگری باشد که خواص فوق را دارا باشد، آنگاه $\nu = c\mu$ که c ضریبی ثابت است. همچنین $\mu(G) < \infty$ اگر و فقط اگر G فشرده باشد.*

به اندازه‌ی تعریف‌شده در قضیه‌ی بالا اندازه‌ی هار[۱۴] می‌گویند. در قضیه‌ی بالا اندازه‌ی هار برای انتقال راست تعریف شد، که متأسفانه لزوماً تحت انتقال چپ ناوردا نیست. اما اگر G آبلی باشد، انتقال چپ و راست یک معنا را می‌دهند و همچنین این اندازه تحت وارون گرفتن نیز ناوردا می‌ماند.

یکی از راه‌هایی که می‌توان قضیه‌ی هار را ثابت کرد این است که تابع خطی مثبتی مانند $T : C_c(G, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ بسازیم که تحت انتقال راست ناوردا باشد. در این صورت طبق قضیه‌ی نمایش ریس‌ـ مارکف‌ـ کاکوتانی (قضیه‌ی ۱۱) می‌توان یک اندازه‌ی هار به T نسبت داد. در قضیه‌ی ۲۲ از این روش استفاده شده است.

اگر G σـ همبند باشد (یعنی حداکثر شمارا مؤلفه‌ی همبندی داشته باشد) اندازه‌ی هار آن σـ متناهی خواهد بود. برای اطلاعات بیشتر از خواص اندازه‌ی هار به [۱] مراجعه کنید.

تعریف ۹. اگر X یک فضای متریک باشد، در این صورت تابع $f : G \to X$ را پیوسته‌ی یکنواخت می‌گوییم هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ همسایگی V از عضو خنثای G موجود باشد که $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ هرگاه $xy^{-1} \in V$.

قضیه ۱۳. *فرض کنید $f \in L^p(G)$. اگر $f_x(y) = f(yx^{-1})$، در این صورت تابع*

$$x \to f_x \qquad (G \to L^p(G)) \tag{۴۱}$$

پیوسته‌ی یکنواخت است.

۲.۴ گروه دوگان

در این بخش فرض کنید G یک گروه آبلی موضعاً فشرده باشد و عمل آن را با $+$ نشان می‌دهیم. همچنین گروه دایره‌ی واحد S^1 را به عنوان زیرگروهی از $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ با عمل ضرب در نظر بگیرید.

تعریف ۱۰. یک مشخصه‌ی G یک همریختی $\xi : G \to S^1$ است. اگر $\widehat{G}$ را برابر با همه‌ی مشخصه‌های پیوسته G در نظر بگیریم، $\widehat{G}$ را می‌توان با عمل $(\xi_1 + \xi_2)(x) = \xi_1(x)\xi_2(x)$ تبدیل به گروهی آبلی کرد. به $\widehat{G}$ گروه دوگان G می‌گویند.

توپولوژی روی $\widehat{G}$ را توپولوژی فشرده‌ـ باز در نظر می‌گیریم. در این صورت می‌توان ثابت کرد که $\widehat{G}$ با توپولوژی فشرده‌ـ باز یک گروه آبلی موضعاً فشرده است.

برای مثال مشخصه‌های پیوسته روی $\mathbb{Z}$ توابعی به شکل $\xi(n) = e^{2\pi i n\xi}$ هستند. پس $\widehat{\mathbb{Z}} \cong S^1$. همچنین توابع مشخصه‌ی S^1 به شکل $\xi(x) = x^n$ هستند. در نتیجه $\widehat{S^1} \cong \mathbb{Z}$. در جدول ۱ گروه دوگان برای نمونه‌ای از گروه‌ها آمده است که با چهار نوع تبدیل فوریه‌ی ذکرشده در مقدمه مربوطند.

G	$\widehat{G}$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
S^1	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}$	S^1
$\mathbb{Z}/m$	$\mathbb{Z}/m$

جدول ۱: گروه دوگان

حقیقت آن است که اگر $f : G \to \mathbb{C}$، تبدیل فوریه‌ی آن $\hat{f} : \widehat{G} \to \mathbb{C}$ می‌باشد. برای همین جدول ۱ گویای انواع تبدیل فوریه است.

حال به ادامه‌ی بحث گروه‌های دوگان می‌پردازیم. تابع $(.\,,.)$: $G \times \widehat{G} \to S^1$ را به شکل

$$(x, \xi) = \xi(x) \tag{۴۲}$$

[13] Haar theorem
[14] Haar measure

تعریف می‌کنیم. این تابع دارای خواص زیر است:

$$(x+x',\xi)=(x,\xi)(x',\xi) \quad (x,\xi+\xi')=(x,\xi)(x,\xi')$$
$$(x,0)=(0,\xi)=1 \quad (-x,\xi)=(x,-\xi)=\overline{(x,\xi)}=(x,\xi)^{-1} \tag{۴۳}$$

می‌توان ثابت کرد که تابع $(.,.)$ پیوسته است. این تابع شهود خوبی از دوگانگی به ما می‌دهد. برای هر $x\in G$، تابع $\hat{x}(\xi)=(x,\xi)$ یک مشخصه برای $\widehat{G}$ می‌باشد. در نتیجه گروه G به طور طبیعی در $\widehat{\widehat{G}}$ می‌نشیند. حال این سؤال پیش می‌آید که آیا $\widehat{\widehat{G}}=G$؟

