توابع پیوسته چه مقدار مشتق‌پذیرند؟

آرمان خالدیان

در اوایل قرن نوزدهم اکثر ریاضی‌دانان فکر می‌کردند که هر تابع پیوسته حقیقی در زیرمجموعه‌ی قابل توجهی از $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است؛ شاید به این خاطر که اکثر توابع شناخته‌شده تا آن زمان در مجموعه‌های قابل توجهی از دامنه‌ی خود مشتق‌پذیر بودند و وجود تابعی که روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد اما در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نباشد دور از ذهن می‌آمد. از دهه‌ی چهارم قرن نوزدهم میلادی به بعد، ریاضی دانانی چون بولتزانو، ریمان و به خصوص وایرشتراس توابعی معرفی کردند که پیوسته اما هیچ‌جا مشتق‌پذیر بودند، یعنی در هیچ جایی از دامنه مشتق‌پذیر نبودند. این مثال نقض عجیبی بر ادعای فوق بود و شوک بزرگی بر جامعه‌ی ریاضی وقت وارد کرد.

تابعی که وایرشتراس معرفی کرد به این صورت بود:

$$\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, 0 < a < 1, ab > 1 + 3\frac{\pi}{2}$$

$$\omega(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$$

نمودار تابع به مانند فراکتال‌ها رفتار می‌کند.

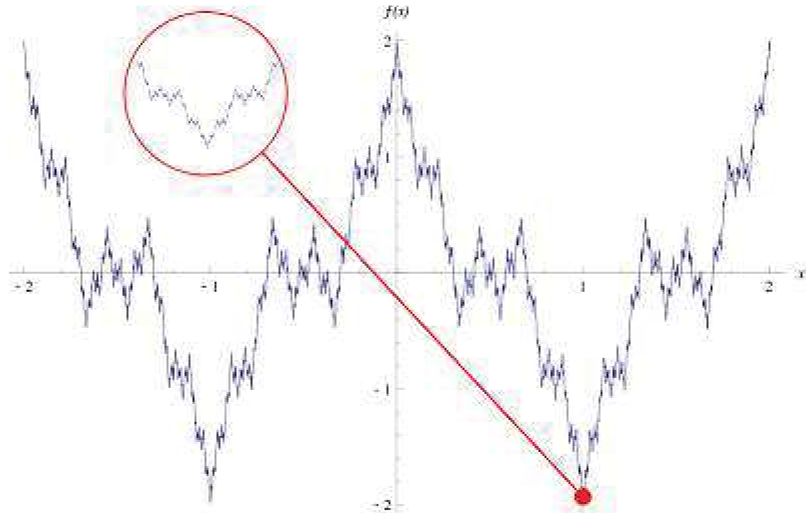
پس از این نمونه، توابع دیگری در طول زمان توسط ریاضی‌دان‌های مختلف معرفی شدند. پس از این دگرگونی این سوال مطرح شد که مجموعه‌ی این گونه توابع به چه اندازه بزرگ است که منجر به پاسخی حیرت‌انگیز شد؛ تقریبا تمام توابع پیوسته‌ی حقیقی هیچ‌جا مشتق‌پذیرند!!

مجموعه‌ی تمام توابع حقیقی پیوسته روی بازه‌ی $[a,b]$ با متر سوپریمم را با $C[a,b]$ نمایش می‌دهیم و مجموعه‌ی توابع حقیقی پیوسته اما هیچ‌جا مشتق‌پذیر در $[a,b]$ را با $ND[a,b]$ نشان می‌دهیم. می‌دانیم که مجموعه‌ی توابع قطعه‌قطعه خطی در $C[a,b]$ چگالند یعنی هر تابع پیوسته را می‌توان با این توابع تقریب زد. مانند ساخت تابع وایرشتراس(استفاده از دسته‌ی خاصی از توابع قطعه‌قطعه خطی) می‌توان نشان داد که $ND[a,b]$ در $C[a,b]$ چگال است، یعنی بستار $ND[a,b]$ مجموعه‌ی تمام توابع در $C[a,b]$ است! در واقع $ND[a,b]$ حتی بزرگتر از این است. برای این منظور مقدمات زیر را داریم.

اگر X یک فضای متریک باشد و M زیرمجموعه‌ای از آن، M را هیچ‌جا چگال گویند اگر بستار آن یعنی $\bar{M}$ هیچ مجموعه‌ی باز ناتهی را شامل نشود. مجموعه‌ی M را از دسته‌ی بئر اول گویند اگر $M = \cup_{k=1}^{\infty} M_k$ که همه‌ی M_kها در X هیچ‌جا چگال‌اند. اگر M از دسته‌ی بئر اول نباشد گویند از دسته‌ی بئر دوم است. به عنوان مثال همه‌ی فضاهای متریک کامل مانند $\mathbb{R}$ با متر معمولی از دسته‌ی بئر دومند. مجموعه‌ی اعداد گویا در $\mathbb{R}$ از دسته‌ی بئر اول و اعداد گنگ از دسته‌ی بئر دوم است. توجه کنید که $\mathbb{Q} = \cup_{i=1}^{\infty}\{q_i\}$ که هر $\{q_i\}$ تک عضوی است و هیچ‌جا چگال است، لذا $\mathbb{Q}$ از دسته‌ی بئر اول است.

