قضیه‌ای جالب در نظریه‌ی مقدماتی گروه‌ها

خشایار فیلُم

هدف این مقاله‌ی کوتاه معرفی قضیه‌ای به نام "قضیه‌ی شور" در جبر مقدماتی و حل سه مساله‌ی ابتکاری به کمک این قضیه است. در واقع برای فهمیدن صورت قضیه‌ی مذکور و مسایل مرتبط، همان گونه که در ادامه خواهید دید به هیچ چیز بیشتر از اطلاعات جبر ۱ نیاز نیست ولی این مسائل به هیچ وجه بدیهی نیستند. قبل از بیان صورت این قضیه نمادگذاری‌هایی را که در ادامه به کار خواهیم برد، شرح می‌دهیم.

نمادگذاری و یادآوری

فرض کنید G یک گروه است و H زیرگروهی از آن باشد و $x \in G$.

- این را که H زیرگروه G است به صورت $H < G$ می‌نویسیم.
- عنصر همانی G را به e نشان می‌دهیم.
- زیرگروه مشتق G را به G' و مرکز G را به $Z(G)$ نمایش می‌دهیم.
- مشتق G کوچترین زیرگروهی از G است که در G نرمال است و گروه خارج‌قسمتی حاصل از آن آبلی است. به عبارت دیگر:

$$G' \subset H \iff H \text{در} G \text{نرمال و} \frac{G}{L} \text{آبلی است.}$$

- مرتبه‌ی عنصر x را با $o(x)$ نشان می‌دهیم.
- منظور از $[G:H]$ اندیس H در G است.
- مرکزساز (centralizer) x در G، زیرگروه زیر از G است:
$$C_G(x = \{a \in G \mid ax = xa\}$$
- کلاس تزویجی (conjugacy class) x در G یعنی مجموعه‌ی $\{axa^{-1} \mid a \in G\}$ در تناظر یک‌به‌یک است با مجموعه‌ی همدسته‌های چپ (یا راست) زیرگروه $C_G(x)$ از G. لذا اگر $[G:C_G(x)] < \infty$، تعداد عناصر کلاس تزویجی x متناهی و برابر $[G:C_G(x)]$ خواهد بود.
- نرمال‌ساز (normalizer) H در G به صورت
$$N_G(H) = \{x \in G \mid xHx^{-1} = H\}$$

تعریف می‌شود و بزرگترین زیرگروه G شامل H است که H در آن نرمال است. تعداد مزدوج‌های H یعنی تعداد زیرگروه‌های xHx^{-1} از G برابر است با: $[G:N_G(H)]$.

- قضیه‌ی ساختاری گروه‌های آبلی با تولید متناهی: اگر G آبلی و "با تولید متناهی" (finitely generated) باشد، آنگاه G را می‌توان به صورت جمع مستقیم تعداد متناهی از گروه‌های دوری نوشت:
$$G \cong \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}$$
که در آن برای هر $n \geq 2$، منظور از $\mathbb{Z}_n$ گروه دوری n عضوی $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ است.

حال به بیان صورت قضیه‌ی شور می‌پردازیم:

قضیه‌ی شور(Schur): فرض کنید G گروهی باشد که برای آن $[G:Z(G)] < \infty$ در این صورت G' متناهی است.
اثبات این قضیه را می‌توانید در کتاب An Introduction to the Theory of Groups نوشته‌ی J. Rotman بیابید. در ادامه، به حل سه مسئله به کمک این قضیه می‌پردازیم.

مساله ۱. *فرض کنید G یک گروه نامتناهی است که اندیس هر زیرگروه نابدیهی آن متناهی است. ثابت کنید G دوری است.*