قضیه ۱۴ (دوگانگی پونتریاگین[15]). *اگر G یک گروه آبلی موضعاً فشرده باشد، آنگاه نگاشت طبیعی $\hat{}\ :\ G\to\widehat{\widehat{G}}$ یکریختی و همسانریختی است. در نتیجه به طور طبیعی $G\cong\widehat{\widehat{G}}$*

ناگفته نماند که بسیاری ادعاها از قضایای این بخش از خواص تبدیل فوریه نتیجه می‌شود. لیکن چون مجال پرداختن به آن نیست به طور کلی در این نوشته آورده شده است.

۳.۴ پیچش

در این قسمت فرض کنید G یک گروه آبلی موضعاً فشرده و σـهمبند باشد و m اندازه‌ی هار آن باشد. همچنین در این قسمت $dm(x)$ را با dx نمایش می‌دهیم

تعریف ۱۱ (پیچش[16]). فرض کنید $f,g:G\to\mathbb{C}$ دو تابع باشند. در این صورت پیچش f و g را به شکل

$$f*g(x)=\int_G f(x-y)g(y)dy \tag{۴۴}$$

برای xهایی که

$$\int_G\left|f(x-y)g(y)\right|dy<\infty \tag{۴۵}$$

تعریف می‌کنیم.

به راحتی می‌توان چک کرد که پیچش دو تابع در صورت وجود، دارای خاصیت جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و پخشی در جمع می‌باشد. قضیه‌ی زیر به قسمتی از خواص پیچش اشاره می‌کند.

قضیه ۱۵.

(آ) *اگر $f,g\in L^1(G)$، در این صورت (۴۵) برای تقریباً همه‌ی xها صادق است و*

$$\|f*g\|_1\le\|f\|_1\|g\|_1 \tag{۴۶}$$

در نتیجه $L^1(G)$ با اعمال $+$ و $*$ و با نرم $\|\ \|_1$ یک جبر باناخ است.

(ب) *اگر $f\in L^1(G)$ و $g\in L^\infty(G)$ در این صورت $f*g$ کراندار و پیوسته‌ی یکنواخت است.*

(ج) *اگر $f,g\in C_c(X,\mathbb{C})$، در این صورت $f*g\in C_c(X,\mathbb{C})$.*

(د) *اگر $1<p<\infty$ و $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$، آنگاه اگر $f\in L^p(G)$ و $g\in L^q(G)$ داریم $f*g\in C_0(G,\mathbb{C})$.*

اثبات. برای قسمت (آ) داریم

$$\begin{aligned}\int_G\int_G\left|f(x-y)g(y)\right|dydx &= \int_G\left(\int_G\left|f(x-y)\right|dx\right)\left|g(y)\right|dy\\ &= \int_G\|f\|_1\left|g(y)\right|dy=\|f\|_1\|g\|_1<\infty\end{aligned} \tag{۴۷}$$

پس طبق قضیه‌ی ۲۱ (آ)

$$\int_G\left|f(x-y)g(y)\right|dy<\infty \quad a.e.\ x \tag{۴۸}$$

و

$$\|f*g\|_1\le\int_G\int_G\left|f(x-y)g(y)\right|dydx=\|f\|_1\|g\|_1\,. \tag{۴۹}$$

برای (ب) واضح است که

$$|f*g|\le\int_G\left|f(x-y)g(y)\right|dy\le\|f\|_1\|g\|_\infty \tag{۵۰}$$

[15] Pontryagin duality theorem
[16] convolution

پس $f * g$ کران‌دار است. اما برای پیوستگی یکنواخت داریم

$$\begin{aligned}\big|f*g(x) - f*g(z)\big| &\le \int_G \big|f(x-y) - f(x-z)\big|\big|g(y)\big|\,dy \\ &\le \int_G \big|f(x+y) - f(z+y)\big|\,dy\ \|g\|_\infty \\ &= \|f_{-x} - f_{-z}\|_1 \|g\|_\infty \quad (۵۱)\end{aligned}$$

در نتیجه طبق قضیه‌ی ۱۳ عبارت سمت راست را می‌توان به اندازه‌ی دلخواه کوچک کرد.

در قسمت (ج) اولا از قسمت (ب) نتیجه می‌شود که $f * g$ موجود و پیوسته است. حال اگر محمل f برابر با A و محمل g برابر با B باشد، در این صورت

(۵۲)

$$f*g(x) = \int_G f(x-y)g(y)dy = \int_B f(x-y)g(y)dy$$

از طرفی دیگر اگر برای هر $y \in B$، $x - y \notin A$ آنگاه انتگرال سمت راست صفر است. یعنی محمل $f * g$ زیرمجموعه‌ی $A + B$ است که به راحتی می‌توان دید که فشرده است.

