کاربردهایی از توپولوژی زاریسکی

ابوالفضل طاهری

در این نوشتار می‌خواهیم به کاربردهایی از توپولوژی زاریسکی بپردازیم. توپولوژی زاریسکی از مباحثی است که در هندسه‌ی جبری برای بررسی چندجلمه‌ای‌ها مطرح می‌شود و در واقع ضعیف‌ترین توپولوژی است که چندجمله‌ای‌ها تحت آن پیوسته‌اند.

در ادامه ابتدا مقدماتی را مطرح می‌کنیم، سپس در بخش ۲ اثباتی از قضیه‌ی کیلی-همیلتون را ارائه می‌کنیم که همین مقدمات برای آن کافی است. اما در بخش ۳ به مبحثی می‌پردازیم که پیش‌نیازهای بیش‌تری نیاز دارد، و گفتن آن‌ها خارج از حوصله‌ی این نوشتار است و خواننده می‌تواند به [۷] و یا Field and Galois Theory از Patrick Morandi مراجعه کند.

۱ مقدمات

فرض کنید K یک میدان باشد، منظور از یک n-فضای آفین روی K حاصلضرب دکارتی $K \times \cdots \times K$ (n بار) است. این فضا را با K^n، یا $\mathbb{A}^n(K)$ و یا $\mathbb{A}$ نمایش می‌دهیم. در حالت خاص $n = ۱$ این فضا را خط آفین و در حالت $n = ۲$ صفحه را آفین می‌نامیم.

اگر F یک چندجمله‌ای غیرثابت در $K[x_۱, \ldots, x_n]$ باشد، مجموعه صفرهای F یک ابررویه[۱] نامیده می‌شود و با $V(F)$ نماش داده می‌شود. یک ابر صفحه در $K^۲$، به عبارت دیگر، صفرهای یک چندجمله‌ای دو متغیره غیرثابت یک خم مسطح آفین نامیده می‌شود.

فرض کنید S یک مجموعه از چندجمله‌ای‌ها در $K[x_۱, \ldots, x_n]$ باشد. قرار می‌دهیم
$$V(S) = \{p \in K^n \mid \forall F \in S; F(p) = ۰\}$$

در این صورت $F(S) = \cap_{F \in S} V(F)$. اگر $S = \{F_۱, \ldots, F_k\}$، در این صورت $V(S)$ را به صورت $V(F_۱, \ldots, F_n)$ نمایش می‌دهیم.

زیرمجموعه‌ی $X \subset K^n$ یک مجموعه‌ی جبری آفین نامیده می‌شود اگر زیرمجموعه‌ی $S \subset K[x_۱, \ldots, x_n]$ موجود باشد به طوری که $X = V(S)$.

در زیر خواصی ساده از مجموعه‌های جبری آفین را می‌بینید:

- فرض کنید $S_۱, S_۲ \subset K[x_۱, \ldots, x_n]$ در این صورت اگر $S_۱ \subset S_۲$ آنگاه داریم $V(S_۱) \supset V(S_۲)$.
- اگر $F, G \in K[x_۱, \ldots, x_n]$ آنگاه $V(FG) = V(F) \cup V(G)$.
- فرض کنید $S_۱, S_۲ \subset K[x_۱, \ldots, x_n]$، خواهیم داشت:
$$V(S_۱) \cup V(S_۲) = V(\{fg : f \in S_۱, g \in S_۲\}) = V(S)$$

از مطلب فوق نتیجه می‌شود اجتماع تعداد متناهی مجموعه‌ی جبری آفین، یک مجموعه‌ی جبری آفین است.

- $V(۱) = \emptyset$ و $V(۰) = K^n$.

[۱] hyper surface

- اگر $S \subset K[x_1, \dots, x_n]$ و I ایده‌آل تولید شده به وسیله‌ی S باشد آنگاه $V(I) = V(S)$.
- اگر $S_\alpha \subset K[x_1, \dots, x_n]$ آنگاه $V(\cup_\alpha S_\alpha) = \cap_\alpha V(S_\alpha)$.

