لم اسپرنر و قضیه نقطه ثابت براور[۱]

آلکس رایت[۲]

یک نقطه‌ی ثابت برای تابع $f : X \to X$ نقطه‌ای مانند $x_0 \in X$ است که $f(x_0) = x_0$.
قضایایی که در مورد وجود نقاط ثابت توابع صحبت می‌کنند در آنالیز بسیار مفید هستند. یکی از مشهورترین این قضایا به براور باز می‌گردد. فرض کنید $D_n = \{x \in \mathbb{R}^n : | x | \leq 1\}$؛

قضیه نقطه ثابت براور: هر تابع پیوسته $f : D_n \to D_n$ دارای نقطه‌ی ثابت است.

در این مقاله می‌خواهیم اثباتی برای قضیه‌ی براور در حالت $n = 2$ با استفاده از لم اسپرنر، که یک مسئله ترکیبیاتی است ارائه دهیم.
در ادامه به لم اسپرنر و قضیه براور می‌پردازیم.
قضیه براور برای حالت $n = 1$ بسیار ساده و مقدماتی است اما برای بعدهای بالاتر مسئله به این سادگی نیست. اثبات زیر برای حالت $n = 1$ است:

اثبات. فرض کنید $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ تابعی پیوسته باشد. تعریف می‌کنیم $g(x) = x - f(x)$ در این صورت $g(1) \geq 0$ و $g(-1) \leq 0$. بنابراین با توجه به قضیه مقدار میانی نقطه‌ای مانند x_0 وجود دارد که $g(x_0) = 0$، و این نتیجه می‌دهد که $f(x_0) = x_0$. □

تعریف ۱. *مجموعه‌ی $G \subset \mathbb{R}^n$ را یک دامنه‌ی نقطه ثابت می‌نامیم اگر هر تابع پیوسته از G به خودش دارای نقطه‌ی ثابت باشد.*

بنابراین نقطه‌ی ثابت براور می‌گوید که D_n برای $n \geq 1$ یک دامنه‌ی نقطه ثابت است. اگر از D_n یک نقطه برداریم در این صورت دیگر دامنه‌ی نقطه ثابت نیست، همچنین $[0, 1] \cup [2, 3]$ و $\mathbb{R}$ دامنه‌ی نقطه ثابت نیستند (به راحتی می‌توانید روی این مجموعه‌ها توابعی مناسب تعریف کنید که نقطه‌ی ثابت ندارند). این واقعیت که D_n فشرده است نقشی اساسی در قضیه‌ی نقطه ثابت براور دارد.

قضیه ۲. *فرض کنید G یک دامنه‌ی نقطه ثابت باشد و $f : G \to H$ یک همومورفیسم باشد(تابعی پیوسته، یک‌به‌یک و پوشا با وارون پیوسته) در این صورت H نیز یک دامنه‌ی نقطه ثابت است.*

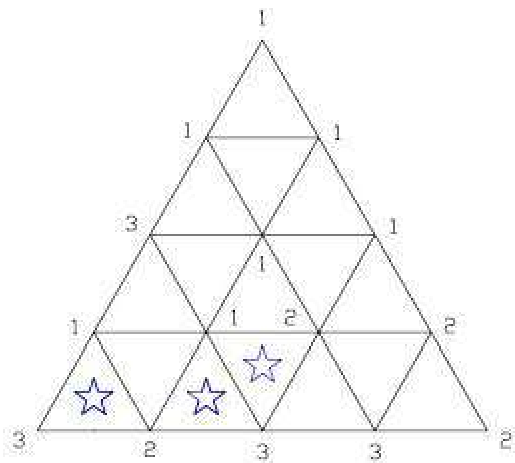
اثبات. فرض کنید $g : H \to H$ تابعی پیوسته باشد در این صورت $f^{-1} o g o f : G \to G$ نیز پیوسته است بنابراین دارای نقطه‌ای ثابت مانند x_0 است. حال داریم

$$(f^{-1} o g o f)(x_0) = x_0 \Rightarrow g(f(x_0)) = f(x_0)$$

بنابراین $f(x_0)$ نقطه‌ی ثابت g است. □

قضیه‌ی فوق نشان می‌دهد که دامنه‌ی نقطه ثابت، خاصیتی توپولوژیک است. بنابراین در حالت خاص برای قضیه نقطه‌ی ثابت براور در حالت $n = 2$ مسئله معادل این است که نشان دهیم هر تابع پیوسته از یک مثلث به خودش دارای نقطه ثابت است زیرا تابعی پیوسته، یک به یک و پوشا با وارون پیوسته از دایره به مثلث وجود دارد.

