درباره‌ی خودارجاعی[1] (I)

امیر حسین اکبرطباطبایی

۱ مقدمه

"اولین جمله‌ی این مقاله نادرست است."

می‌پذیرم که مقدمه را با جمله‌ای غیرعادی شروع کرده‌ام؛ اما اگر منصف باشید این گزاره آن قدرها هم غیرعادی نیست. دست کم یک جمله‌ی درست‌ساخت زبان فارسی است، به این معنی که از نظر دستور زبان، حقیقتا یک جمله است و در ساختار نحوی آن خطایی صورت نگرفته. بنابراین من حداقل می‌توانم ادعا کنم اگر چه جمله‌ای به ظاهر بی‌ربط گفته‌ام اما دست کم کلامی معنادار ادا کرده‌ام. به این دلیل ساده که انتظار داریم هر گزاره‌ی درست ساخت فارسی لاجرم معنایی هم داشته باشد.

حال یک بار دیگر به جمله‌ی اول مقدمه که آن را A می‌نامیم نگاه کنید و سعی کنید معنای این گزاره را بیابید...

درست است؛ این جمله اساسا بی‌معناست. اما چرا؟ برای اینکه نشان دهیم A نمی‌تواند معنایی داشته باشد از برهان خلف کمک می‌گیریم. بنابراین فرض کنید A معنادار باشد؛ در این صورت یا صادق است یا کاذب. برای شروع فرض می‌کنیم A صادق باشد و این یعنی وقتی شروع می‌کنید به خواندن این مقاله، اولین گزاره‌ای که با آن مواجه می‌شوید، گزاره‌ای نادرست است. اما این گزاره چیزی نیست جز خود A؛ پس A باید کاذب باشد و این دقیقا خلاف فرض اولمان مبنی بر صادق بودن A است، تناقض. درنتیجه اگر قرار باشد A را معنادار فرض کنیم تنها راه این است که A کاذب باشد. ولی کذب A به معنای نادرست بودن "اولین جمله‌ی این مقاله نادرست است." خواهد بود که یعنی صدق A، و باز هم تناقض. پدیده‌ی عجیبی است این گزاره‌ی A. وقتی درستی آن را فرض می‌کنیم، کذبش نتیجه می‌شود، و از فرض نادرستی‌اش، صدق آن. کجای کار اشتباه کرده‌ایم؟ جواب این است: هیچ کجا!

گزاره‌ی A حقیقتا یک گزاره‌ی متناقض است؛ جمله‌ای به ظاهر معنادار در زبان فارسی، اما در واقع عمیقا بی‌معنا. چه چیز در گزاره‌ی A غیرعادی است یا بهتر است بپرسیم چه ویژگی‌ای از A مشکل‌ساز از آب درآمده‌است؟

پاسخ، که هسته‌ی اصلی این مقاله را تشکیل می‌دهد چیزی نیست جز خودارجاعی. درحقیقت آن چه که درباره‌ی این جمله غیرطبیعی است این است که A برخلاف جملات معمولی زبان فارسی، درباره‌ی خودش نیز حرف می‌زند یا به بیان دقیق‌تر، بررسی ارزش درستی‌اش را «به خودش ارجاع می‌دهد». از این منظر رفتار غیرمنتظره‌ی A خیلی هم عجیب نخواهدبود؛ زیرا تلاش برای یافتن معنای A دقیقا مشابه این است که از کسی که متهم به ارتکاب جرمی است بخواهند خودش درباره‌ی خودش قضاوت کند. با این تفاسیر، به نظر می‌رسد که بتوانیم جمله‌ی A را به سبب مشابهتش به مثالی که در بالا آوردیم، مهمل بدانیم و به تبع آن هر گزاره‌ی خودارجاعی در زبان را. و این اصل کلی را بپذیریم که: «برخی از جملات در زبان فارسی، برخلاف ظاهرشان، بی‌معنایند». به عنوان مثال، جملات "این جمله صادق است"، "هر ادعایی تا اندازه‌ای درست است و تا اندازه‌ای نادرست" و یا حتی برخی از جملات امری مانند "این فرمان را اطاعت نکن" و یا "این جمله را نخوان" در زمره‌ی جملات بی‌معنا خواهندبود.