فرض کنید K یک میدان و X زیرمجموعه‌ای از K^n باشد، مجموعه‌ی همه‌ی چندجمله‌ای‌ها در $K[x_1, \dots, x_n]$ که روی X صفر می‌شوند تشکیل یک ایده‌آل در $K[x_1, \dots, x_n]$ می‌دهند. این ایده‌آل را با $I(X)$ نمایش می‌دهند.

$$I(X) = \{F \in K[x_1, \dots, x_n] \mid \forall a \in X; F(a) = 0\}$$

توجه کنید که I را می‌توان به عنوان یک نگاشت در نظر گرفت که به هر زیرمجموعه‌ی K^n یک ایده‌آل در $K[x_1, \dots, x_n]$ نسبت می‌دهد. همچنین V می‌تواند به عنوان یک نگاشت در نظر گرفته شود که به هر زیرمجموعه از $K[x_1, \dots, x_n]$ یک مجموعه‌ی جبری آفین نسبت می‌دهد.

در زیر برخی از خواص I را می‌بینیم:

- فرض کنید $X, Y \subset K^n$ در این صورت اگر $X \subset Y$ آنگاه $I(X) \supset I(Y)$.
- $I(\emptyset) = K[x_1, \dots, x_n]$، اگر K نامتناهی باشد $I(K^n) = \{0\}$، و برای $a_1, \dots, a_n \in K$، $I((a_1, \dots, a_n)) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$
- برای هر زیرمجموعه‌ی $X \subset K^n$ داریم $X \subset V(I(X))$ و تساوی اتفاق می‌افتد اگروتنها اگر X یک مجموعه‌ی جبری آفین باشد.
- برای هر زیرمجموعه‌ی $S \subset K[x_1, \dots, x_n]$ داریم $S \subset I(V(S))$ و تساوی اتفاق می‌افتد اگر وتنها اگر S یک ایده‌آل یک مجموعه‌ی جبری آفین باشد.
- $I(X_1 \cup X_2) = I(X_1) \cap I(X_2)$ و به طور کلی $I(\cup_\alpha X_\alpha) = \cap_\alpha I(X_\alpha)$.

فرض کنید K یک میدان باشد و $n \geq 1$، توپولوژیکی زاریسکی را روی K^n به این صورت تعریف می‌کنیم که بسته‌های این توپولوژی را مجموعه‌های جبری آفین درنظر می‌گیریم. به راحتی می‌توان دید که مکمل مجموعه‌های جبری آفین یک توپولوژی روی K^n تعریف می‌کند.

فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد، X را تحویل‌پذیر گوییم اگر بتوان X را به صورت اجتماع دو زیرمجموعه‌ی سره و بسته آن نوشت. اگر X تحویل‌ناپذیر نباشد آن را تحویل‌ناپذیر می‌گوییم.

قضیه ۱. *یک زیرمجموعه‌ی X از K^n تحویل‌ناپذیر است اگر وتنها اگر $I(X)$ یک ایده‌آل اول $K[x_1, \dots, x_n]$ باشد.*

نتیجه ۲. *از قضیه‌ی فوق نتیجه می‌شود اگر K میدان نامتناهی باشد، آنگاه K^n تحویل‌ناپذیر است.*

قضیه ۳. *فرض کنید K میدانی نامتناهی باشد، آنگاه هر مجموعه‌ی ناتهی و باز در K^n چگال است.*

برای آشنایی بیشتر با مطالب فوق، و مشاهده‌ی اثبات گزاره‌ها می‌توانید به [۱] تا [۳] مراجعه کنید.

۲ قضیه کیلی-همیلتون

در نظریه‌ی ماتریس‌ها، کیلی کارهای بسیاری انجام داد، اما یکی از باارزش‌ترین کارهای او مقاله‌ای بود که در آن قضیه‌ی کیلی-همیلتون مطرح شد که بیان می‌داشت هر ماتریس مربعی در چندجمله‌ای مشخصه‌ی خود صدق می‌کند.

در مقاله‌ای تحت عنوان A memoir on the theory of matrices که در سال ۱۸۵۸ از کیلی منتشر شد، کیلی قضیه‌ی کیلی-همیلتون را اثبات کرد. اثبات شامل محاسبه برای ماتریس‌های 2×2 و نشان دادن اینکه می‌توان آن را به ماتریس‌های 3×3 گسترش داد، بود. سپس او بیان داشت که نتیجه را می‌توان به حالت کلی تعمیم داد. همچنین اضافه کرد: "لازم نمی‌دانم که در حالت کلی، برای ماتریس‌های با هر درجه‌ای، قضیه را اثبات کنم."

همیلتون مستقل از کیلی با استفاده از کواترنیون‌ها، و بدون استفاده از ماتریس‌ها، قضیه را برای $n = 4$ اثبات کرد. سپس کیلی در مقاله‌ای دیگر با کمک ماتریس‌ها به این مساله مهم پرداخت و آن را مساله کیلی-همیلتون نامید. در این بخش با استفاده از توپولوژی زاریسکی قضیه کیلی-همیلتون را اثبات می‌کنیم.