می‌دانیم که $C[a,b]$ با متر سوپریمم یک فضای متریک(توپولوژیک) کامل است. باناخ و مازورکویچ در سال ۱۹۳۱ نشان دادند که $ND[a,b]$ از دسته‌ی بئر دوم است. می‌توان نشان داد که اعضای $C[a,b]$ که مشتق یک‌طرفه (چپ یا راست) متناهی دارند(از جمله توابع مشتق‌پذیر) از دسته‌ی بئر نوع اول است به نوعی یعنی $ND[a,b]$ در $C[a,b]$ خیلی بزرگ است مانند اعداد گنگ در اعداد حقیقی!

علاوه بر این ویژگی‌ها توپولوژیک، $ND[a,b]$ را در $C[a,b]$ می‌توان از دیدگاه نظریه‌ی اندازه بررسی کرد که منجر به یک دید احتمالاتی می‌شود. به عنوان مثال $\mathbb{R}$ را با اندازه‌ی لبگ روی آن درنظر بگیرید. اندازه لبگ μ، به هر بازه، طول آن را نسبت می‌دهد



شکل ۱: تابع وایرشتراس

و روی مجموعه‌های از هم جدا جمعی است. مثلا $\mu[a,b]=b-a$ و اندازه‌ی هر تک نقطه‌ای صفر است. حال توجه کنید که اندازه برای هر زیرمجموعه‌ی $\mathbb{R}$ قابل بیان نیست.

یک زیرمجموعه در $\mathbb{R}$ برل است اگر از اجتماع یا اشتراک شمارا و مکمل‌گیری از مجموعه‌های باز در $\mathbb{R}$ بدست آمده باشد. به مجموعه‌های برل می‌توان اندازه نسبت داد. آنگاه اندازه‌ی مجموعه‌ی $\mathbb{Q}$ برابر است با

$$\mu(\mathbb{Q})=\mu(\{\cup_{i=1}^{\infty}q_i\})=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(\{q_i\})=\sum 0=0$$

یعنی $\mathbb{Q}$ طول ندارد و طول آن صفر است. این یک دید احتمالاتی درباره‌ی $\mathbb{Q}$ بوجود می‌آورد.

اگر $\mathbb{R}$ را به $[0,1]$ محدود کنیم و روی $[0,1]$ اندازه‌ی لبگ را بنشانیم آنگاه این اندازه تبدیل به یک اندازه‌ی احتمال می‌شود. احتمال رخداد $\mathbb{Q}$ به عنوان یک پیشامد در $[0,1]$ برابر صفر است. یعنی اگر عددی تصادفی در بازه‌ی $[0,1]$ انتخاب کنیم احتمال گویا بودن آن صفر است و احتمال گنگ بودن آن یک! توجه کنید که $\mathbb{Q}$ از دسته‌ی بئر نوع اول و $\mathbb{Q}^c$ از دسته‌ی بئر نوع دوم است. به نوعی می‌توان تعبیر کرد که در فضاهای توپولوژیک احتمال رخداد مجموعه‌های بئر نوع اول تقریبا صفر ولی دسته‌ی بئر دوم بسیار شایعند.

شبیه به استدلال بالا را می‌توان به $ND[a,b]$ در $C[a,b]$ توسعه داد، یعنی $ND[a,b]$ در $C[a,b]$ بسیار شایع است.

با استفاده از متر سوپریمم می‌توان بازها را در $C[a,b]$ معین کرد و با استفاده از آن $\mathfrak{B}$، یعنی برل‌ها را ساخت ولی چون $C[a,b]$ بی‌نهایت بعدی است نمی‌توان به آن اندازه‌ی لبگ نسبت داد، اما اندازه‌های دیگری چون اندازه‌ی وینر را می‌توان به آن نسبت داد. اندازه‌ی وینر در بررسی حرکت براونی استفاده می‌شود. حرکت براونی یک فرآیند تصادفی است که مسیرهای آن تقریبا همه‌جا مشتق‌ناپذیرند.

با استفاده از μ_w، اندازه‌ی وینر، می‌توان $(C[a,b],\mathfrak{B},\mu_w)$ را به عنوان یک فضای اندازه یا احتمال در نظر گرفت، آنگاه در این فضا $ND[a,b]$ یک مجموعه‌ی شایع است و مجموعه‌ی توابع پیوسته‌ای که حتی در یک نقطه‌ی دامنه مشتق‌پذیرند، اندازه صفر است؛ یعنی اگر از مجموعه‌ی توابع پیوسته حقیقی به تصادف یک تابع انتخاب شود به احتمال صفر مشتق‌پذیر است؛ و $ND[a,b]$ یک مجموعه‌ی شایع است.

اما یک مشکل وجود دارد و آن این است که $ND[a,b]$ در $C[a,b]$ برل نیست. اما می‌توان نشان داد که زیرمجموعه‌ای از آن برل است و در $C[a,b]$ شایع است. شایع در واقع مفهوم نظریه اندازه‌ی دسته‌ی بئر نوع دوم در فضاهای توپولوژیک است اما امتیاز بیشتری چون نتایج احتمالاتی آن را دارد.

مراجع

[1] B. R. Hunt, *The Prevalence of Continous Nowhere Differentiable Functions* , Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1994), 711-717.

[2] B. R. Gelbaum and J. M. H. Olmstead, *Conterexamples in Analysis* , Holden Day Publisher, 1964.