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم G آبلی است. اگر $H < G$ و $H \neq \{e\}$ آنگاه H هم در ویژگی مذکور صدق می‌کند یعنی اندیس هر زیرگروه غیربدیهی آن متناهی است. چرا که بنابر فرض $[G:H] < \infty$ و اگر $\{e\} \neq K < H$ داریم $[G:K] < \infty$ و بنابراین به دلیل $[G:K] = [G:H].[H:K]$ خواهیم داشت: $[H:K] < \infty$. حال توجه کنید که اگر $Z(G) \neq \{e\}$ در این صورت $[G:Z(G)] < \infty$ و لذا از قضیه‌ی شور $|G'| < \infty$. حال اگر G' غیر بدیهی باشد، باید $[G:G'] < \infty$ که با توجه به نامتناهی بودن G و متناهی بودن G' امکان‌پذیری نیست. پس اگر $Z(G) \neq \{e\}$، G' بدیهی و لذا G آبلی است. پس هر گروه با خاصیت مساله در صورت نابدیهی بودن مرکزش آبلی است. از آنچه پیشتر گفته‌شده، این برای زیرگروه‌های غیربدیهی G هم برقرار خواهدبود. یعنی ثابت کردیم که:

(*): برای هر زیرگروه $H \neq \{e\}$ از G، $Z(H) = \{e\}$ یا H آبلی است.

حال برای اثبات آبلی بودن G از برهان خلف استفاده می‌کنیم: فرض کنید G آبلی نباشد. ادعا می‌کنیم که:

(**): رابطه‌ی جابه‌جا شدن در $G - \{e\}$ ترایایی است: اگر x, y, z عناصری غیربدیهی از G باشند و هریک از z, y با x جابه‌جا شوند، آنگاه z, y با یکدیگر هم جابه‌جا می‌شوند.

برای اثبات (**) توجه کنید که چون z, y با x جابه‌جا می‌شوند $y, z \in C_G(x)$. ولی چون $x \in C_G(x)$، $C_G(x) \neq \{e\}$ و لذا از (*) نتیجه می‌شود $Z(C_G(x)) = \{e\}$ و یا $C_G(x)$ آبلی است. حالت اول رخ نمی‌دهد چرا که از تعریف $C_G(x)$ داریم: $x \in Z(C_G(x))$. بنابراین $C_G(x)$ آبلی خواهد بود که نتیجه می‌دهد عناصر y, z از آن با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند و (**) ثابت می‌گردد.

حال به کمک (**) فرض خلف مبنی بر غیرآبلی بودن G را به تناقض می‌کشانیم: چون G آبلی نیست، $a, b \in G$ موجودند که $ab \neq ba$. لذا $a, b \neq e$. حال $a \in C_G(a)$ و $a \neq e$ پس $C_G(a) \neq \{e\}$ و لذا از فرض مساله $[G:C_G(a)] < \infty$ که نتیجه می‌دهد تعداد اعضای کلاس تزویجی a متناهی است. بنابراین مجموعه‌ی $\{b^i a b^{-i} \mid i \in \mathbb{N}\}$ متناهی است. این نشان می‌دهد که $r, s \in \mathbb{N}$ با $r > s$ موجودند که $b^r a b^{-r} = b^s a b^{-s}$ یا به عبارت دیگر $b^{r-s} a = a b^{r-s}$. اگر $b^{r-s} = e$ آنگاه $1 < o(b) < \infty$ چرا که $r > s$ و $b \neq e$ بود. بنابراین $1 < |\langle b \rangle| < \infty$. لذا چون G نامتناهی است، $\langle b \rangle$ زیرگروهی غیربدیهی از G است که برای آن $[G:\langle b \rangle]$ نامتناهی است. این با فرض مساله تناقض دارد. پس $b^{r-s} \neq e$. لذا b^{r-s} با a جابه‌جا می‌شود و $a, b, b^{r-s} \in G - \{e\}$. ولی b^{r-s} با b هم جابه‌جا می‌شود. پس چون بنابر (**) رابطه‌ی جابه‌جا شدن بر $G - \{e\}$ ترایایی است، a و b با هم جابه‌جا می‌شوند که تناقض است. پس به تناقض می‌رسیم و G آبلی است.