برای اثبات قسمت (د) ابتدا در نظر بگیرید که $C_c(X, \mathbb{C})$ در $L^p(G)$ و $L^q(G)$ چگال است. لذا می‌توان دنباله‌های $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ از اعضای $C_c(X, \mathbb{C})$ را طوری در نظر گرفت که $\|f_n - f\|_p \to 0$ و $\|g_n - g\|_q \to 0$. در نتیجه طبق نامساوی هلدر (قضیه‌ی ۳)

$$\begin{aligned}\big|f_n*g_n(x) - f*g(x)\big| &= \big|(f_n - f)*(g_n - g)(x)\big| \\ &+ \big|(f_n - f)*g(x)\big| + \big|f*(g_n - g)(x)\big| \\ &\le \int_G \big|f_n(x-y) - f(x-y)\big|\big|g_n(y) - g(y)\big|\,dy \\ &+ \int_G \big|f_n(x-y) - f(x)\big|\big|g(y)\big|\,dy \\ &+ \int_G \big|f(x-y)\big|\big|g_n(y) - g(y)\big|\,dy \\ &\le \|f_n - f\|_p\|g_n - g\|_q + \|f_n - f\|_p\|g\|_q + \|f\|_p\|g_n - g\|_q\end{aligned}$$

(۵۳)

معادله‌ی بالا به ما می‌گوید که $\|f_n * g_n - f * g\|_\infty \to 0$. در نتیجه چون $f_n * g_n \in C_c(X, \mathbb{C})$ (قسمت (ج)) پس $f * g \in C_0(X, \mathbb{C})$. □

می‌توان تعریف پیچش را به اندازه‌های برل روی G تعمیم داد. فرض کنید $M(G)$ مجموعه‌ی همه‌ی اندازه‌های مختلط برل روی G باشد. دقت کنید که برای اندازه‌های مختلط $\|\mu\| < \infty$.

تعریف ۱۲. فرض کنید $\mu, \nu \in M(G)$، در این صورت اندازه‌ی مختلط $\mu * \nu$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mu*\nu(E) = \mu\times\nu\{(x,y) \in G\times G \mid x + y \in E\} \quad (۵۴)$$

به راحتی می‌توان نشان داد که $\mu * \nu \in M(G)$ و رابطه‌ی

$$\int_G f d(\mu*\nu) = \int_G\int_G f(x+y)d\mu(x)d\nu(y) \qquad (۵۵)$$

برقرار است. همچنین خواص خوبی مانند شرکت‌پذیری، جابه‌جایی و پخشی در جمع برای عمل پیچش روی اندازه‌ها صادق است و در نتیجه $M(G)$ با عمل جمع و پیچش یک $\mathbb{C}$ـ جبر است. به علاوه می‌توان اثبات کرد که

$$\|\mu*\nu\| \le \|\mu\|\|\nu\| \qquad (۵۶)$$

در نتیجه

قضیه ۱۶. *$M(G)$ با عمل جمع و پیچش و نرم تغییرات کلی یک جبر باناخ است.*

همچنین این تعریف تعمیمی از پیچش روی توابع است. زیرا اگر $f \in L^1(G)$ آنگاه $f dx \in M(G)$ و رابطه‌ی

$$(fdx)*(gdx) = (f*g)dx \qquad (۵۷)$$

برقرار است.

۵ تبدیل فوریه

در این جا به تبدیل تعریف فوریه می‌پردازیم. در این قسمت فرض کنید G یک گروه آبلی موضعاً فشرده و σـ همبند باشد و اندازه‌ی هار آن را با $dm(x) = dx$ نمایش می‌دهیم. همچنین $\widehat{G}$ را گروه دوگان G می‌گیریم و اندازه‌ی هار آن را با $dm'(\xi) = d\xi$ نمایش می‌دهیم. فعلا اندازه‌ی هار دو گروه را مستقل از هم انتخاب می‌کنیم. در حالی که در بخش ۲.۵ اندازه‌ی هار $\widehat{G}$ را برحسب اندازه‌ی هار G تعیین می‌کنیم.

تعریف ۱۳ (تبدیل فوریه)**.** فرض کنید $f \in L^1(G)$، در این صورت تبدیل فوریه f، تابع $\hat{f} : \widehat{G} \to \mathbb{C}$ است که به شکل

$$\hat{f}(\xi) = \int_G (-x,\xi)f(x)dx \tag{۵۸}$$

تعریف می‌شود. تبدیل فوریه را با $\mathscr{F}$ و برد آن را با $A(\widehat{G})$ نشان می‌دهیم.

در قسمت‌های ۲.۵ و ۴.۵ تعمیم‌هایی از تبدیل فوریه ارائه خواهیم داد.

۱.۵ خواص اولیه‌ی تبدیل فوریه

در این قسمت به ارائه‌ی خواص اولیه‌ی تبدیل فوریه می‌پردازیم. اولاً واضح است که $\mathscr{F}$ یک تابع خطی است. خواص دیگر آن در زیر آمده است.

قضیه ۱۷.

(آ) $\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}$

(ب) *اگر* $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$، *در این صورت* $\mathscr{F}(\tilde{f}) = \overline{\mathscr{F}f}$.