منظور از $M_n(K)$ مجموعه ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های در میدان K می‌باشد و $GL_n(K)$ مجموعه ماتریس‌های وارون‌پذیر با درایه‌های در میدان K می‌باشد.

فرض کنید $x_1, \dots, x_n$ متغیرهایی در میدان K باشند. kامین تابع متقارن اولیه از $\{x_i\}$ را تعریف می‌کنیم:

$$\mu_k(x_1, \dots, x_n) \sum (x_{i_1} \dots x_{i_k})$$

که این مجموع روی تمام زیرمجموعه‌های $\{i_1, \dots, i_k\}$ از $\{1, \dots, n\}$ است.

خواص زیر به راحتی در مورد توابع متقارن اولیه بدست می‌آید:

- فرض کنید G یک چندجمله‌ای متقارن روی $\{x_i\}$ باشد؛

$$G(x_1, \dots, x_n) = G(x_{\beta(1)}, \dots, x_{\beta(n)})$$

برای تمامی جایگشت‌های روی ۱ تا n برقرار باشد، آنگاه G را می‌توان برحسب توابع متقارن اولیه $\mu_k(x_1, \dots, x_n)$ نوشت.

- اگر $f \in P_n$، $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$، باشد، آنگاه ضرایب f به وسیله‌ی توابع متقارن اولیه روی ریشه‌ها، $\{r_i\}$، بدست می‌آید:

$$a_{n-k} = (-1)^k \mu_k(r_1, \dots, r_n); k = 1, \dots, n$$

اثبات مطالب فوق را در [۴] ببینید.

قضیه ۴. *(قضیه کیلی-همیلتون) فرض کنید $A \in M_n(K)$ باشد. اگر $p_A(t) = \det(tI - A)$ آنگاه $p_A(A) = 0$.*

لم ۵. *مجموعه ماتریس‌های در $M_n(K)$ با مقادیر ویژه تکراری مجموعه‌ی جبری‌اند.*

اثبات. فرض کنید A یک ماتریس باشد و p_A چندجمله‌ای مشخصه این ماتریس باشد و $\{r_1, \dots, r_n\}$ ریشه‌های این چندجمله‌ای باشند. تعریف می‌کنیم $\operatorname{disc}(p_A) = \prod_{i<j}(r_i - r_j)^2$. این تابع صفر است اگر وتنها اگر p_A ریشه‌ی تکراری داشته باشد. از طرفی $\operatorname{disc}(p_A)$ نسبت به تمامی جایگشت‌های $\{1, \dots, n\}$ روی ریشه‌ها ثابت است، پس می‌توان آن را به صورت یک چندجمله‌ای برحسب توابع متقارن اولیه از $r_1, \dots, r_n$ که همان ضرایب p_A هستند، نوشت. همچنین از آنجاییکه ضرایب p_A بر حسب چندجمله‌ای‌هایی از درایه‌های A قابل بیان هستند پس کلا $\operatorname{disc}(p_A)$ یک چندجمله‌ای بر حسب درایه‌های A است و ماتریس‌هایی که مقادیر ویژه‌ی تکراری دارند در این چندجلمه‌ای صدق می‌کنند و بنابراین مجموعه‌ی جبری‌اند. □

لم ۶. *فرض کنید $D_n(K)$ مجموعه ماتریس‌های $n \times n$ روی میدان نامتناهی K باشد که مقادیر ویژه متمایز دارند. در این صورت $D_n(K)$ در $M_n(K)$ با توپولوژی زاریسکی چگال است.*

اثبات. مجموعه‌ی $D_n(K)$ به وضوح ناتهی است. مجموعه ماتریس‌های با مقادیر ویژه‌ی تکراری مجموعه‌ی جبری‌اند و در نتیجه مکمل آن یعنی $D_n(K)$ باز است. حال با توجه به قضیه‌ی ۳ نتیجه می‌شود که $D_n(K)$ در $M_n(K)$ چگال است. □

قضیه ۷. *هر ماتریس $A \in D_n(K)$ قطری‌پذیر است، یعنی وجود دارد ماتریس $T \in GL_n(K)$ به طوری که $T^{-1}AT$ قطری است.*