اما مساله به این سادگی‌ها نیست. مشکل کار اینجاست که برخلاف انتظار، جملات بسیاری وجود دارند که خودارجاعند و بسیاری از آن‌ها مانند A، دردسرساز نیستند. مثلا جمله‌ی "این جمله صادق است" تنها صدق خودش را ادعا می‌کند (با مثال متهم

[1] Self-Reference

مقایسه کنید) و این مطلب به هیچ وجه پارادکسیکال نیست. با این حال شما می‌توانید ادعا کنید که درست است که جملات خودارجاعی هم هستند که مساله ساز نیستند اما از آنجا که بسیار غیرمعمولند، حذفشان از گستره‌ی جملات معنادار زبان نه تنها هیچ صدمه‌ای به زبان مورد استفاده‌ی ما نخواهدزد، بلکه ما را هم از شر جملات دردسرساز رها می‌کند و هم از شر جملات نامعمول. متاسفانه این ادعا آن‌قدرها که در نگاه اول به نظر می‌رسد معقول نیست. زیرا بسیاری از حقایق عمیق دانش بشری ساختاری خودارجاع دارند. به عنوان مثال همه‌ی آن چه تا به حال درباره‌ی "دانش بشری" گفته‌شده‌است جملاتی خودارجاعند. زیرا خود این جملات هم بخشی از همان دانش بشری مورد بحث است. همین طور درباره‌ی گزاره‌های مربوط به زبان‌شناسی و یا مثلا فلسفه‌ی ذهن. بنابراین موضع ابتدایی ما، یعنی حذف این جملات به اتهام بی‌معنایی، نه تنها به صرفه نیست، بلکه عاقلانه هم نخواهدبود.(توجه کنید که همین اصل اولیه‌ی ما یعنی "برخی از جملات زبان فارسی برخلاف ظاهرشان بی‌معنایند" نیز جمله‌ای خودارجاع خواهدبود و باید حذف شود. یعنی اصل اول ما، به محض به اجرا درآمدنش، اول از همه خودش را پاک می‌کند!!!)

راه حل چیست؟ حذف این گزاره‌ها بخش اعظمی از دانش بشری ما را از بین می‌برد و حفظشان مفهوم معنارا! به این سوال در بخش‌های بعد بازخواهیم‌گشت، اما قبل از آن اندکی درباره‌ی این مقاله.

شاید به این فکر کرده‌باشید که این مفاهیم معناداری و خودارجاعی بیشتر تحلیلی زبان‌شناختی است تا مساله‌ای ریاضی. درجواب، باید بگویم که خطر این خودارجاعی‌ها برای ریاضیات، چه به لحاظ تاریخی و چه به لحاظ فلسفی، اگر از خطرشان برای زبان‌شناسی طبیعی بیشتر نبوده‌باشد کمتر نیز نبوده‌است. مثلا تمام تلاش‌های اوایل قرن بیستم در حوزه‌ی مبانی ریاضیات و یا تدوین منطق جدید را می‌توان پاسخی برای همین خودارجاعی‌های به ظاهر بی‌اهمیت دانست. به همین دلیل است که در حوزه‌ی ریاضیات مثال‌های بسیاری از خودارجاعی‌ها وجود دارند که اکثرا با پیشوند "پارادکس" به گوش شما خورده‌اند. مثال‌هایی نظیر پارادکس راسل[۲]، پارادکس ریچارد[۳] و پارادکس بورالی-فورتی[۴] تنها نمونه‌های اندکی از این جنگل انبوه است؛ جنگلی متشکل از پارادوکس‌هایی مختلف که هر کدام از ادبیات خاص خودشان بهره می‌برند؛ یکی مانند آنچه در ابتدای مقدمه ذکر آن رفت، در حوزه‌ی صدق و معنا، و دیگری مانند پارادکس راست در حوزه‌ی نظریه‌ی مجموعه‌ها. اما نکته‌ی جالب اینجاست که این جنگل انبوه از پارادوکس‌ها برخلاف تعدد ظاهریشان گویی همه از یک روح مشترک برخوردارند؛ روحی که برای ریاضیات همان قدر که دردسرآفرین بوده، سازنده نیز بوده است. این روح مشترک چیزی نیست جز گزاره‌های خودارجاع و یا دقیق‌تر، روش ایجاد این خودارجاعی‌ها. روشی که به دلایل تاریخی "قطری‌سازی کانتور[۵]" و یا به اختصار "قطری‌سازی" نامیده‌می‌شود. آن چه در این مقاله در پی آنیم شرح و بسط همین روح مشترک است.