[۱] Sperner's Lemma and Brouwer's Fixed Point Theorem – Alex Wright
[۲] ترجمه‌ی ابوالفضل طاهری



شکل ۱: یک نمونه مثلث‌بندی

لم اسپرنر

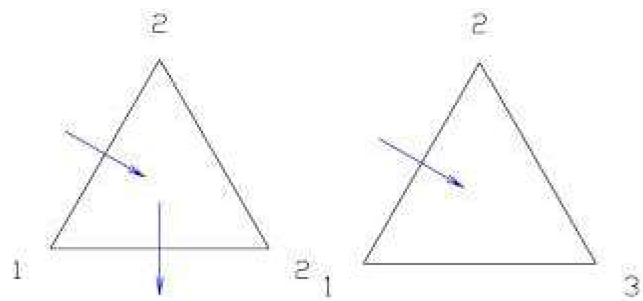
یک مثلث‌بندی از یک مثلث، تقسیم مثلث فوق به مثلث‌های کوچکتر است. مثلث‌های کوچک را مثلث‌های کودک و گوشه‌های مثلث‌ها را رئوس می‌نامیم. بین دو راس یال وجود دارد و دو مثلث با هم در یک راس یا یک یال می‌توانند اشتراک داشته باشند.
یک برچسب‌گذاری اسپرنر، یک برچسب‌گذاری بر روی رئوس یک مثلث‌بندی با اعداد ۱ و ۲ و ۳ است به طوری که:

- سه گوشه‌ی مثلث اصلی با ۱ و ۲ و ۳ برچسب‌گذاری شود.
- هر راس روی خطی که i, j را به هم وصل می‌کند دارای برچسب i یا j باشد.

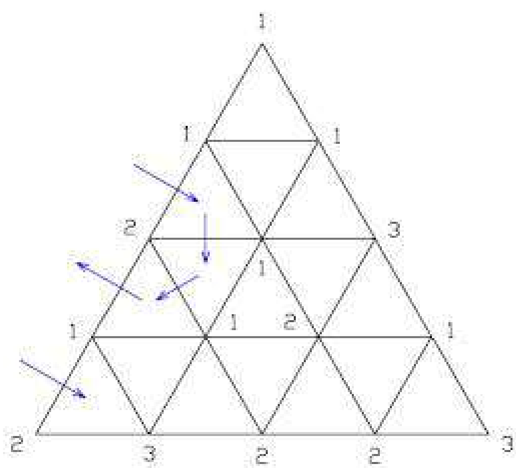
لم ۳. (*لم اسپرنر*) *هر برچسب‌گذاری اسپرنر دارای یک مثلث کودک با برچسب رئوس ۱ و ۲ و ۳ است.*

لم اسپرنر به ابعاد بالاتر هم تعمیم داده می‌شود به این صورت که هر رنگ‌آمیزی یک مثلث‌بندی ابرسطحی با $n + ۱$ رنگ، دارای یک ابرسطح کودک است که تمامی $n + ۱$ رنگ را دارد. اثباتی را که در ادامه برای حالت ۲ بعدی می‌آید در واقع می‌توان برای n دلخواه گسترش داد.