اثبات. فرض کنید D ماتریس قطری مقادیر ویژه A، از $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ باشد و T ماتریس بردارهای ویژه $\nu_1, \dots, \nu_n$ متناظر با $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ به صورت ستونی باشد. آنگاه $AT = TD$. پس کافی است نشان دهیم T وارون‌پذیر است و بنابراین کافی است نشان دهیم ν_iها مستقل خطی‌اند. فرض کنید $\sum_{i=1}^m a_i\nu_i = 0$ که m کمترین مقدار ممکن است که تمام a_iها همگی صفر نباشند. پس می‌توان فرض کرد $a_1 \neq 0$. حال طرفین تساوی را روی A اثر دهید بدست می‌آوریم $\sum_{i=1}^m a_i\lambda_i\nu_i = 0$. از طرفی با ضرب تساوی فوق در λ_1 بدست می‌آوریم $\sum_{i=1}^m a_i\lambda_1\nu_i = 0$. حال با کم کردن دو رابطه‌ی اخیر از یکدیگر، داریم:

$$\sum_{i=1}^m a_i\lambda_i - \sum_{i=1}^m a_i\lambda_1 = 0 \Rightarrow \sum_{i=2}^m a_i(\lambda_i - \lambda_1)\nu_i = 0$$

که با فرض مینیمم بودن m در تناقض است. □

حال به اثبات قضیه کیلی-همیلتون می‌پردازیم.

اثبات. (قضیه کیلی-همیلتون) می‌خواهیم نشان دهیم مورفیسم $f: K^{n^2} \to K$ که $A \to p_A$ تابع صفر است. چون $D_n(K)$ در $M_n(K)$ چگال است کافی است حکم را برای $A \in D_n(K)$ ثابت کنیم. با توجه به قضیه‌ی قبل $A \in D_n(K)$ قطری‌پذیر است. داریم:

$$p_{T^{-1}AT}(T^{-1}AT) = T^{-1}p_A(A)T$$

بنابراین کافی است حکم را برای Aهای قطری ثابت کنیم. پس فرض کنید A ماتریس قطری است که $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ درایه‌های قطر آن باشند. برای محاسبه‌ی $p_A(A)$، p_A را روی A اثر می‌دهیم، p روی تک تک درایه‌های ماتریس عمل می‌کند و تمام درایه‌ها به جز درایه‌های قطر اصلی صفر است. درایه‌های قطر اصلی نیز مقادیر ویژه هستند که تحت اثر p_A صفر می‌شوند و ماتریس حاصل ماتریس صفر است. بنابراین حکم ثابت می‌شود. □

۳ قضایای پایه نرمال و پایه اولیه

در این بخش می‌خواهیم نشان دهیم که خواص جبری توسیع‌های میدانی را می‌توانیم با خصوصیات مورفیسم‌های بین واریته‌های آفین بیان کنیم. به عنوان کاربرد قضایای پایه اولیه و پایه نرمال که دو قضیه‌ی ساده در جبر است را توسعه می‌دهیم. مطالب این بخش براساس مقاله‌ی Generalizations of the Primitive and Normal Basis Theorems از دکتر شهرام بیگلری می‌باشد. در این بخش از نمادگذاری و نتایجی از [۷] نیز استفاده می‌کنیم که امکان ذکر آن‌ها در اینجا نمی‌باشد.

ابتدا نتایجی در مورد توپولوژی زاریسکی روی فضاهای آفین استاندارد و زیرمجموعه‌های آن‌ها ثابت می‌کنیم. تمامی نتایج از تعاریف بدست می‌آید. سپس به قضیه اعضای اولیه می‌پردازیم. برای این قضیه از این واقعیت استفاده خواهیم کرد که توسیع میدانی E/F از میدان‌های نامتناهی، جدایی‌پذیر است اگر وتنها اگر وجود داشته باشد میدان $K \subset E$ و F-جبر نشاننده $E \to K^n$ به طوری که تصویر آن با توپولوژی زاریسکی چگال باشد. این موضوع توسیع قضیه‌ی اعضای اولیه را نتیجه می‌دهد:

قضیه ۸. *فرض کنید E/F یک توسیع جدایی‌پذیر درجه متناهی از میدان‌های نامتناهی باشد و S یک مجموعه‌ی متناهی از چندجمله‌ای‌های ناثابت روی F باشد. آنگاه نامتناهی $a \in E$ وجود دارد به طوری که*

$$\forall h \in S; E = F(h(a))$$

نشان خواهیم داد که نامتناهی $a \in E$ وجود دارد به طوری که $E = F[a]$ و $N_{E/F}(a) = ۱$.