حال ممکن است پیش خودتان این‌طور فکر کنید که درست است که یافتن راه‌حلی برای پارادکس‌ها حیاتی است اما یافتن روح مشترک همه‌ی آن‌ها، یا متحد کردن آن‌ها چه ارزشی خواهدداشت؟ سوال بجایی است و برای پاسخ به همین سوال است که این چند خط را اضافه خواهیم‌کرد.

یک پارادکس چه وقت حاصل می‌شود؟ درست است، وقتی که فرض‌های ابتدایی ما متناقض باشند و با به تعبیر بهتر وقتی که در انتخاب پیش‌فرض‌هایمان بیش از اندازه سهل انگار بوده‌باشیم. بنابراین به طور غیرمستقیم ظهور یک پارادکس یعنی تلاش برای کاهش پیش‌فرض‌هایمان تا سرحد امکان. حال اگر این پارادکس در حوزه‌ای کاملا شهودی رخ دهد، مثلا همین پارادکس ابتدای مقدمه، معنایش این می‌شود که پیش‌فرض‌های شهودی و به ظاهر معقول ما، آن چنان هم معقول نیستند و باید مورد مطالعه‌ی بیشتری قرار گرفته و شاید حتی برخی از آن‌ها کاملا حذف شوند. اما این پیش‌فرض‌ها هم ساده‌اند و هم معقولند. بنابراین ما با دو گزینه مواجه‌خواهیم‌بود: یا زندگی در میان پارادکس‌ها و یا از دست دادن مبانی ساده و شهودی‌مان. به این معنا یک پارادکس در حوزه‌ی شهودهای اولیه‌ی ما -مانند پارادکس‌هایی که در ادامه‌ی این مقاله خواهیم‌دید- انتخابی است میان دو گزینه‌ی عمیقا نارضایت‌بخش.

با این وجود، همین تلاش برای حل پارادکس‌ها و عملا "محدود کردن" پیش‌فرض‌هایمان، نتایجی عمیق حاصل خواهدکرد. مثلا قضایای ناتمامیت گودل[۶]، نمونه‌ی شاهکاری است از خوانشی متفاوت از همین پارادکس دروغگو[۷] (پارادکس ابتدای مقدمه) به عنوان یک عامل محدودکننده! بنابراین یافتن یک روش کلی برای حل پارادکس‌ها، یعنی یافتن یک روش کلی برای تعیین محدودیت‌های ذاتی دانش ما. این مطلب تلاش ما را در ادامه‌ی این مقاله، برای یافتن روح اصلی پارادکس‌ها (که آن را قضیه‌ی

---

[۲] Russell's Paradox
[۳] Richard's Paradox
[۴] Burali-Forti paradox
[۵] Cantor's diagonalization
[۶] Godel's incompleteness theorems
[۷] Liar Paradox

نقطه ثابت نامیده‌ایم) توجیه می‌کند.

و اما کلام آخر، آن چه در ادامه خواهیددید، شامل دو بخش اصلی است. بخش اول، که ما آن را صوری‌سازی نامیده‌ایم به معرفی ساختارهایی موسوم به ساختارهای توصیفی اختصاص دارد که به کلی‌ترین معنای ممکن به ما اجازه می‌دهند کار را با توصیفی از یک جهان شروع کرده و به کمک ترجمه‌ای از مجموعه‌ی توصیفات به درون جهان، مفاهیم متکی به خودارجاعی‌ها را باز تولید کرده و به صورت قضیه‌ای موسوم به قضیه‌ی نقطه ثابت ارائه کنیم.