حال به راحتی می‌توان دید که G با تولید متناهی است: فرض کنید $x_1 \in G - \{e\}$. پس طبق فرض $[G:\langle x_1 \rangle] < \infty$. اگر $G = \langle x_1 \rangle$ که مساله حل است. در غیر این صورت یک عنصر $x_2 \in G - \langle x_1 \rangle$ انتخاب کنید. پس $[G:\langle x_1, x_2 \rangle] < [G:\langle x_1 \rangle]$. دوباره اگر $G = \langle x_1, x_2 \rangle$ که حکم مساله حل است. در غیر این صورت $x_3 \in G - \langle x_1, x_2 \rangle$ را در نظر می‌گیریم و ... . چون در هر مرحله اندیس زیرگروه جدید کم می‌شود، این فرایند سرانجام به پایان می‌رسد و rای موجود خواهد بود که برای آن $G = \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$. پس تا اینجا ثابت کردیم که G آبلی و با تولید متناهی است. حال بنابر قضیه‌ی ساختاری گروه‌های آبلی با تولید متناهی $G \cong \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}$ که در آن $m_1, \ldots, m_k \geq 2$ و $m \in \mathbb{N}$. اگر $k > 0$ یعنی $m_1, \ldots, m_k$ موجود باشند، آنگاه G عناصری به جز e از مرتبه‌ی متناهی دارد که امکان‌پذیر نیست. چرا که زیرگروه دوری تولید شده توسط چنین عناصری یک زیرگروه متناهی غیربدیهی خواهد بود که اندیس آن در G به دلیل نامتناهی بودن G متناهی نیست و این بنابر فرض مساله نمی‌تواند رخ دهد. لذا $G \cong \mathbb{Z}^m$ که در آن $m\mathbb{N}$. حال اگر $m \geq 2$، $\mathbb{Z}^m$ در سمت راست این یکریختی (و در نتیجه در G)

زیرگروه غیربدیهی از اندیس نامتناهی به صورت $\{(a,0,\dots,0) \mid a\in\mathbb{Z}\}$ دارد که باز هم با شرطی که روی G داریم در تناقض است. بنابراین $m=1$ و $G\cong\mathbb{Z}$. لذا G دوری است. □

مساله ۲. *فرض کنید G گروهی باشد که در آن مرتبه‌ی هر عنصری به جز همانی نامتناهی است. ثابت کنید اگر G یک زیرگروه دوری از اندیس متناهی داشته باشد، آنگاه G دوری است.*

اثبات. زیرگروه دوری مذکور از G را H می‌نامیم بنابراین $[G:H]$. ابتدا توجه کنید که بدون کاسته‌شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که H علاوه بر داشتن خواص فوق، نرمال هم هست. چرا که $H<N_G(H)<G$ و لذا $[G:N_G(H)]\le[G:H]<\infty$. پس تعداد مزدوج‌های H متناهی است بنابراین $g_1,\dots,g_s\in G$ موجودند که
$$\{xHx^{-1}\mid x\in G\}=\{g_1Hg_1^{-1},\dots,g_sHg_s^{-1}\}$$

در نتیجه
$$\cap_{x\in G}xHx^{-1}=\cap_{t=1}^{s}g_tHg_t^{-1}$$

و با استفاده از این تساوی
$$[G:\cap_{x\in G}xHx^{-1}]=[G:\cap_{t=1}^{s}g_tHg_t^{-1}]\le\prod_{t=1}^{s}[G:g_tHg_t^{-1}]=([G:H])^s<\infty$$

همچنین $\cap_{x\in G}xHx^{-1}$ به وضوح زیرگروهی نرمال از G است و به دلیل آنکه مشمول در زیرگروه دوری H است، خود دوری است. لذا زیرگروه $\cap_{x\in G}xHx^{-1}$ از G، علاوه بر آن که تمامی خواص H را دارد، نرمال هم هست و بنابراین با تعویض آن و H در صورت لزوم می‌توان فرض کرد که H یک زیرگروه دوری نرمال با اندیس متناهی است پس $y\in G$ موجود است که $H=\langle y\rangle$.
فرض کنید $[G:\langle y\rangle]=[G:H]=N$. اگر $y=e$، G دارای N عضو خواهد بود که نتیجه می‌دهد همه‌ی عناصر آن از مرتبه‌ی متناهی‌اند و لذا از مفروضات مساله $G=\{e\}$، و در این حالت حکم برقرار است. لذا فرض کنید $y\neq e$. ادعا می‌کنیم $y\in Z(G)$. برای اثبات توجه کنید که چون $\langle y\rangle$ در G نرمال است، می‌توان گروه خارج‌قسمتی $G/\langle y\rangle$ را تشکیل داد که به دلیل $[G:\langle y\rangle]=N$، N عضوی است. پس توان Nام هریک از عناصر آن همانی است. این نتیجه می‌دهد:
(۱): برای هر $x\in G$، $x^N\in\langle y\rangle$.