در مرحله‌ی بعد می‌بینیم که توسیع E/F از درجه‌ی n روی میدان‌های نامتناهی، گالواست اگر وتنها اگر یک F-جبر نشاندن از $E \to E^n$ وجود داشته باشد به طوری که تصویر آن با توپولوژی زاریسکی چگال باشد. با توجه به این مطلب خواهیم داشت:

قضیه ۹. *فرض کنید توسیع E/F، توسیع گالوا از درجه متناهی از میدان‌های نامتناهی باشد، و S مجموعه‌ای متناهی از چندجمله‌ای‌های ناثابت روی F باشد. در این صورت نامتناهی $a \in E$ وجود دارد به طوری که برای هر $h \in S$ داریم:*

- $E = F(h(a))$
- *$\{\sigma(h(a)) \mid \sigma \in Gal(E/F)\}$ یک پایه برای E/F است.*

این قضیه در واقع توسیع قضیه عضو اولیه و پایه نرمال است. در حالت کلاسیک این قضیه، می‌بینیم که برای توسیعی که $E \neq F$ است، تعداد نامتناهی $a \in E$ وجود دارد که $E = F(a)$ و $N_{E/F}(a) = ۱$ و $\{\sigma(a) \mid \sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)\}$ یک پایه برای E روی F است.

نتایجی در مورد توپولوژی زاریسکی

گزاره ۱۰. *فرض کنید K یک میدان باشد و توپولوژی زاریسکی را روی K^n در نظر بگیرید. در این صورت هر خودریختی K-خطی از K^n پیوسته است.*

اثبات. با توجه به اینکه از توپولوژی زاریسکی استفاده می‌کنیم و تابع K-خطی است به راحتی می‌توان دید که وارون یک گوی باز در K^n باز است و این حکم را نتیجه می‌دهد. □

گزاره ۱۱. *فرض کنید $F \subset K$ یک توسیع از میدان‌های نامتناهی باشد و V یک F-فضای برداری است از K^n باشد. در این صورت بستار V در K^n با توپولوژی زاریسکی، یک K-زیرفضای برداری است که توسط V تولید شده است.*

اثبات. فرض کنید V_K، K-زیرفضای برداری تولید شده توسط V باشد. در این صورت یک پایه برای V_K از اعضای V انتخاب می‌کنیم. حال خودریختی K-خطی f از K^n یافت می‌شود که V_K را به یک بسته زاریسکی K^r می‌برد که $r = \dim_K V_K$.

بنا به تعریف، f همیومورفیسم است و F-خطی است. داریم $F^r \subset f(V) \subset K^r$. کافی است نشان دهیم F^r در K^r چگال است، زیرا کافی است از رابطه‌ی بدست آمده بستار بگیریم.

نشان می‌دهیم اگر $p \in K[x_1, \dots, x_r]$ روی F^r صفر باشد آنگاه $p = 0$. عضو ثابت $(\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}) \in F^{r-1}$ را در نظر بگیرید. چندجمله‌ای $p(\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}, x_r) \in K[x_r]$ نامتناهی ریشه دارد و بنابراین معادل چندجمله‌ای صفر است. این نتیجه می‌دهد p به عنوان چندجمله‌ای روی x_r با درایه‌های در $K[x_1, \dots, x_{r-1}]$ روی تمام F^{r-1} صفر است. حال به کمک استقرا بدست می‌آید $p = 0$. □

نتیجه ۱۲. *فرض کنید E/F یک توسیع درجه n از میدان‌های نامتناهی باشد و K میدان شامل F است. در این صورت بستار تصویر نمایش منظم*

$$\xi_{E/F} : E \to End_F(E) \otimes_F K = M_n(K)$$

$$x \to (L_x : y \to xy) \otimes 1$$

یک K-زیرفضای از بعد n است.

لم ۱۳. *فرض کنید K یک میدان نامتناهی باشد و n یک عدد صحیح مثبت و $p_i \in K[x_1, \dots, x_i]$ چندجمله‌ای‌هایی باشند که $\frac{\partial p_i}{\partial x_i}$ برای تمام $i \leq n$ ناصفر است. آنگاه نگاشت:*

$$p : K^n \to K^n; (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \to (p_1(\lambda_1), \dots, p_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n))$$

تصویر زاریسکی چگال دارد.

اثبات. تعریف می‌کنیم:

$$\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n; p_i(\bar{\lambda}) = p_i(\lambda_1, \dots, \lambda_i)$$

حال با استقرا روی n ثابت می‌کنیم اگر برای چندجمله‌ای $q \in K[T_1, \dots, T_n]$ و برای هر $\bar{\lambda} \in K^n$ داشته باشیم $q(p_1(\bar{\lambda}), \dots, p_n(\bar{\lambda})) = 0$، آنگاه $q = 0$.