اگر چه معرفی این ساختارها و اثبات قضیه نقطه ثابت فوق‌العاده ساده و ابتدایی است، با این وجود قضایای اساسی بسیاری را می‌توان از آن نتیجه گرفت و این وظیفه‌ی بخش دوم مقاله است؛ یعنی بررسی نتایجی که می‌توان از اعمال این قضیه به ساختارهای شناخته شده‌ی منطق و نظریه مجموعه‌ها بدست آورد. در ادامه فهرستی از این نتایج را می‌آوریم که در این مقاله و در شماره‌های بعد، بحث و بررسی خواهند شد:

۱) پارادکس دروغگو و تعریف‌ناپذیری صدق در زبان‌های طبیعی

۲) پارادکس راسل و لزوم محدود کردن تناظر مفهومی–مصداقی در نظریه‌ی مجموعه‌ها

۳) پارادکس ریچارد و تعریف‌ناپذیری مفهوم تعریف‌پذیری در یک زبان واحد

۴) پارادکس کونیگ و تعریف‌ناپذیری خوش ترتیبی‌های ممکن روی اعداد حقیقی

۵) قضیه‌ی مجموعه توانی کانتور[۸]

۶) قضایای ناتمامیت گودل برای نظریه‌های به اندازه‌ی کافی قوی

۷) قضیه لب[۹] برای حساب مرتبه اول

۸) قضیه تعریف‌ناپذیری صدق تارسکی[۱۰]

۹) قضیه بازگشت[۱۱] در نظریه توابع بازگشتی

۱۰ قضیه رایس[۱۲] و تصمیم‌ناپذیری مساله توقف یک الگوریتم[۱۳]

۲ صوری‌سازی

در این بخش تلاش می‌کنیم روح اصلی پارادکس‌ها، یعنی خودارجاعی را به نحوی صوری و دقیق مدل کنیم. اما برای مدل کردن مفهوم خودارجاعی به چه چیزهایی نیاز خواهیم‌داشت؟

در وهله‌ی اول دست کم به دو دسته از اشیا نیاز داریم. دسته‌ی اول اشیایی که به آن‌ها ارجاع می‌شود و به تعبیری اشیای مورد مطالعه ما هستند، (این مجموعه را با M نشان می‌دهیم) مانند اشیای یک جهان واقعی و دسته‌ی دوم اشیایی که به اعضای دسته اول ارجاع می‌کنند (واین مجموعه را با $\mathcal{L}$ نشان می‌دهیم) مثلا جملات یک زبان که اشیای یک جهان را توصیف می‌کنند نمونه‌ای از دسته‌ی دوم هستند. خودارجاعی‌ها از تداخل این دو دسته از اشیا بدست می‌آیند. اما همین‌ها برای ایجاد یک خودارجاعی کافی نیست. در وهله‌ی دوم به یک عمل ارجاع هم نیاز داریم؛ عملی که اشیای درون $\mathcal{L}$ به کمک آن به اشیای مورد مطالعه یعنی M ارجاع می‌دهند. مثلا در مثال بالا، عمل ارجاع چیزی نیست جز تعیین صدق یک فرمول زبان (اعضای $\mathcal{L}$) برای یک شی در جهان خارج (M).

و در نهایت برای ایجاد تداخل بین M و $\mathcal{L}$ و تولید خودارجاعی‌ها، لاجرم باید بتوانیم اشیای $\mathcal{L}$ را با بخشی از اشیای M متناظر کنیم تا یک عضو $\mathcal{L}$ که تنها می‌تواند به اعضای M ارجاع کند به خودش، یا به بیان دقیق‌تر به متناظر خودش نیز بتواند ارجاع کند.

حال اجازه دهید این مفاهیم شهودی را در قالب یک تعریف بگنجانیم:

[۸] Cantor's power set theorem
[۹] Lob's theorem
[۱۰] Tarski's theorem of underfinability of truth
[۱۱] Recursion theorem
[۱۲] Rice theorem
[۱۳] Undecidibility of halting problem

تعریف ۱. *چهارتایی مرتب* $S = (M, L, ., \lceil\ \rceil)$ *را یک ساختار توصیفی یا به اختصار یک ساختار می‌نامیم هرگاه:*

(i) *L و M دو مجموعه‌ی ناتهی باشند.*

(ii) *عمل. یک تابع از $L \times M$ به L باشد.*

(iii) *$\lceil\ \rceil$ یک تابع یک به یک از L به M باشد.*

عمل. و تابع $\lceil\ \rceil$ را به ترتیب عمل ارجاع و تابع مترجم ساختار S می‌نامیم.