(ج) $\widehat{f_{x_0}}(\xi) = (-x_0,\xi)\hat{f}(\xi)$

در نتیجه $A(\widehat{G})$ *یک* $\mathbb{C}$*ـ جبر خود الحاق است و* F *یک همریختی از جبر* $L^1(G)$ *(عمل + و ∗) به* $A(\widehat{G})$ *است.*

اثبات. (آ):

$$\begin{aligned}
\widehat{f*g}(\xi) &= \int_G (-x,\xi)f*g(x)dx \\
&= \int_G\int_G (-x,\xi)f(x-y)g(y)dydx \\
&= \int_G \left(\int_G (-x,\xi)f(x-y)dx\right) g(y)dy \\
&= \int_G \left(\int_G (-x-y,\xi)f(x)dx\right) g(y)dy \\
&= \left(\int_G (-x,\xi)f(x)dx\right)\left(\int_G (-y,\xi)g(y)dy\right) \\
&= \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)
\end{aligned} \tag{۵۹}$$

(ب): فرض کنید $g = \tilde{f}$. در این صورت

$$\hat{g}(\xi) = \int_G \overline{(x,\xi)f(-x)}dx = \overline{\left(\int_G (-x,\xi)f(x)dx\right)} = \overline{\hat{f}(\xi)}. \tag{۶۰}$$

(ج):

$$\begin{aligned}
\widehat{f_{x_0}}(\xi) &= \int_G (-x,\xi)f(x-x_0)dx \\
&= \int_G (-x-x_0,\xi)f(x)dx \\
&= (-x_0,\xi)\int_G (-x,\xi)f(x)dx \\
&= (-x_0,\xi)\hat{f}(\xi)
\end{aligned} \tag{۶۱}$$

□

اما در مورد ساختار $A(\widehat{G})$ قضیه‌ی زیر تعیین‌کننده است.

قضیه ۱۸.

(آ) $A(\widehat{G}) \subseteq C_0(\widehat{G},\mathbb{C})$.

(ب) $A(\widehat{G})$ *یک جبر خودالحاق است که هیچ جا صفر نمی‌شود و نقاط* $\widehat{G}$ *را جدا می‌کند. در نتیجه طبق قضیه‌ی استون‌ـ وایرشتراس (قضیه‌ی ۱) در* $C_0(\widehat{G},\mathbb{C})$ *چگال است.*

(ج) *برای هر* $f \in L^1(G)$، $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. *در نتیجه* $\mathscr{F} : L^1(G) \to C_0(\widehat{G},\mathbb{C})$ *یک تابع پیوسته است.*

اثبات. (آ): اگر $f \in L^1(G)$ و $\xi_n \to \xi$ در این صورت $(-x,\xi_n)f(x) \to (-x,\xi)f(x)$ به صورت نقطه به نقطه و همه‌ی این توابع تحت تسلط $|f|$ هستند. پس طبق قضیه‌ی همگرایی تسلطی (قضیه‌ی ۵) $\hat{f}(\xi_n) \to \hat{f}(\xi)$. پس $\hat{f}$ پیوسته است. اما اثبات این که $\hat{f}$ در بی‌نهایت صفر می‌شود، نیازمند مراجعه به نظریه‌ی گلفاند[17] است که در داخل این نوشته نمی‌گنجد. برای کسب اطلاع از نظریه‌ی گلفاند و ادامه‌ی اثبات به [۵] و [۸] مراجعه شود.

(ب): طبق قضیه‌ی ۱۷ $A(\widehat{G})$ یک جبر خودالحاق است. فرض کنید $K \subseteq G$ یک همسایگی فشرده از همانی باشد. در

[17] Gelfand theory

نتیجه $0 < m(K) < \infty$. برای $\xi_0 \in \widehat{G}$ اگر قرار دهیم $f(x) = \xi_0(x)1_K(x)$ در این صورت $f \in L^1(G)$ و

$$\hat{f}(\xi_0) = \int_G (-x, \xi_0)(x, \xi_0)1_K(x)dx = m(K) > 0 \quad (۶۲)$$

در نتیجه $A(\widehat{G})$ همه جا صفر نمی‌شود. همچنین اگر $\xi_1 \neq \xi_2$ نقطه‌ای مانند x_0 وجود دارد که $\xi_1(x_0) \neq \xi_2(x_0)$ و این نابرابری به خاطر پیوستگی در یک همسایگی از x_0 برقرار است. اگر V را این همسایگی بنامیم و قرار دهیم $f(x) = (\xi_1(x) - \xi_2(x))1_V(x)$، در این صورت نیز $f \in L^1(G)$ و

$$\hat{f}(\xi_1) - \hat{f}(\xi_2) = \int_G \left|\xi_1(x) - \xi_2(x)\right|^2 1_V(x)dx > 0 \quad (۶۳)$$

(به خاطر پیوستگی). در نتیجه $A(\widehat{G})$ نقاط $\widehat{G}$ را جدا می‌کند.

(ج): داریم

(۶۴)

$$|\hat{f}(\xi)| = \left|\int_G (-x, \xi)f(x)dx\right| \leq \int_G |f(x)|dx = \|f\|_1$$

□

تا اینجا ثابت کردیم که تبدیل فوریه $\mathscr{F} : L^1(G) \to C_0(\widehat{G}, \mathbb{C})$ یک همریختی جبری و پیوسته است که تصویر آن در $C_0(\widehat{G}, \mathbb{C})$ چگال است. می‌توان ثابت کرد که این تبدیل یک‌به‌یک است. ولی شمایی از اثبات آن را در قسمت بعد ارائه می‌کنیم.