اگر $n = 1$ باشد، از ناثابت بودن p_1 نتیجه می‌شود که تصویر p به عنوان یک تابع روی K، زیرمجموعه‌ای نامتناهی است و $q(p_1(\bar{\lambda})) = 0$ باید بی‌نهایت جواب داشته باشد، پس $q = 0$.

حال فرض کنید حکم برای $n - 1$ درست است، حکم را برای n ثابت می‌کنیم. چندجمله‌ای q از n متغیر است، داریم

$$q = \sum_{r=0}^{m} q_r T_n^r; q_r \in K[T_1, \dots, T_{n-1}]$$

از فرض $\frac{\partial p_n}{\partial x_n} \neq 0$ نتیجه می‌شود $\bar{\mu} := (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ وجود دارد که چندجمله‌ای $p_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, T_n)$ ثابت نیست. بنابراین مجموعه‌ی $A = \{p_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n) \mid \lambda_n \in K\}$ نامتناهی است. پس نتیجه می‌شود $q(p_1(\bar{\mu}), \dots, p_{n-1}(\bar{\mu}), T_n)$ بی‌نهایت صفر دارد زیرا تمامی اعضای A ریشه‌ی آن هستند، و بنابراین برای تمامی rها داریم:

$$\forall \bar{\mu} \in K^{n-1}; q_r(p_1(\bar{\mu}), \dots, p_{n-1}(\bar{\mu}), T_n) = 0$$

و بنابر فرض استقرا $q = 0$. □

نتیجه ۱۴. *فرض کنید K میدان نامتناهی و $p \in K[t]$ را چندجمله‌ای ناثابت در نظر بگیرید. آنگاه نگاشت*
$$\tilde{p} : K^n \to K^n; (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \to (p(\lambda_1) \ldots, p(\lambda_n))$$
تصویر چگال دارد.

قضیه عضو اولیه

توسیع E/F را جدایی‌پذیر می‌گوییم اگر هر عضو $\lambda \in E$ ریشه‌ی ساده‌ی یک چندجمله‌ای ناصفر $f(x) \in F[x]$ باشد.
فرض کنید E/F یک توسیع جدایی‌پذیر با درجه متناهی روی میدان‌های نامتناهی باشد. یک F-جبر نشاننده $\xi_{E/F}$ که در نتایج فوق دیدیم را در نظر بگیرید، با توجه به خوش‌تعریفی و تعریف [۷]، وجود دارد $P \in GL_n(K)$ به طوری که تابعی که $x \in E$ را به $P^{-1}\xi_{E/F}(x)P$ می‌فرستد، یک F-جبر همیومورفیسم تعریف می‌کند $\bar{\xi}_{E/F} : E \to K^n$، که تصویر این همیومورفیسم با توجه به [۷] چگال زاریسکی است. در واقع در [۷] نشان داده شده است که عکس این حکم همیشه درست است.

گزاره ۱۵. *توسیع E/F از میدان‌های نامتناهی از درجه متناهی جدایی‌پذیر است اگر وتنها اگر وجود داشته باشد، توسیع میدانی K/F و F-جبر نشاننده $\bar{\xi}_{E/F} : E \to K^n$ که دارای تصویر زاریسکی چگال است.*

تعریف ۱۶. *فرض کنید K میدانی نامتناهی باشد و n عدد صحیح مثبتی است. تعریف می‌کنیم:*
$$P_K(n) = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n : \lambda_i \neq \lambda_j, \forall i \neq j\}$$

قضیه ۱۷. *(قضیه عضو اولیه) فرض کنید E/F توسیع جدای‌پذیر از درجه متناهی از میدان‌های نامتناهی است و S مجموعه‌ی متناهی از چندجمله‌ای‌های ناثابت روی F است. در این صورت نامتناهی $a \in E$ وجود دارد به طوری که برای هر $h \in S$ داریم $E = F(h(a))$.*