مثال ۲. *فرض کنید X یک مجموعه‌ی دلخواه و $Y \subset P(X)$ مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد به طوری که $\emptyset, X \in Y$ و به علاوه $|X| \leq |Y|$. حال عمل. را به صورت مقابل تعریف کنید:*

$$\begin{cases} . : Y \times X \to Y \\ A.a = \begin{cases} X & a \in A \\ \emptyset & a \notin A \end{cases} \end{cases}$$

و تابع یک به یک f را طوری در نظربگیرید که $f : Y \to X$ (چنین تابعی وجود دارد زیرا $|X| \leq |Y|$)، در این صورت چهارتایی $S = (X, Y, ., f)$ یک ساختار توصیفی با عمل ارجاع. و تابع مترجم f خواهد بود.

مثال فوق به نظر مثالی غیرطبیعی است. احتمالا به این دلیل که هم فرض‌های عجیب و غریبی دارد و هم عمل ارجاع ناآشنایی. در ادامه سعی می‌کنیم شهودی برای این مثال دست و پا کنیم.

فرض کنید X را به مجموعه‌ای متشکل از اشیای جهان اطرافمان تعبیر کنیم. در این صورت منظور ما از اعضای Y (که هرکدام زیرمجموعه‌ای از X هستند)، خانواده‌هایی از این اشیا خواهد بود که دارای دست کم یک صفت مشترکند. مثلا اعضای X می‌توانند همه‌ی اشیای درون یک اتاق باشند و اعضای Y، خانواده‌هایی از این اشیا که صفتی مشترک دارند؛ به عنوان مثال مجموعه‌ی همه‌ی اشیای چوبی، یکی از اعضای Y خواهد بود. در این صورت این شرط که $\emptyset, X \in Y$ به این تعبیر می‌شود که در جهان ما دست کم دو صفت وجود دارد که اولی هیچ مصداقی ندارد (مثلا این صفت که یک شی با خودش برابر نیست) و دومی صفت همه‌ی اشیای جهان است (مثلا این صفت که یک شی با خودش برابر است) و شرط $|X| \leq |Y|$. چیزی نیست جز این قید که تعداد صفات مورد بررسی ما حداکثر می‌تواند به اندازه تعداد اشیای مورد بحثمان باشد؛ زیرا در غیر این صورت انگار در جهان ما صفاتی وجود دارند که در آن جهان، غیرقابل فهمند (یک جهان دو عضوی را در نظر بگیرید. موجودات این جهان چطور می‌توانند درباره‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های جهانشان، که چهارتا بیشتر نیست درکی پیدا کنند، در حالی که نمی‌توانند اعداد بزرگتر از دو را بفهمند).

و اما بررسی مفهوم عمل ارجاع. طبیعتا منظور از ارجاع یک صفت به یک شی این است که آیا شی موردنظر، مصداقی از آن صفت هست یا خیر! بنابراین اگر مجموعه‌ی X را نماینده‌ی عدد یک و مجموعه‌ی $\emptyset$ را نماینده عدد صفر در نظر بگیرید، عمل ارجاع S دقیقا همان عمل طبیعی ارجاع یک صفت به یک شی خواهد بود (لازم به ذکر است که تصور X و $\emptyset$ به عنوان نمادهایی صرفا قراردادی برای صفر و یک نادرست است و آن‌ها معانی دیگری را نیز حمل می‌کنند، اما ما در اینجا به این مطلب نخواهیم‌پرداخت).

برای ارائه مثال بعد و بیان اکثر قضایای این مقاله، نیاز خواهیم داشت مفهوم زبان را اندکی روشن کنیم. می‌گوییم اندکی، چون همه‌ی منطق جدید، تلاش برای همین منظور بوده است و بررسی موشکافانه‌ی یک زبان، حتی برای زبان‌های صوری ریاضی، نه در حوصله‌ی این مقاله است و نه حتی مورد نیاز آن. بنابراین طبیعتا به تعریفی شهودی از یک زبان قناعت می‌کنیم و وارد جزئیات بی‌شمار این مطلب نخواهیم‌شد.