۲.۵ تبدیل وارون فوریه

در اینجا به تعریف تبدیل وارون فوریه می‌پردازیم. اما در اینجا برعکس قسمت قبل که تبدیل فوریه را روی توابع تعریف کردیم، وارون آن را روی اندازه‌ها تعریف می‌کنیم. دلیل اینکه این تبدیل را وارون فوریه می‌نامیم قضیه‌ی ۲۲ است که به آن اشاره می‌کنیم.

تعریف ۱۴ (تبدیل وارون فوریه[۱۸]). فرض کنید $\mu \in M(\widehat{G})$. در این صورت وارون تبدیل فوریه‌ی آن تابعی مانند $\tilde{\mu} : G \to \mathbb{C}$ است که به شکل

$$\tilde{\mu}(x) = \int_{\widehat{G}} (x, \xi)d\mu(\xi) \quad (۶۵)$$

تعریف می‌شود. تبدیل وارون فوریه را با $\mathscr{F}^{-1}$ و برد آن را با $B(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف تبدیل وارون فوریه بسیار شبیه تعریف تبدیل فوریه است. پس به طور مشابه می‌توان دید که مشابه تمام خواص اشاره‌شده برای تبدیل فوریه (قضایای ۱۷ و ۱۸) در اینجا برقرار است. پس به طور خلاصه

قضیه ۱۹. *تبدیل وارون فوریه* $\mathscr{F}^{-1} : M(\widehat{G}) \to C_0(G, \mathbb{C})$ *یک* $\mathbb{C}$*ـ همریختی پیوسته است و برد آن چگال است.*

در اینجا ثابت خواهیم کرد که تبدیل وارون فوریه یک‌به‌یک است. اما نکته‌ی مهمی که وجود دارد این است که می‌توان از دوگانگی G و $\widehat{G}$ استفاده کرد و به طور مشابه ثابت کرد که تبدیل فوریه یک‌به‌یک است.

قضیه ۲۰. *تبدیل وارون فوریه یک‌به‌یک است.*

اثبات. چون $\mathscr{F}^{-1}$ خطی است، کافی است ثابت کنیم هسته‌ی آن صفر است. فرض کنید $\mathscr{F}^{-1}(\mu) = 0$. در این صورت برای هر $f \in L^1(G)$ داریم

$$\int_{\widehat{G}} \hat{f}(\xi)d\mu(\xi) = \int_{\widehat{G}}\int_G (-x, \xi)f(x)dxd\mu(\xi) = \int_G \left(\int_{\widehat{G}} (-x, \xi)d\mu(\xi)\right) f(x)dx = \int_G \tilde{\mu}(-x)f(x)dx = 0$$

(۶۶)

اما از آن جا که $A(\widehat{G})$ در $C_0(\widehat{G}, \mathbb{C})$ چگال است، $\mu = 0$. (رجوع شود به قضیه‌ی ۱۰) □

چون تبدیل وارون فوریه یک‌به‌یک است، وارون دارد و تبدیل $(\mathscr{F}^{-1})^{-1} : B(G) \to M(\widehat{G})$ یک همریختی است. برای اینکه مشخص شود که چرا به $\mathscr{F}^{-1}$ تبدیل وارون فوریه می‌گوییم، باید به رابطه‌ی $(\mathscr{F}^{-1})^{-1}$ و $\mathscr{F}$ پی ببریم. قضیه‌ی وارون فوریه (قضیه‌ی ۲۲) به ما می‌گوید که این دو تبدیل روی $L^1(G) \cap B(G)$ یکی هستند. به این معنا که

$$(\mathscr{F}^{-1})^{-1}(f) = \hat{f}d\xi \qquad f \in L^1(G) \cap B(G) \quad (۶۷)$$

[18] inverse Fourier transform

در نتیجه می‌توان تابع $(\mathscr{F}^{-1})^{-1}$ را به نحوی تعمیم تبدیل فوریه در نظر گرفت. با این تعریف تبدیل فوریه تابع f به این مفهوم است که این تابع چگونه ترکیب خطی‌ای از توابع مشخصه است. با این تعریف از تبدیل فوریه، تبدیل فوریه توابع به شکل $e^{2\pi i x\xi}$ در تبدیل فوریه پیوسته معنا پیدا می‌کند.

در آخر این بخش به مشخص کردن اعضای $B(G)$ می‌پردازیم.