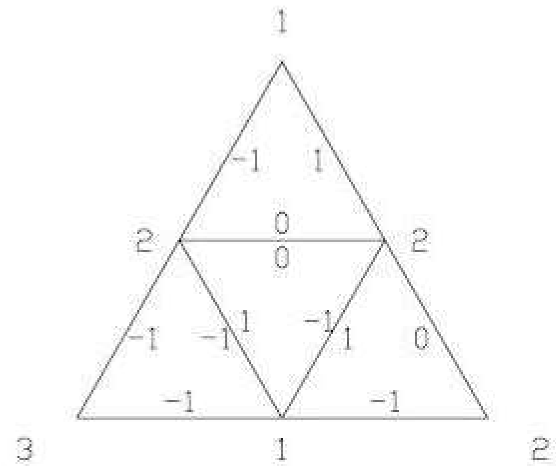
اثبات. ابتدا به این واقعیت می‌پردازیم که تعداد یال‌های ۲−۱ در سطح بیرونی مثلث، فرد است. برای دیدن این موضوع، یال‌های روی مرز را که دارای رئوس با برچسب ۱ یا ۲ هستند یک برچسب می دهیم به این صورت که تفاضل دو برچسب رئوس آن را به آن نسبت می‌دهیم. بنابراین هر ۲−۱ یال دارای برچسب $۱\pm$ و هر ۱−۱ یال و ۲−۲ یال دارای برچسب ۰ خواهد بود. دیده می‌شود که مجموع این برچسب‌ها برابر با تفاضل گوشه‌هاست یعنی ۱ (دقت کنید که مسیری از ۱ و ۲ ها را طی می‌کنیم که با ۱ شروع و به ۲ ختم می‌شود پس تعداد تغییرات فرد است پس تعداد ۲−۱ یال‌ها فرد است.)
حال به مثلث به شکل یک خانه نگاه می‌کنیم. هر مثلث کودک یک اتاق است و هر ۲−۱ یال را یک در برای اتاق درنظر می‌گیریم. مسیری در مثلث بندی را درنظر بگیرید که از خارج مثلث شروع می‌شود و از درها می‌گذرد. یک مسیر تنها در صورتی تمام می‌شود که از مثلث خارج شویم یا وارد یک ۳−۲−۱ مثلث شویم. به علاوه با انتخاب یک ورودی مسیر به طور یکتا مشخص می‌شود زیرا هیچ مثلثی سه یال ۲−۱ ندارد، همچنین این نتیجه می‌دهد که دو مسیر نمی‌توانند در یک مثلث مشترک باشند. تمامی این چنین مسیرهایی را در نظر بگیرید. هر مسیر که انتهای آن خروج از مثلث باشد یک جفت ۲−۱ یال در مرز دارد یکی برای شروع و یکی برای پایان. بنابراین، این مسیرها تعداد زوجی از ۲−۱ یال‌های روی مرز را شامل می‌شوند اما تعداد ۲−۱ یال‌های روی مرز تعداد فردی بود، بنابراین حداقل یک مسیر وجود دارد که به ۳−۲−۱ مثلث ختم می‌شود. پس حکم نتیجه می‌شود. □



شکل ۲: حرکت در مثلث‌ها



شکل ۳: برخی از مسیرها در یک مثلث



شکل ۴: برچسب‌گذاری یال‌ها

لم ۴. (حالت قوی‌تر اسپرنر) *بدون کاسته شدن از کلیت، فرض کنید که برچسب‌گذاری اسپرنر مثلث بیرونی، به صورت ساعتگرد باشد. فرض کنید A تعداد مثلث‌های کودک ۳-۲-۱ باشد که در جهت عقربه‌های ساعت علامت‌گذاری شده‌اند و B تعداد مثلث‌های ۳-۲-۱ که خلاف جهت عقربه‌های ساعت شماره‌گذاری شده‌اند. در این صورت داریم* $A - B = ۱$.

اگر این لم را ثابت کنیم، در این صورت $A + B$ تعداد مثلث‌های کودک ۳-۲-۱ خواهد بود که عددی فرد است و بزرگتر از صفر. اثبات لم اسپرنر را به گونه‌ای تغییر می‌دهیم که این لم را نتیجه دهد.

اثبات. به هر یال در مثلث‌بندی یک برچسب نسبت می‌دهیم. اگر یک یال بین دو مثلث مشترک باشد در این صورت دارای دو برچسب خواهد بود که هرکدام مربوط به یک مثلث کودک است. حال یک یال در یک مثلث کودک را درنظر بگیرید که دارای برچسب راسی i و j در جهت ساعتگرد است. در این صورت برچسب یال را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۰ & j = i \mod ۳ \\ ۱ & j = i + ۱ \mod ۳ \\ -۱ & j = i - ۱ \mod ۳ \end{cases}$$

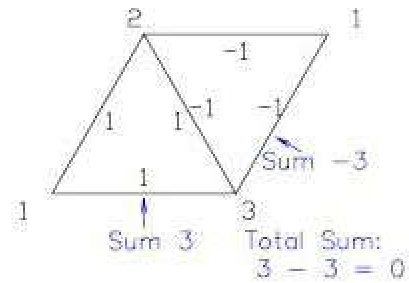
در مورد این برچسب‌گذاری یالی، ویژگی‌های زیر را داریم:

- مجموع برچسب‌های یال‌های یک مثلث کودک ۳-۲-۱ ساعتگرد ۳ است و برای یک مثلث ۳-۲-۱ پادساعتگرد ۳- است، و در غیر این صورت صفر است.
- اگر یک یال بین دو مثلث مشترک باشد در این صورت برچسب آن در یک مثلث، منفی برچسب آن در دیگری است.
- مجموع برچسب‌های یالی یک چندضلعی که از ترکیب چند مثلث کودک حاصل شده‌است برابر است با مجموع، مجموع‌های برچسب‌گذاری یالی مثلث‌های کودک تشکیل‌دهنده‌ی آن.