منظور از یک زبان چیست؟ در ساده‌ترین صورت «یک زبان مجموعه‌ای از گزاره‌هاست، که به تبعیت از قوانینی خاص موسوم به دستور زبان ساخته می‌شوند و معنایی خاص را حمل می‌کنند». به نظر تعریف خوبی است اما در واقع اندکی فریبکارانه است؛ زیرا مساله تعریف یک زبان را به مساله بررسی مفهوم معنا تحویل می‌کند که ابدا مساله ساده‌ای نیست (پارادکس اول مقدمه را به خاطر آورید). با این حال اینکه معنا چیست و صدق یک گزاره به چه معناست، مانعی برای استفاده‌ی ما از زبان نخواهد بود زیرا ساختار تحلیل‌هایی که درباره‌ی زبان در این مقاله به کار گرفته خواهند شد به گونه‌ای است که ذاتا از این مساله‌ی دشوار می‌گریزد. در ادامه به این مطلب بازخواهیم گشت اما قبل از آن لازم است اندکی درباره‌ی بخش ابتدایی تعریفمان از زبان سخن بگوییم یعنی دستور زبان یا نحو!

آنچه از نحو یک زبان مورد نیاز ماست، تحلیل مختصری است درباره‌ی متغیرهای آن زبان. حال فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان دلخواه باشد. در این صورت گزاره‌های زبان $\mathcal{L}$ در حالت کلی می‌توانند شامل انواع مختلفی از متغیرها باشند؛ متغیرهایی برای اشیای جهان، متغیرهایی برای توابع و روابط و یا حتی متغیرهایی برای خود گزاره‌ها. تعیین اینکه کدام نوع متغیر را برای یک زبان برگزینیم بسته به این است که دامنه‌ی سخن ما چیست. اگر موضوع بحث، اشیای موجود در جهان باشد، انتخاب متغیرهای فردی، منطقی خواهد بود و در صورتی که بخواهیم درباره‌ی صفات و یا روابط بین اشیا سخن بگوییم، انتخاب متغیرهای رابطه‌ای. با این حال یک زبان با متغیرهای فردی هم می‌تواند جملات بسیار ی درباره‌ی روابط بین اشیا بگوید و این یک مرزبندی دقیق نیست.

نمادگذاری: فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان باشد. در این صورت بنابر قرارداد، متغیرهای فردی این زبان را با حروف کوچک $x, y, z, \ldots$ و یا با $x_0, x_1, \ldots$ و متغیرهای دیگر زبان، اعم از تابعی، رابطه‌ای، گزاره‌ای و ... را با حروف بزرگ $X_0, X_1, X_2, \ldots$ و یا با $X, Y, Z, \ldots$ نمایش می‌دهیم.

برای روشن شدن تمایز این متغیرها و طرز کاربردشان در جمله‌های زبان، ارائه‌ی چندمثال خالی از لطف نیست!

مثال ۳. *فرض کنید $\mathcal{L}$ همان زبان فارسی معمولی ما باشد که به یک متغیر فردی (x) و یک متغیر گزاره‌ای (X) مجهز شده‌است. در این صورت مثلا گزاره "x سفید است" $= A(x)$ یک فرمول درست ساخت زبان ما خواهدبود؛ زیرا x یم متغیر فردی است و همان طور که انتظار می‌رود، به اشیای جهان اطراف ما اشاره می‌کند.*

مثلا اگر "برف" $= c$ نمادی برای واژه‌ی برف باشد، گزاره‌ی "برف سفید است" $= A(c)$ یک جمله‌ی درست ساخت زبان فارسی خواهد بود. حال گزاره‌ی "X نادرست است" $= B(X)$ را درنظر بگیرید. B یک فرمول درست ساخت زبان $\mathcal{L}$ است زیرا در آن X به یک گزاره در زبان، ارجاع می‌کند؛ به این دلیل که از نظر ما صدق، تنها برای یک گزاره است که می‌تواند معنا داشته‌باشد. بنابراین اگر جمله‌ی $A(c)$ را به جای X در B جایگذاری کنیم، گزاره‌ی

$$B(A(c)) = \text{"}A(c)\text{ نادرست است"} = \text{«"برف سفید است" نادرست است»}$$

بدست خواهد آمد که جمله‌ای درست ساخت است اما درست نیست.

