







مجله‌ی ریاضی شریف

سال اول شماره‌ی نخست

مدیر مسوول : دکتر امیر جعفری ؛ سردبیر : ابوالفضل طاهری ؛ نویسندگان : دکتر آرش رستگار، خشایار فیلم، ابوالفضل طاهری، آرمان خالدیان، عماد نصرالله پور، امیرحسین اکبر طباطبایی، اوژن غنی زاده خوب، محمد امین فضلی، نسترن نیک پرتو، مسعود آموزگار، کاوه حسینی ؛ طراحی : اوژن غنی زاده خوب ؛ طراحی سایت : محسن منصوریار ؛ ویراستار : شهاب ابراهیمی ؛ با تشکر از دکتر سیاوش شهشهانی، دکتر امیر جعفری، دکتر آرش رستگار و دکتر علیرضا زارعی

فهرست مطالب

پیشگفتار

بعد از مدت‌ها وقفه در انتشار "مجله رياضي شريف"، شماره اخير به همت دانشجويان دانشکده رياضي، دانشگاه صنعتي شريف بطور الکترونيکي در اختيار شما قرار دارد.

به ياد دارم در سال‌هاي ۷۱ و ۷۲ بعنوان يک دانشجوي کارشناسي خود با اشتياق بسيار، مقالات اين مجله را مي‌خواندم و بعد از بازگشت به دانشگاه شريف در سال ۸۸ بسيار متاسف شدم که ديگر اين مجله منتشر نمي‌شود. اکنون اميدوارم انتشار اين مجله در سال‌هاي آينده ادامه يابد و هر سال از سال قبل پربارتر و وزين‌تر گردد.

دانشجويان عزيز، اين توصيه برادرانه را از من بپذيريد، قسمت کمي از رياضياتي که مي‌آموزيد از کلاس‌هاي درس و اساتيد دانشگاه است و قسمت مهم‌تر آن را از يکديگر و برنامه‌هاي گروهي و مطالعه انفرادي خواهيد آموخت. زماني که من دانشجو بودم از دوستاني مانند رامين تکلوبيغش، مهزاد آجودانيان، آرش رستگار، علي رجائي و ديگران که آن‌ها نيز در آن زمان مانند من دانشجو بودند، بسيار آموختم.

بنابراين تلاش کنيد که در کارهاي علمي و فوق برنامه دانشکده همکاري کنيد و شما نيز در غني‌تر شدن اين مجله که متعلق به خود شما است، سهيم باشيد.

باتشکر
امير جعفري

مبانی زیباشناختی ریاضیات

دکتر آرش رستگار

در این مقاله سعی نموده‌ایم تا بین مبانی هنری و علمی ریاضیات وحدت و هماهنگی برقرار نماییم. از طرفی مصادیق هنر را چنان توسعه می‌دهیم تا حکمت ریاضی و فلسفه را در بر بگیرد و از طرف دیگر حوزه علم را چنان گسترش می‌دهیم تا ساختارهای انسانی دانشمندان را شامل شود. انبساط خواستگاه هنر به عالم مجردات و خواستگاه علم به عالم باطن زمینه را برای وحدت بخشی ابعاد زیبا شناسانه و حقیقت‌شناسانه‌ی ریاضیات فراهم می‌کند.

ریاضیات به عنوان هنر متعالی

هر چند بسیاری ریاضیات را تافته جدا بافته از علوم، بخصوص علوم تجربی می‌دانند، در مسئله شناخت مرز بین دانش و هنر ریاضیات و علوم تجربی و انسانی در یک گروه قرار می‌گیرند. شاید بتوان جوهر تمایز عمل و هنر را در اکتشافی بودن علم و آفرینشگری هنر دانست. موضع دانش و معرفت در برابر حقیقت بسیار منفعل و موضع هنر به مراتب فعال‌تر است. کار هنرمند را باید با سودمندی یا ارزش زیبائی شناختی آن به داوری گذارد. هیچ کوششی نیست که سراسر علم یا یکسره هنر باشد. دانشمند تا آنجا که برای رسیدن به هدف کشف و شناخت، ابزارهای متناسب و شیوه‌های ظریف ابداع می‌کند، هنرمند است؛ و هنرمند تا آنجا که برای رسیدن به هدف آفرینش هنری خود در پی معرفت یافتن به جهان برمی‌آید، دانشمند است. با این دیدگاه، زیبنده‌تر است بر بعضی موضوع‌هایی که به علم شهرت دارند نام هنر نهاد. مثلا هدف غایی علوم کاربردی تغییر دادن و مهار کردن محیط زندگی انسان است. آنها که به این علوم می‌پردازند بیشتر اهل عملند تا اهل تفکر. علوم عملی بر بنیاد دانشی استوار می‌شوند که از راه علوم محض فراچنگ می‌آید، و علوم محض به نوبه‌ی خود با ابزارهای فنی علوم عملی به پیش می‌روند!