مجموع یال‌های مثلث بزرگ ۳ است زیرا مجموع روی هر ضلع برابر ۱ است(فرض کرده‌ایم که به صورت ساعت‌گرد مثلث برچسب‌گذاری شده است.). حال با استفاده از ویژگی سوم، مجموع برچسب‌های تمام مثلث‌های کودک برابر ۳ است یعنی

$$۳A - ۳B = ۳ \Rightarrow A - B = ۱$$

□



شکل ۵: ویژگی سوم، در مورد چندضلعی‌ها

مختصات مرکزی باری[۳]

مختصات مرکزی باری یک نقطه درون یک مثلث را به صورت میانگین وزن‌دار رئوس مثلث در نظر می‌گیریم. به عبارتی مثلث را به عنوان یک پوش محدب در نظر بگیرید، در این صورت هر نقطه‌ی مثلث را می توان به شکل

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c$$

نوشت که در آن

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

و a, b, c مختصات رئوس مثلث است. پس مختصات مرکزی باری به صورت سه‌تایی‌های مرتب است که مجموعشان ۱ است. برای مثال اگر $(0,0)$، $(0,1)$، $(1,0)$ سه راس مثلث باشند در این صورت مختصات مرکزی باری آن‌ها به ترتیب $(0,0,1)$، $(0,1,0)$، $(1,0,0)$ است. در این مثال مختصات مرکزی باری نقطه‌ی $(1/4, 1/4)$ باید $(1/2, 1/4, 1/4)$ شود.

قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت براور

قضیه ۵. (*نقطه‌ی ثابت برای* $n = 2$) *هر تابع پیوسته از مثلث به خودش دارای نقطه‌ی ثابت است.*

اثبات. فرض کنید f تابعی پیوسته از مثلث T به خودش باشد. می‌نویسیم $(a, b, c) \to (a', b', c')$ اگر در مختصات مرکزی باری $f(a, b, c) = (a', b', c')$ باشد. هر نقطه درون مثلث را به صورت زیر برچسب‌گذاری می‌کنیم. فرض کنید $(a, b, c) \to (a', b', c')$:

- اگر $a' < a$ در این صورت برچسب (a, b, c) را ۱ در نظر می‌گیریم.
- اگر $a' \geq a$ و $b' < b$ در این صورت برچسب (a, b, c) را ۲ در نظر می‌گیریم.
- اگر $a' \geq a$ و $b' \geq b$ اما $c' < c$ در این صورت برچسب (a, b, c) را برابر ۳ درنظر می‌گیریم.

اگر نتوانیم برای (a, b, c) یک برچسب بیابیم در این صورت $a' \geq a$، $b' \geq b$، $c' \geq c$ بنابراین $a' = a$، $b' = b$، $c' = c$، پس (a, b, c) یک نقطه‌ی ثابت است. پس فرض می‌کنیم که تمامی نقاط را برچسب‌گذاری کرده‌ایم. در غیر این صورت نقطه‌ی ثابت داریم و حکم ثابت است.
می‌خواهیم به دنباله‌ای از مثلث‌های کوچک ۳–۲–۱ برسیم که به یک نقطه همگرا هستند. اگر این نقطه، نقطه‌ی ثابت نباشد پیوستگی f ما را به این سمت می‌برد که تمامی گوشه‌ها دارای یک برچسب هستند. این مطالب را به صورت زیر بیان می‌کنیم.

---

[۳] Barycentric Coordinate

ابتدا لازم است نشان دهیم که این برچسب‌گذاری یک برچسب‌گذاری اسپرنر است. اگر به گوشه‌ها نگاه کنیم، مطالب زیر را می‌یابیم:

- اگر $(a', b', c') \rightarrow (۱, ۰, ۰)$، با توجه به اینکه اگر $a' \leq ۱$ در این صورت $a' = ۱$، پس $(۱, ۰, ۰)$ نقطه‌ی ثابت است، نتیجه می‌شود که $a' < ۱$. پس برچسب این گوشه برابر ۱ است.