اثبات. قرار دهید $n := \dim_F E$. در این صورت برای $n = ۱$ حکم واضح است. بنابراین فرض کنید $n > ۱$.
میدان K، K^n، $\bar{\xi}_{E/F} : E \to K^n$، و $P_K(n)$ را که در بالا تعریف کردیم، در نظر بگیرید. برای هر $h \in S$، h را به صورت یک تابع روی E در نظر بگیرید و $\tilde{h}$ را مورفیسم متناظر با آن که در نتیجه ۱۴ آمد در نظر بگیرید. با توجه به تعریف، مجموعه‌ی $P_K(n)$ باز و ناتهی است و بنابراین $\tilde{h}^{-1}(P_n(K))$ زیرمجموعه‌ی ناتهی از K^n است. با توجه به چگال بودن $\bar{\xi}_{E/F}(E)$ در فضای تحویل‌ناپذیر K^n، داریم:
$$\bar{\xi}_{E/F}(E) \cap (\cap_{h \in S} \tilde{h}^{-1}(P_K(n))) \neq \emptyset$$
حال فرض کنید $\bar{\xi}_{E/F}(a)$ عضوی در این مجموعه باشد و $h \in S$. چون $\bar{\xi}_{E/F}$ یک F-جبر همیومورفیسم است داریم $\bar{\xi}_{E/F} o h = \tilde{h} o \bar{\xi}_{E/F}$. بنابراین $\tilde{h}(\bar{xi}_{E/F}(a)) \in P_K(n)$ اگر وتنها اگر $\bar{\xi}_{E/F}(h(a)) \in P_K(n)$.
با توجه به تعریف $P_K(n)$، چندجمله‌ای مینیمال $\bar{\xi}_{E/F}(h(a))$ روی K از درجه n است. بنابراین چندجمله‌ای مینیمال $h(a)$ روی F از درجه n است و در نتیجه $E = F(h(a))$. بعلاوه با توجه به تحویل‌ناپذیری K^n و بنابراین $\bar{\xi}_{E/F}(E)$، اشتراک بالا یک مجموعه‌ی نامتناهی است. $\square$

فرض کنید $E \neq F$، با توجه به اثبات فوق مجموعه
$$A := \{aF^* \mid E = F(h(a)), \forall h \in S\} \subset \frac{E^*}{F^*}$$
نامتناهی است.

نتیجه ۱۸. *فرض کنید E/F یک توسیع نابدیهی جدایی‌پذیر از میدان‌های نامتناهی با بعد متناهی باشد. در این صورت نامتناهی $a \in E$ وجود دارد به طوری که $E = F(a)$ و $N_{E/F}(a) = ۱$.*

اثبات. F-جبر نشاندن $\bar{\xi}_{E/F} : E \to K^n$ را در نظر بگیرید که در آن $K^n = D_n(K)$ است. بنابراین داریم $N_{E/F}(a) = \det(\bar{\xi}_{E/F}(a))$.
حال اگر قرار دهیم $S = \{x^n\}$ که $n = \dim_F E$، به عبارتی در صورت قضیه مجموعه‌ی S را چندجمله‌ای x^n در نظر بگیرید، آنگاه $b \in E^*$ را طوری می‌یابیم که $E = F(b^n)$. حال می‌توانیم قرار دهیم $a = b^n N_{E/F}(b)^{-1}$. اگر تنها تعداد متناهی

a وجود داشته باشد که در شرایط مساله صدق کند، مثلا $a_1,\dots,a_k$ متناظر با $b_1,\dots,b_k$، آنگاه برای $U=\tilde{x}^{n^{-1}}(P_K(n))$ و $C=\{x\in K^n \mid x^n-\det(x)=0\}$ داریم:

$$\bar{\xi}_{E/F}(E)\subset (D_n(K))\cup \bar{\xi}_{E/F}(b_1)C\cup\cdots\cup\bar{\xi}_{E/F}(b_k)C$$

که با تحویل‌ناپذیری K^n در تناقض است. □

تعمیم قضیه پایه نرمال

توسیع جدایی‌پذیر E/F با درجه‌ی متناهی گالواست اگر مجموعه‌ی F-جبر خودریختی‌های E دقیقا $[E:F]$ عضو داشته باشد. با استفاده از نتایجی که تا کنون بدست آوردیم، از توپولوژی زاریسکی برای توصیف این مطلب استفاده می‌کنیم و سپس قضیه‌ی پایه نرمال را ثابت می‌کنیم.

فرض کنید E/F یک توسیع گالوا از میدان‌های نامتناهی با درجه n باشد. میدان $E\supset K$ و F-جبر نشاننده $\xi:E\to K^n$ وجود دارد که تصویر آن با توپولوژی زاریسکی چگال است. چون E/F گالواست برای هر $i=1,\dots,n$ تصویر F-جبر منومورفیسم $\pi_i:E\to K$ با ضابطه‌ی $x\to\bar{\xi}_{E/F}(x)_i$ در E قرار می‌گیرد. عکس این مطلب نیز همیشه درست است.