حال $x\in G$ را دلخواه بگیرید. نشان می‌دهیم x با y جابه‌جا می‌شود. چون $\langle y\rangle$ در G نرمال بود، به ازای $m\in\mathbb{Z}$ای $xyx^{-1}=y^m$. حال استقرایی ساده نتیجه می‌دهد برای هر $k\in\mathbb{Z}$، $xy^kx^{-1}=y^{mk}$. از (۱) می‌توان k را طوری گرفت که $x^N=y^k$ و در نتیجه y^k با x جابه‌جا می‌شود. بنابراین $xy^kx^{-1}=y^{mk}$ نتیجه می‌دهد که $y^k=y^{mk}$ یا معادلا $y^{k(m-1)}=e$. ولی بنابر فرض مساله G عنصر غیرهمانی از مرتبه‌ی متناهی ندارد و در نتیجه چون $y\neq e$، $k=0$ یا $m=1$. چون $x^N=y^k$، حالت اول نتیجه می‌دهد مرتبه‌ی x متناهی است و لذا از شرط مساله $x=e$ و بنابراین $xy=yx$. اگر هم $m=1$، چون m عددی بود که $xyx^{-1}=y^m$، باز هم $xy=yx$. در نتیجه نشان دادیم که هر $x\in G$ دلخواه با y جابه‌جا می‌شود و بنابراین $y\in Z(G)$. حال داریم $\langle y\rangle<Z(G)$ و لذا:
$$[G:Z(G)]\ge[G:\langle y\rangle]=N<\infty$$

به کار بردن قضیه‌ی شور نتیجه می‌دهد که G' متناهی است. پس تمامی عناصر G' از مرتبه‌ی متناهی‌اند و حال دوباره چون بنابر فرض عناصر مرتبه‌ی متناهی G همانی‌اند پس $G'=\{e\}$ و لذا G آبلی است.

علاوه بر آبلی بودن، G از تولید متناهی هم هست. داریم $N=[G\langle y\rangle]$ و لذا اگر همدسته‌های چپ $\langle y\rangle$ در G را به صورت $z_1\langle y\rangle,\dots,z_N\langle y\rangle$ بگیریم، $G=\cup_{i=1}^{N}z_i\langle y\rangle$ و در نتیجه $G=\langle y,z_1,\dots,y_N\rangle$. پس G یک گروه آبلی با تولید متناهی است و حال از قضیه‌ی ساختاری این گروه‌ها $G\cong\mathbb{Z}^m\oplus\mathbb{Z}_{m_1}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{m_k}$. دوباره چون G عنصری از مرتبه‌ی متناهی به غیر از همانی ندارد، هیچ یک از $\mathbb{Z}_{m_i}$ نمی‌توانند در سمت چپ ظاهر شوند. لذا $G\cong\mathbb{Z}^m$ که $m\in\mathbb{N}$. برای اتمام حل کافی است نشان دهیم که $m=1$.

بنابر (۱) برای هر $x\in G$ داشتیم $x^N\in\langle y\rangle$. پس اگر تحت یکریختی $G\cong\mathbb{Z}^m$، y به عنصر $(b_1,\dots,b_m)$ از $\mathbb{Z}^m$ برود:
$$\forall(a_1,\dots,a_m)\in\mathbb{Z}^m:(Na_1,\dots,Na_m)\in\{(tb_1,\dots,tb_m)\mid t\in\mathbb{Z}\}$$

گزاره‌ی فوق نتیجه می‌دهد که هر دو عضو $\mathbb{Z}^m$ بر $\mathbb{Z}$ وابسته‌ی خطی‌اند که به وضوح در حالت $m\ge 2$ امکان‌پذیر نیست. پس $m=1$ و $G\cong\mathbb{Z}$ که اثبات را تمام می‌کند. □

در نهایت به مساله‌ی آخر که شاید جالب‌تر از مسائل قبلی باشد می‌پردازیم.