- اگر $(a', b', c') \rightarrow (۰, ۱, ۰)$ در این صورت $a' \geq ۰$ اما $b < ۱$ زیرا در غیر این صورت این گوشه نقطه‌ی ثابت است پس برچسب این گوشه ۲ است.

- به طور مشابه برچسب $(۰, ۰, ۱)$ برابر ۳ است.

- اگر به نقاط به شکل $(a, b, ۰)$ نگاه کنیم که روی خط واصل بین $(۱, ۰, ۰)$ و $(۰, ۱, ۰)$ هستند نگاه کنیم، می‌بینیم که اگر $(a', b', c') \rightarrow (a, b, ۰)$ در این صورت $a' < a$ یا $b' < b$، بنابراین برچسب همواره ۱ یا ۲ است. زیرا در غیر این صورت $a' \geq a$، $b' \geq b$ و $c' \geq ۰$ بنابراین $a = a', b = b', c = c'$ و این نقطه، نقطه‌ی ثابت است.

- به طور مشابه می‌توان دید که برچسب نقاط روی خط واصل بین $(۰, ۱, ۰), (۰, ۰, ۱)$ برابر ۲ یا ۳ است و برچسب نقاط خط بین $(۱, ۰, ۰), (۰, ۰, ۱)$ برابر ۳ یا ۱ است.

بنابراین اگر به این طریق یک مثلث‌بندی را برچسب‌گذاری کنیم یک برچسب‌گذاری اسپرنر خواهیم‌داشت.
حال دنباله‌ای از مثلث‌بندی‌ها را در نظر می‌گیریم که قطرشان به صفر میل می‌کند(قطر یک مثلث‌بندی بیشترین فاصله‌ی بین رئوس مجاور در مثلث‌بندی است). هر کدام از این مثلث‌بندی‌ها حداقل یک ۳-۲-۱ مثلث کودک دارد. فرض کنید این مثلث دارای رئوس زیر است:

$$(x_{n,۱}, y_{n,۱}, z_{n,۱}), (x_{n,۲}, y_{n,۲}, z_{n,۲}), (x_{n,۳}, y_{n,۳}, z_{n,۳})$$

که به ترتیب دارای برچسب ۱ و ۲ و ۳ هستند. اندیس n نشان می‌دهد که مثلث مربوط به مثلث‌بندی مرحله‌ی nام در دنباله‌ای است که قطرش به صفر میل می‌کند.
حال بنا به قضیه‌ی وایرشتراس[۴] (هر دنباله‌ی کراندار در $\mathbb{R}^n$ دارای زیردنباله‌ای همگراست)، زیردنباله‌ای همگرا یافت می‌شود که

$$(x_{n_k,i}, y_{n_k,i}, z_{n_k,i}) \rightarrow (x, y, z)$$

برای $۱ \leq i \leq ۳$. می‌توانیم سه زیردنباله را یکی درنظر بگیریم زیرا قطر مثلث به صفر میل می‌کند.(همچنین می‌توانیم از قضیه‌ی وایرشتراس سه بار استفاده کنیم و به یک زیردنباله برسیم که برای هر $۱ \leq i \leq ۳$ همگرا به (x, y, z) است). حال فرض کنید:

$$(x_{n_k,i}, y_{n_k,i}, z_{n_k,i}) \rightarrow (x'_{n_k,i}, y'_{n_k,i}, z'_{n_k,i})$$

$$(x, y, z) \rightarrow (x', y', z')$$

بنابراین داریم(با توجه به برچسب‌گذاری اسپرنر):

$$x'_{n_k,۱} \leq x_{n_k,۱}$$

چون این راس دارای برچسب ۱ است، و بنابر پیوستگی داریم:

$$x' \leq x$$

به طور مشابه $y' \leq y$ و $z' \leq z$. پس (x, y, z) نقطه‌ی ثابت است. □

با استفاده از لم ترکیبیاتی اسپرنر، یکی از قضایای توپولوژیک را ثابت کردیم که تکنیک بسیار جالبی است. بخش بسیار زیادی از توپولوژی جبری به کمک این تکنیک، یعنی مثلث‌بندی فضاها بیان می‌شود.
قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت براور کاربردهای فراوانی در نظریه‌ی بازی‌ها برای اثبات وجود تعادل در بازی‌ها، در نظریه معادلات دیفرانسیل و بسیاری دیگر از بخش‌های ریاضیات دارد.

[۴] Bolzano-Weierstrass