اکنون آماده‌ایم تا به مسیر اصلی‌مان، یعنی تحلیل مساله‌ی معنا، بازگردیم.

فرض کنید $\mathcal{L}$ مجموعه‌ای از گزاره‌های یک زبان باشد. برای اینکه مفهوم معنا و یا معادلا صدق گزاره‌های $\mathcal{L}$ را روشن کنیم، باید قواعدی وضع کنیم تا صدق گزاره‌ها را معین کند. فرض کنید چنین قواعدی موجود باشند و به علاوه فرض کنید T مجموعه‌ای باشد متشکل از همه‌ی گزاره‌های صادق (البته طبیعتا گزاره‌های صادق نسبت به آن خانواده از قواعد). مثلا در زبان فارسی اگر A یک گزاره باشد، "اگر A آنگاه A" یک گزاره‌ی صادق خواهد بود و بنابراین عضوی از T است. البته به این شرط که قواعد فوق‌الذکر را برای تعیین صدق، همان قواعد طبیعی و آشنای بررسی صدق در زبان فارسی طبیعی درنظر بگیریم.

مساله‌ی معنا تعیین همین مجموعه‌ی T و یا تعیین قواعدی برای تعیّن صدق گزاره‌هاست و این دقیقا همین قسمت دشوار مساله‌ی معناست که ذکر آن رفت. با این وجود ما با فرض اینکه T مجموعه‌ای مفروض است، این قسمت دشوار را دور می‌زنیم و توجهمان را به نتایجی معطوف می‌کنیم که از انتخاب‌های مختلف مجموعه‌ی T به دست می‌آیند.

این نوع آزاد گذاشتن مفهوم صدق، بعدها دست ما را برای اعمال نتایجمان به ساختارهای مختلفی که گاهی حتی به صدق هم مربوط نیستند، بازمی‌گزارد. مثلا هر نظریه‌ی T در یک زبان صوری $\mathcal{L}$ را می‌توان یک مبنای صدق درنظر گرفت؛ یعنی گزاره‌های درون T همان صادق‌های زبان $\mathcal{L}$ خواهند بود.

تعریف ۴. *منظور از یک منطق L، دوتایی مرتب $L = (\mathcal{L}, T)$ است که در آن $\mathcal{L}$ مجموعه‌ی همه گزاره‌های این منطق است و T زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{L}$ که همه‌ی گزاره‌های صادق $\mathcal{L}$ را معین می‌کند. $\mathcal{L}$ را زبان L و T را معناشناسی[۱۴] آن می‌نامیم.*

تبصره: برای اینکه نحوه استدلال‌های ما به حرکت واقعی فکر نزدیک‌تر باشد، هرجا که بیم اشتباه نرود، از عبارت "زبان L" به جای "منطق L" استفاده خواهیم‌کرد. مثلا به جای "منطق L در یک زبان طبیعی"، تنها خواهیم‌گفت "زبان طبیعی L".

اکنون آماده‌ایم تا یکی از مهم‌ترین انواع ساختارهای توصیفی را معرفی کنیم. برای اینکه خودمان را دچار پیچیدگی‌های فنی حالت کلی مساله نکرده‌باشیم این نوع از ساختارها را در قالب یک مثال آشنا ارائه خواهیم‌کرد.

مثال ۵. *منطق $L = (\mathcal{L}, T)$ را در نظر بگیرید که در آن $\mathcal{L}$ مجموعه‌ی همه‌ی گزاره‌های زبان فارسی است که به یک متغیر گزاره‌ای X نیز مجهز شده‌اند و T همان معناشناسی طبیعی زبان ماست؛ یعنی متشکل است از همه‌ی گزاره‌هایی که ما به طور طبیعی صادق*

[۱۴] Semantics

می‌پنداریم. از آنجایی که از نگاه معناشناسانه تنها صدق و کذب یک گزاره حائز اهمیت است، بنابراین طبیعتا دو گزاره‌ی معادل برای ما ارزش یکسانی دارند و حتی برابر تلقی می‌شوند. بنابراین طبیعی است که به جای کارکردن با خودگزاره‌ها، کلاس‌های هم ارزی آن‌ها را نسبت به رابطه‌ی $\equiv$ در نظر بگیریم (توجه کنید فرمول‌های $A(X)$ و $B(X)$ معادلند هرگاه $\forall X\ (A(X) \iff B(X))$ عضوی از T باشد).