می‌بینیم که نمی‌توان ابعاد هنری ریاضیات را در خلاقیت ریاضی خلاصه نمود. خلق یک نظریه‌ی ریاضی زیبا، و خلاقیت در کاربرد علمی یک نظریه‌ی ریاضی در یک جنس نیستند. با این حال هر دو نوع این خلاقیت‌ها در علوم تجربی و انسانی مشابه دارند. فرضیه‌سازی و نظریه‌پردازی در علوم دیگر بسیار شباهت به خلق یک قضیه‌ی زیبا، یا یک برهان زیبا و یا حتی یک تعریف زیبا دارد. هرچند جز در فلسفه و الهیات درجه‌ی تجرید این نظریه‌پردازی‌ها به پای ریاضیات نمی‌رسد. کاربرد عملی یک نظریه‌ی ریاضی از لحاظ جنس خلاقیت بسیار مشابه کاربرد یک نظریه جامعه‌شناسی است. هرچند درجه تجرید علوم ریاضی و جامعه‌شناسی قابل مقایسه نیستند. اگر بخواهیم ابعاد هنری ریاضیات را برتر از سایر علوم بدانیم ناچاریم بر تجرد این علم و ساختار نمادین آن تکیه کنیم. به این معنی، هیچکدام از علوم تجربی و بسیاری از علوم انسانی به جز فلسفه و الهیات یارای رقابت با ریاضیات را ندارند بلکه همه برای دسترسی به اعماق حقیقت به ریاضیات تکیه می‌زنند بلکه ریاضیات را باطن علوم و حکمت وسطی می‌دانند.

با این وصف، برای شناخت ابعاد هنری ریاضیات، ناچاریم مصداق‌های هنر را از ملموسات و محسوسات به عالم مجردات توسعه دهیم، تا یک ساختار ریاضی، یک نظریه‌ی فلسفی و یک ایدئولوژی الهی هریک اثری هنری تصور شوند. با این نگاه زیباشناختی، علوم تجربی و انسانی را با باطن ریاضی و فلسفیشان باید یکپارچه دید تا بتوان زیبائی آنان را سنجید. پس ناچاریم حوزه علم را چنان گسترش دهیم تا جهان‌بینی دانشمندان و ذهن تئوری‌ساز آنان را نیز در بربگیرد و این آشتی مبارکی بین دیدگاه‌های اساس‌گرایان افلاطونی و انسان‌گرایان ارسطویی است.

با این نگاه به ریاضیات، ریاضیات یک هنر متعالی و مقدس است زیرا اساس آن مطالعه همه لایه‌های هستی است. به عنوان علم کاربردی، اساس آن شناخت طبیعت است که دارای یک ماهیت باطنی و قدسی است و پس از آن ابزاری است برای انتقال معرفتی که ویژگی قدسی دارد. هنر ریاضیات به معنای عمیق کلمه کاربردی است، اما صحنه‌ی کاربرد آن به سراسر هستی انسان

گسترده شده‌است. ریاضیات تنها از طریق هنر خویش می‌تواند پیش برود و محیط و شرایطی فراهم کند که در آن حقایق به همه‌جا منتشر شود. به همین خاطر، تا آنجا که ضبط‌های تاریخی اجازه می‌دهد، ریاضیات پیش از اینکه نظام‌های فلسفی و الهیاتی خود را تکامل بخشد، ابعاد هنری خود را شکل‌دهی کرده‌است.