گزاره ۱۹. *توسیع E/F از میدان‌های نامتناهی با درجه‌ی n، گالواست اگر وتنها اگر F-جبر نشاننده $\bar{\xi}_{E/F}:E\to D_n(E)$ وجود داشته باشد که تصویر آن با توپولوژی زاریسکی چگال باشد.*

تعریف ۲۰. *فرض کنید E/F توسیع گالوا از درجه‌ی n روی میدان‌ها نامتناهی است. اعضای $Gal(E/F)$ را با $\{1,\dots,n\}$ نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:*

$$N_E(n)=\{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in E^n;\det(\lambda_{\sigma\tau})\neq 0\}$$

که در آن $\det(\lambda_{\sigma\tau})$ را به این صورت تعریف می‌کنیم: فرض کنید f یک تابع یک به یک و پوشا از $Gal(E/F)$ به $\{1,\dots,n\}$ باشد. دترمینان فوق را دترمینان ماتریسی در نظر می‌گیریم که درایه‌ی ijام آن λ_a است که $a=f^{-1}(i)f^{-1}(j)$ می‌باشد.

قضیه ۲۱. *(پایه نرمال) فرض کنید E/F یک توسیع گالوا از درجه‌ی متناهی از میدان‌های نامتناهی، و S مجموعه‌ای از چندجمله‌ای‌های ناثابت روی F باشد. در این صورت تعداد نامتناهی $a\in E$ وجود دارد به طوری که برای هر $h\in S$ داریم $E=F(h(a))$ و $\{\sigma(h(a))\mid\sigma\in Gal(E/F)\}$ یک پایه برای E روی F است.*

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم $N_E(n)$ ناتهی است. زیرا برای $\lambda:=(1,0,\dots,0)$ داریم $\det(\lambda_{\sigma\tau})=\pm$. حال شبیه قضیه اعضای اولیه اثبات را ادامه می‌دهیم. مجموعه‌ی $P_K(n)$ را با $P_E(n)\cap N_E(n)$ جابه‌جا می‌کنیم و بدست می‌آوریم:

$$\bar{\xi}_{E/F}(E)\cap(\cap_{h\in S}\tilde{h}^{-1}(P_E(n)\cap N_E(n)))\neq\emptyset$$

فرض کنید $\bar{\xi}_{E/F}(a)$ عضوی از این مجموعه باشد و $h\in S$. با توجه به اثبات بالا $E=F(h(a))$. به عبارت دیگر، چون $\lambda:=\bar{\xi}_{E/F}(h(a))\in N_E(n)$، برای هر $\sigma\in\mathrm{Gal}(E/F)$ داریم $\lambda_\sigma=\sigma(h(a))$ بنابراین $\det(\lambda_{\sigma\tau})\neq 0$. با توجه به نتایجی از [۷] این هم ارز است با اثبات اینکه $\{\sigma(h(a))\mid\sigma\in\mathrm{Gal}(E/F)\}$ یک پایه برای E روی F است. □

نتیجه ۲۲. *فرض کنید E/F توسیع گالوا نابدیهی از میدان‌های نامتناهی با بعد متناهی باشد. در این صورت نامتناهی $a\in E$ وجود دارد به طوری که $E=F(a)$، $N_{E/F}(a)=1$ و $\{\sigma(a)\mid\sigma\in Gal(E/F)\}$ یک پایه برای E روی F است.*

تشکر و قدردانی

در پایان از استاد بزرگوار، دکتر محمد غلامزاده محمودی که راهنمای من در گردآوری این مطالب بودن، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

مراجع

[۱] غلامزاده‌محمودی، محمد، *آشنایی با هندسه جبری*، ۸۹–۸۸.

[2] William Fulton, *Algebraic Curve, An Introduction to Algebraic Geometry* , 1969.

[3] Donu Arapura, *Notes on Basic Algebraic Geometry* , 2008.

[4] A. Rosoff Jeffrey, *A Topological Proof of the Cayley-Hamilton Theorem* , Gustarus Adolphus College.

[5] Alessadro Perotti, *Http://www.science.unitn.it/ Perotti/HistorofLinearAlgebra.pdf* , 2008.

[6] Shahram Biglari, *Generalization of the Primitive and Normal Basis Theorem* , Communications in Algebra 37: 317-322.

[7] N. Bourbaki, *Algebra II. Elements of Mathematics* , Translated by P. M. Cohn and J. Howie, 1988.