تعریف ۱۵. تابع $\phi : G \to \mathbb{C}$ را مثبت معین می‌نامیم هرگاه برای هر $x_1, ..., x_n \in G$ ماتریس $[\phi(x_i - x_j)]_{i,j}$ مثبت معین باشد. یعنی برای هر $c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$،

$$\sum_{i,j} c_i \bar{c}_j \phi(x_i - x_j) \geq 0. \tag{۶۸}$$

توابع مثبت معین خواص مهمی دارد، از جمله اینکه

$$\phi(-x) = \overline{\phi(x)}, \qquad \big|\phi(x)\big| \leq \phi(0). \tag{۶۹}$$

برای اطلاع بیشتر از خواص توابع مثبت معین به [۸] مراجعه کنید. اگر μ یک اندازه‌ی مثبت با $\|\mu\| < \infty$ روی $\widehat{G}$ باشد، در این صورت تابع

$$\phi(x) = \int_{\widehat{G}} (x, \xi) d\mu(\xi) = \tilde{\mu}(x) \tag{۷۰}$$

مثبت معین است. برای دیدن این مطلب توجه کنید که

$$\begin{aligned}
&\sum_{n,m} c_n \bar{c}_m \phi(x_n - x_m) \\
&\quad = \int_{\widehat{G}} \left(\sum_{m,n} c_n \bar{c}_m \xi(x_n) \overline{\xi(x_m)} \right) d\mu(\xi) \\
&\quad = \int_{\widehat{G}} \left| \sum_{n} c_n \xi(x_n) \right|^2 d\mu(\xi) \geq 0.
\end{aligned} \tag{۷۱}$$

اما قضیه‌ی زیر که به قضیه‌ی بوچنر[19] معروف است عکس مطلب بالا را نیز ادعا می‌کند.

قضیه ۲۱ (بوچنر). *تابع $\phi : G \to \mathbb{C}$ مثبت معین است اگر و فقط اگر اندازه‌ی مثبت $\mu \in M(\widehat{G})$ موجود باشد که $\phi = \mathscr{F}^{-1}(\mu)$.*

اثبات قضیه‌ی بالا نیازمند جزئیات بیشتری است که در این نوشته نمی‌گنجد. برای مشاهده‌ی اثبات به [۸] مراجعه شود. نتیجه مهم قضیه‌ی بالا این است که اعضای $B(G)$ به شکل ترکیب خطی‌ای از توابع مثبت معین هستند، زیرا هر اندازه‌ی مختلطی را می‌توان به صورت ترکیب خطی‌ای از اندازه‌های مثبت نوشت. (رجوع شود به قضیه‌ی ۹)

۳.۵ قضیه‌ی وارون فوریه

در بخش قبل توضیحاتی درباره قضیه‌ی وارون فوریه داده شد. در این قسمت می‌خواهیم به بیان دقیق صورت مسئله و اثبات آن بپردازیم. برای شروع کار ابتدا لازم است لمی را ثابت کنیم.

لم ۱.

(آ) *فرض کنید $f \in L^1(G)$ و $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$، در این صورت اگر $g = f * \tilde{f}$ آنگاه g مثبت معین است.*

(ب) *اگر $K \subseteq \widehat{G}$ فشرده باشد، در این صورت $g \in L^1(G)$ موجود است که $\hat{g}$ روی K اکیداً مثبت باشد و g مثبت معین باشد.*

اثبات. (آ): داریم

$$\begin{aligned}
&\sum_{m,n} c_n \bar{c}_m g(x_n - x_m) \\
&\quad = \sum_{m,n} c_n \bar{c}_m \int_G f(x_n - x_m - y) \overline{f(-x)} dy \\
&\quad = \int_G \sum_{m,n} c_n \bar{c}_m f(x_n - y) \overline{f(x_m - y)} dy \\
&\quad = \int_G \left| \sum_{m,n} c_n f(x_n - y) \right|^2 dy \geq 0
\end{aligned} \tag{۷۲}$$

(ب): برای هر $\xi \in K$ طبق قضیه‌ی ۲۹ (ب) می‌توان $u_\xi \in L^1(G)$ را طوری پیدا کرد که $\hat{u}_\xi(\xi) \neq 0$. به خاطر پیوستگی، $\hat{u}_\xi$ در یک همسایگی V_ξ از ξ ناصفر است. طبق فشردگی K می‌توان متناهی تا از آن‌ها یعنی $V_1, ..., V_n$ را طوری

[19] Bochner's theorem

انتخاب کرد که K را پوشش دهند. در این صورت اگر قرار دهیم $g = u_1 * \tilde{u}_1 + \ldots + u_n * \tilde{u}_n$ آنگاه

$$\hat{g} = |\hat{u}_1|^2 + \ldots + |\hat{u}_n|^2 \tag{۷۳}$$

در نتیجه $\hat{g}$ روی K اکیداً از صفر بزرگتر است. □

حال به بیان صورت قضیه‌ی وارون فوریه می‌پردازیم.

قضیه ۲۲ (قضیه‌ی وارون فوریه). *اگر $f \in L^1(G) \cap B(G)$ آنگاه $\hat{f} \in L^1(\widehat{G})$ و می‌توان اندازه‌های هار روی G و $\widehat{G}$ را طوری انتخاب کرد که برای هر $f \in L^1(G) \cap B(G)$، اگر $\mu = (\mathscr{F}^{-1})^{-1}(f)$، یعنی*

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} (x, \xi) d\mu(\xi) \tag{۷۴}$$

آنگاه

$$d\mu(\xi) = \hat{f}(\xi) d\xi \tag{۷۵}$$

اثبات. در این اثبات $(\mathscr{F}^{-1})^{-1}(f)$ را با μ_f و $L^1(G) \cap B(G)$ را با B^1 نشان می‌دهیم. اگر $f \in B^1$ و $h \in L^1(G)$، در این صورت

$$\begin{aligned}(h * f)(0) &= \int_G h(-x) f(x) dx \\ &= \int_G \int_{\widehat{G}} h(-x)(x, \xi) dx d\mu_f(\xi) = \int_{\widehat{G}} \hat{h}(\xi) d\mu_f(\xi)\end{aligned} \tag{۷۶}$$