از این چشم‌انداز، ریاضیات هم پرده‌ای است که حقیقت را پنهان می‌سازد و هم آن را می‌نمایاند. نگاه هر نظریه‌ی ریاضی به حقیقت را می‌توان یکی از صور هنری ریاضیات دانست. همیشه کسانی هستند که اهمیت صور هنری را سبُک شمرده‌اند و فراتر از آن صور رفته‌اند. کسانی که از صور هنری دوری می‌ورزند آن متفکرانی هستند که معتقد به وجود حقایق فراصوری‌اند. کسانی که با به کارگیری زبان رازآلود صوفیانه قشر و پوسته را درهم شکسته، عصاره‌ی آن را نیوشیده و پوسته را کنار گذاشته‌اند. اما نفوذ به ورای سطح پدیداری و مفهومی و رسیدن به حقیقت ذاتی و جوهری و در نتیجه رویت خداوند چیزی است و انکار صور هنری ریاضیات به نام حقیقت انتزاعی-مثالی ورای صور بکلی چیز دیگری است. صاحب معرفت ریاضی در بعد تحقق یافته‌ی آن، نخستین شخصی است که اهمیت و معنای صور هنری ریاضیات و ارتباط آن با حقیقت را تصدیق می‌نماید، زیرا هنر حقیقت را تا آنجا منعکس می‌سازد که مقدس است و حضور امر قدسی را تا آنجا اشاعه می‌دهد که حقیقت است.[۲]

بنابراین، برای درک زیبائی‌شناسانه‌ی ریاضیات، درک زیبائی قضایای ریاضی و در درجه‌ی دوم برهان‌های زیبا که اکثرا کوتاه هستند و در درجه‌ی سوم نظریات زیبا که فصل کوتاهی از یک تئوری توسعه یافته‌تر هستند باید در چارچوب باطن حقایق ریاضی صورت پذیرد. سیستم‌های اصل موضوعه‌ای به نوعی تلاش‌های ریاضیدانان در کشف حقیقت را پنهان می‌کنند و همه‌ی آنها را در قضایایی وجودی خلاصه می‌کنند. عدم دسترسی به روند کشف، درک ابعاد زیباشناسی ریاضی را مشکل می‌کند. این نکته، درایت و تعالی ریاضیدانان اسلامی را که روند اکتشافات ریاضی خود را مکتوب می‌نمودند پیش چشم ما آشکار می‌نماید. این نگاه نو به ریاضیات به عنوان یک هنر متعالی تاثیرات عمیق و بنیان کنی بر روش‌های تحقیق در ریاضیات، ادبیات ریاضی، فرهنگ ارتباط ریاضیدانان، شخصیت اجتماعی ریاضیدان در جامعه و جایگاه ارزشی او خواهدداشت.

تاریخ زیباشناسی ریاضیات

هر چند هومر در ادیسه مسأله منبع الهام هنرمند را مطرح کرده و آن را به قدرت الهی نسبت داده، با این حال افلاطون به عنوان پدر علم زیباشناسی شهرت دارد. افلاطون نتایج زیباشناختی تفکرات پارمنیدس و دموکریتوس را مدون کرد و سپس مسائل بنیادی زیباشناسی را مطرح نمود. از دیدگاه افلاطون ارتباط هنر و حقیقت در مرکز مسائل زیباشناسی قرار دارد و این ریاضیات را به عنوان یک هنر متعالی معرفی می‌کند. این پرسش که آیا هنرها واجد یا حامل دانش هستند توسط افلاطون مطرح شده‌است. طریقه نیل به زیبایی به کاملترین نحو در رساله‌ی میهمانی چنین توصیف شده‌است: "انسانی که عشق به زیبایی در دلش راه یافته‌است از زیبایی جسم به زیبایی روح و سپس به زیبایی نهادها و قوانین و خودِ علم و بالاخره به عشق به خودِ زیبایی می‌رسد. در رساله‌ی فیلبوس بحث دقیقی به این نتیجه منجر می‌شود که اشیا زیبا جزبه‌جز و با دقتی ساخته می‌شوند که تناسب صحیح آنها را اندازه‌گیری ریاضی معلوم می‌کند. کیفیات متریک و تقارن همواره قوام بخش زیبایی و کمال است و چون زیبایی اندازه است یا وابسته به آن است در فهرست نهایی خوبی‌ها مقام رفیعی دارد. افلاطون هنر را تقلید حقیقت می‌داند بنابراین اثر هنری همیشه فروتر از اصل آن است. او برای الهام نقش عمده‌ای در هنر ابراز حقیقت قائل است که ارتباط ریاضیات و الهیات را نشانگر آن می‌داند.