حال فضای این کلاس‌های هم‌ارزی را برابر $L = (\mathcal{L}/\equiv)$ تعریف کرده و عمل مقابل را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} . : L \times L \to L \\ [A(X)].[B(X)] = [A(B)] \end{cases}$$

که در آن منظور از $A(B)$ گزاره‌ای است که از جانشین کردن B به جای X در $A(X)$ دست می‌آید. بررسی اینکه عمل . خوش‌تعریف است، کار سختی نیست و به خواننده محول می‌شود.

حال چهارتایی $S = (L, L, ., id_L)$ را که در آن id_L تابع همانی روی مجموعه‌ی L است، در نظر بگیرید. از آنجائیکه id_L تابع یک‌به‌یک است، چهارتایی S یک ساختار توصیفی خواهدبود.

اگر خوب دقت کنید، خواهید دید که این ساختار، صوری شده‌ی عملی است که ما هر روزه در زبان فارسی روزمره‌مان استفاده می‌کنیم و به کمک همین عمل است که می‌توانیم درون همین زبان فارسی درباره گزاره‌هایش اظهار نظر کنیم و مثلا بگوییم «"برف سفید است" نادرست است» (مثال ۲-۲ را ببینید).

از این مثال در بخش آتی استفاده خواهیم کرد تا نشان دهیم آزادی یک زبان برای اظهارنظر درباره خودش چقد می‌تواند دردسرساز باشد.

پس از این مقدمات کوتاه درباره‌ی ساختار یک زبان، اکنون آماده‌ایم قضیه اصلی این مقاله، یعنی قضیه نقطه ثابت را بیان و اثبات کنیم. اما قبل از آن یک قرارداد.

نمادگذاری: اگر $S = (M, L, ., \ulcorner\ \urcorner)$ یک ساختار توصیفی باشد، در این صورت:

(i) برای هر $A \in L$ و هر $m \in M$ هرجا که بیم اشتباه نرود، از نماد Am به جای $A.m$ استفاده خواهیم‌کرد.

(ii) برای هر دو عضو $A, B \in L$ منظور از $A.B$ و یا AB عضو $A.\ulcorner B \urcorner$ است (توجه کنید از آنجا که $\ulcorner B \urcorner \in M$ ضرب $A.B$ خوش‌تعریف خواهد بود). بنابراین عمل . را می‌توان به عنوان عملی روی L نیز در نظر گرفت. اما به دلایل فنی، ما این عمل را مبنای تعریف ساختارهای توصیفی نگرفته‌ایم و ترجیح داده‌ایم آن را به عنوان یکی از نتایج تعریف اولیه‌مان از عمل ارجاع به دست‌آوریم.

(iii) از آنجا که عمل . روی L (بند (ii)) لزوما شرکت‌پذیر نیست، برای هر انتخاب $A_i \in L$ها که $1 \leq i \leq n$ منظور از $A_1 A_2 \dots A_n$ عبارت است از $A_1.(A_2.(\dots(A_{n-1}.A_n)\dots)$.

قضیه ۶. **(قضیه نقطه ثابت)**. *فرض کنید $S = (M, L, ., \ulcorner\ \urcorner)$ یک ساختار توصیفی باشد و $A \in L$. اگر $C \in L$ای وجود داشته‌باشد به طوری که برای هر $B \in L$ داشته باشیم $ABB = CB$، در این صورت A نقطه‌ی ثابت دارد. یعنی $D \in L$ای وجود دارد به طوری که $AD = D$.*

اثبات. تعریف کنید $D = CC$. از آنجا که برای هر $B \in L$ داریم $ABB = CB$ بنابراین برای $B = C$ خواهیم‌داشت $ACC = CC$ که یعنی $AD = D$ و این همان است که می‌خواستیم. □

بیش از اندازه ساده است، نه؟ اندکی صبر کنید؛ در بخش‌های آتی توانایی این قضیه را مورد آزمون قرار خواهیم‌داد.