در نتیجه اگر $g \in B^1$،

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{G}} \hat{h}(\xi) \hat{g}(\xi) d\mu_f(\xi) &= (h * g) * f\ (0) \\ &= (h * f) *\ g(0) = \int_{\widehat{G}} \hat{h}(\xi) \hat{f}(\xi) d\mu_g(\xi)\end{aligned} \tag{۷۷}$$

پس چون رابطه‌ی (۷۷) برای هر $h \in L^1(G)$ درست است و $A(\widehat{G})$ در $C_0(\widehat{G}, \mathbb{C})$ چگال است، داریم

$$\int_{\widehat{G}} \phi \hat{g} d\mu_f = \int_{\widehat{G}} \phi \hat{f} d\mu_g \qquad \forall \phi \in C_0(\widehat{G}, \mathbb{C}) \tag{۷۸}$$

حال تابع خطی $T : C_c(\widehat{G}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ را به این شکل تعریف می‌کنیم: فرض کنید $\psi \in C_c(\widehat{G}, \mathbb{C})$ و $\operatorname{supp} \psi \subseteq K$ که K فشرده است. در این صورت اگر $g \in B^1$ طوری باشد که $\hat{g}$ روی K اکیداً مثبت باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$T(\psi) = \int_{\widehat{G}} \frac{\psi}{\hat{g}} d\mu_g \tag{۷۹}$$

باید نشان دهیم T خوش‌تعریف است. اولا طبق لم ۱ (ب) چنین gای وجود دارد. ثانیا اگر $f \in B^1$ تابع دیگری باشد که خواص g را دارا باشد، طبق (۷۸) داریم

$$\int_{\widehat{G}} \frac{\psi}{\hat{f}\hat{g}} \hat{f} d\mu_g = \int_{\widehat{G}} \frac{\psi}{\hat{f}\hat{g}} \hat{g} d\mu_f \tag{۸۰}$$

پس (۷۹) خوش‌تعریف است. واضح است که T خطی است. همچنین طبق لم ۱ (ب) می‌توان در (۷۹) g را طوری انتخاب کرد که مثبت معین باشد. در نتیجه $\mu_g \geq 0$، پس اگر $\psi \geq 0$ آنگاه به وضوح $T(\psi) \geq 0$. پس T یک تابع خطی مثبت است. می‌خواهیم نشان دهیم T تحت انتقال ناوردا است. فرض کنید $f(x) = (-x, \xi_0) g(x)$. در این صورت به راحتی می‌توان دید که $\hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi + \xi_0)$ و $d\mu_f(\xi) = d\mu_g(\xi + \xi_0)$ (رجوع شود به قضیه‌ی ۲۹ (ج)) در این صورت اگر $\psi_0(\xi) = \psi(\xi - \xi_0)$، آنگاه

$$\begin{aligned}T(\psi_0) &= \int_{\widehat{G}} \frac{\psi(\xi - \xi_0)}{\hat{g}(\xi)} d\mu_g(\xi) \\ &= \int_{\widehat{G}} \frac{\psi(\xi)}{\hat{g}(\xi + \xi_0)} d\mu_g(\xi + \xi_0) \\ &= \int_{\widehat{G}} \frac{\psi(\xi)}{\hat{f}(\xi)} d\mu_f(\xi) = T(\psi)\end{aligned} \tag{۸۱}$$

پس T تحت انتقال راست ناوردا است. در نتیجه اندازه‌ی هار روی $\widehat{G}$ موجود است که

$$T(\psi) = \int_{\widehat{G}} \psi d\xi \qquad \forall \psi \in C_c(\widehat{G}, \mathbb{C}) \tag{۸۲}$$

(رجوع شود به قضایای ۱۱ و ۱۲) حال اگر $f \in B^1$، برای هر $\psi \in C_c(\widehat{G}, \mathbb{C})$ داریم

$$\int_{\widehat{G}} \psi \hat{f} d\xi = T(\psi \hat{f}) = \int_{\widehat{G}} \frac{\psi}{\hat{g}} \hat{f} d\mu_g = \int_{\widehat{G}} \psi d\mu_f \tag{۸۳}$$

پس چون رابطه‌ی (۸۳) برای هر $\psi \in C_c(\widehat{G}, \mathbb{C})$ درست است، پس روی هر زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی $\widehat{G}$، $\hat{f} d\xi = d\mu_f$. در نتیجه طبق (۳۲) روی زیرمجموعه‌های فشرده‌ی $\widehat{G}$ رابطه‌ی

$$|d\mu_f| = |\hat{f}| d\xi \tag{۸۴}$$

برقرار است. حال اگر K_n دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های فشرده‌ی $\widehat{G}$ باشند که به طور صعودی به $\widehat{G}$ همگرا است، آنگاه طبق قضیه‌ی همگرایی یکنوا (قضیه‌ی ۴) داریم

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{G}}|\hat{f}|d\xi &= \lim_{n\to\infty}\int_{\widehat{G}}1_{K_n}|\hat{f}|d\xi \\ &= \lim_{n\to\infty}|\mu_f|(K_n) = |\mu_f|(\widehat{G}) < \infty \quad (۸۵)\end{aligned}$$

در نتیجه $\hat{f}\in L^1(\widehat{G})$ و

$$d\mu_f = \hat{f}d\xi \quad (۸۶)$$

□

از قضیه‌ی وارون فوریه می‌توان این استفاده را کرد که اندازه‌ی هار $\widehat{G}$ را بر حسب اندازه‌ی هار G بهنجار کرد.