مساله ۳. *فرض کنید G گروهی است که تعداد عناصر از مرتبه‌ی متناهی آن متناهی است. ثابت کنید این عناصر تشکیل یک زیرگروه می‌دهند.*

اثبات. مجموعه‌ی A را عناصر از مرتبه‌ی متناهی در G بگیرید. پس طبق فرض $|A| < \infty$ و باید نشان دهیم که A زیرگروه G است. ابتدا توجه کنید که بدون کاسته‌شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که A گروه G را تولید می‌کند. چرا که اگر $H = \langle A \rangle$ زیرگروهی از G باشد که عناصر A تولید می‌کنند، $A \subset H$ زیرمجموعه‌ی تمامی عناصر از مرتبه‌ی متناهی H خواهد بود و حال اثبات حکم برای H نتیجه می‌دهد که A زیرگروهی از H و لذا چون H خود زیرگروهی از G خواهد بود، یک زیرگروه G است. پس فرض می‌کنیم که عناصر متعلق به A گروه G را تولید می‌کنند یعنی $G = \langle A \rangle$.

اگر $x \in A$، تمامی عناصر کلاس تزویجی x همانند خود x از مرتبه‌ی متناهی‌اند. بنابراین بنابر شرط مساله روی G، تعداد عناصر کلاس تزویجی x در G متناهی است. ولی تعداد عناصر این کلاس برابر با $[G : C_G(x)]$ که در آن $C_G(x)$ مرکزساز x در G است. لذا برای هر $x \in A$، $[G : C_G(x)] < \infty$. با توجه به متناهی بودن A از این نامساوی‌ها می‌توان نتیجه گرفت:

$$[G : \cap_{x\in A} C_G(x)] \leq \prod_{x\in A} [G : C_G(x)] < \infty \qquad (1)$$

توجه کنید که $\prod_{x\in A}[G : C_G(x)]$ به دلیل $|A| < \infty$ معنی دارد. به دلیل اینکه $G = \langle A \rangle$ یک عنصر G در مرکز قرار دارد اگر و تنها اگر با تمامی عناصر A جابه‌جا شود. پس $Z(G) = \cap_{x\in A} C_G(x)$، و حال معادله‌ی (۱) نتیجه می‌دهد که $[G : Z(G)] < \infty$. پس بنابر قضیه‌ی شور زیرگروه مشتق G متناهی است. حال ادعا می‌کنیم:

ادعا: برای هر $x \in G$ مرتبه‌ی x در گروه G متناهی است اگر و تنها اگر مرتبه‌ی xG' در گروه G/G' متناهی باشد.

برای اثبات این ادعا توجه کنید که اگر در G، $o(x) < \infty$ آنگاه به ازای $n \in \mathbb{N}$ای $x^n = e$ و در نتیجه در گروه G/G' داریم $(xG')^n = x^n G' = G'$ که نشان می‌دهد مرتبه‌ی xG' در گروه مذکور متناهی است. برای اثبات عکس حکم توجه کنید که اگر مرتبه‌ی xG' در گروه G/G' متناهی باشد، به ازای $n \in \mathbb{N}$ای $x^n \in G'$. ولی G' متناهی بود و بنابراین در G داریم $(x^n)^{|G'|} = x^{n|G'|} = e$ که نتیجه می‌دهد $o(x) < \infty$ و طرف دیگر هم ثابت می‌شود.

حال به کمک ادعای فوق نشان می‌دهیم که $A < G$. چون A بنابر تعریف مجموعه‌ی عناصر از مرتبه‌ی متناهی G بود، عنصر همانی G را در بردارد. برای هر $x \in G$، $o(x) = o(x^{-1})$ که نشان می‌دهد اگر $x \in A$ آنگاه $x^{-1} \in A$. پس تنها قسمت باقیمانده در اثبات گروه بودن A، اثبات بسته بودن آن نسبت به ضرب است. اگر $x, y \in A$ آنگاه x و y عناصر از مرتبه‌ی متناهی Gاند و لذا بنابر ادعای فوق xG' و yG' عناصر از مرتبه‌ی متناهی G/G'اند. ولی این گروه آبلی است. در نتیجه مرتبه‌ی $(xG')(yG') = (xy)G'$ هم در این گروه متناهی است و حال استفاده مجدد از ادعای بالا نتیجه می‌دهد که مرتبه‌ی $xy \in G$ متناهی است یا معادلا $xy \in A$ و این حل مساله را به اتمام می‌رساند. $\square$