۴.۵ قضیه‌ی پلانچرل

در این قسمت می‌خواهیم تبدیل فوریه را به $L^2(G)$ تعمیم دهیم. درواقع قضیه‌ی زیر می‌گوید تبدیل فوریه را می‌توان به یک ایزومتری بین $L^2(G)$ و $L^2(\widehat{G})$ تعمیم داد.

قضیه ۲۳ (پلانچرل[20]). *برای هر $f\in L^1(G)\cap L^2(G)$، داریم*

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2 \quad (۸۷)$$

و تصویر $L^1(G)\cap L^2(G)$ تحت $\mathscr{F}$ در $L^2(\widehat{G})$ چگال است. در نتیجه $\mathscr{F}$ را می‌توان به یک ایزومتری بین $L^2(G)$ و $L^2(\widehat{G})$ تعمیم داد.

اثبات. فرض کنید $f\in L^1(G)\cap L^2(G)$. اگر $\tilde{f}(x)=\overline{f(-x)}$ و $g=f*\tilde{f}$، آنگاه طبق لم ۱ (آ) g مثبت معین است. پس طبق قضیه‌ی بوچنر $g\in B(G)$، در نتیجه طبق قضیه‌ی وارون فوریه

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{G}}|\hat{f}|^2d\xi &= \int_{\widehat{G}}\hat{g}d\xi = g(0) \\ &= \int_G f(x)\tilde{f}(-x)dx = \int_G |f|^2dx. \quad (۸۸)\end{aligned}$$

فرض کنید Φ تصویر $L^1(G)\cap L^2(G)$ باشد. برای اینکه ثابت کنیم Φ در $L^2(\widehat{G})$ چگال است، کافی است ثابت کنیم $\Phi^\perp=0$ فرض کنید $\psi\in\Phi^\perp$، یعنی برای هر $\phi\in\Phi$، $\int_{\widehat{G}}\phi\bar{\psi}d\xi=0$. چون $L^1(G)\cap L^2(G)$ تحت انتقال ناوردا است، پس Φ تحت ضرب در (x,ξ) ناوردا است. در نتیجه برای هر $x\in G$،

$$\int_{\widehat{G}}\phi(\xi)\overline{\psi(\xi)}(x,\xi)d\xi = 0 \quad (۸۹)$$

در نتیجه طبق قضیه‌ی ۲۰، $\phi\bar{\psi}=0\ \ a.e.$. از طرفی می‌توان مانند قضیه‌ی ۲۹ (ب) نشان داد که Φ هیچ جا صفر نمی‌شود. در نتیجه $\psi=0\ \ a.e.$ □

تعمیم تبدیل فوریه به یک تناظر یک‌به‌یک بین $L^2(G)$ و $L^2(\widehat{G})$ در بسیاری از زمینه‌ها، بخصوص نظریه‌ی کوانتوم کاربرد دارد. در نظریه‌ی گروه‌های کوانتومی، توابع موج مکانی شرودینگر، اعضای فضای $L^2(G)$ هستند که گروه G بیانگر مکان است و توابع موج تکانه‌ای اعضای $L^2(\widehat{G})$ هستند که اعضای $\widehat{G}$ نشان‌دهنده‌ی تکانه‌های مختلف هستند و برای تابع مکان ψ، $\hat{\psi}$ تابع موج تکانه‌ی آن است. درواقع هر عضو $\widehat{G}$ بیانگر تابع موج مکانی ذره‌ای با تکانه‌ی ثابت است و تابع موج مکانی، ترکیب خطی‌ای از اینها باید باشد، که این تعریف به L^2 تعمیم پیدا می‌کند. برای اطلاعات بیشتر رجوع شود به [۶].

مراجع

[1] Kenneth A. Ross Edwin Hewitt. Abstract Harmonic Analysis. Springer, 1963.

[2] Karl Stomberg Edwin Hewwit. Real and Abstract Analysis. Springer-Verlag, 1965.

[3] Revaz Gamkrelidze. Topological Groups. Taylor & Francis, 1987.

[4] Patrick Fitzpatrick Halsey Royden. Real analysis. Pearson Education, Inc, 4th edition, 2010.

[20] Plancherel

[5] Eberhard Kaniuth. A Course in Commutative Banach Algebra. Springer New York, 2008.

[6] Christian Kassel. Quantum Groups. Springer-Verlag, 1995.

[7] Inder K. Rana. An Introduction to Measure and Integration. American Mathematical Society, 2002.

[8] Walter Rudin. Fourier Analysis on Groups. Interscience publishers, 1st edition, 1962.