ارسطو تاکید بیشتری بر ابعاد انسانی زیبائی‌شناسی و بر انگیخته شدن احساسات زیباشناسانه دارد. او هماهنگی و نظم اجزاء را که در کل وحدت یافته‌اند دلیل لذّت زیبائی می‌داند. به اعتقاد ارسطو هنر به انسانها کمک می‌کند تا عاقل شوند و این دیدگاه با ابعاد عقلانی ریاضیات هماهنگی دارد. از نظر ارسطو تقلید حقیقت در انسان فطری است و لذا ریاضیات از تراوشات ذاتی بشر است.

رواقیان به مسائل معناشناسی و منطق بسیار علاقمند بودند. فیلسوف رواقی دیوجانس بابلی معتقد بود که زیبایی منوط به ترتیب و آرایش اجزاء است. لذّتی که در زیبایی وجود دارد مرتبط با فضیلتی است که خود را در موضوع با نظم و ترتیب ابراز می‌کند و لذا نشانه‌ی استعلای عقلانی نفس است که بر وفق غایت فلسفه‌ی رواقی یعنی دست یافتن به آرامش و طمانینه است. این دیدگاه با ابعاد مجرد زیبایی ریاضی هماهنگی دارد. بلکه بر ارتباط هنر ریاضیات و اخلاق ریاضیدانان تاکید می‌کند.

اپیکوریان با ظاهرگرایی هنری به شدت مخالفت داشتند و برانگیختن عواطف توسط هنر را نتیجه تعامل ظاهر و باطن هنر می‌دانستند که با ریاضیات به عنوان هنر قدسی تطابق دارد.

نوافلاطونیان در ماورای عالم شهادت به حقیقت واحدی اعتقاد داشتند که ورای هر تصور و دانشی است و در تجلی اول معقل است و صور افلاطونی که معلوم عقل‌اند و در تجلی دوم نفس کلی و خواستگاه خلاقیت و حیات است. ایشان در طرح مدارج

نامتناهی صدور وجود از نورالانوار نظریه‌ای اصیل از زیبایی را مطرح می‌کنند. در نظر ایشان عشق همواره عشق به زیبایی مطلق است. نوافلاطونیان بین زیبایی نسبی و مطلق تمایز قائل بودند. آراء ایشان با لایه‌های تجرید ریاضیات تطابق دارد.

در قرون وسطی قدیس اوگوستین بین زیبایی کل و زیبایی و تناسب اجزاء تمایز قائل می‌شوند. او در کتاب اعترافات خود تاکید می‌کند که عدد هم برای وجود و هم برای زیبایی اساسی است. عدد نظم بوجود می‌آورد و اجزاء را در ترکیبی یکپارچه و منطبق با غایب مرتب می‌کند و وحدت می‌بخشد.

قدیس توماس آکویناس که خود را شاگرد مکتب ابن‌سینا می‌داند، زیبائی را آن چیزی می‌داند که خوشایند شهود است در همه‌ی مراتب آن. زیبائی شامل سه شرط است: نخست درستی یا کمال، دوم تناسب یا هماهنگی، سوم درخشندگی یا تابندگی. شرط سوم برگرفته ازسنت نوافلاطونیان است که در آن نور رمزی است از جمال الهی و حقیقت. این با دیدگاه زیباشناسانه ما در باب شهود ریاضی مطابقت دارد.

همچنین آباء کلیسا روش تاویل در تفسیر را از یونانیان و یهودیان اقتباس کردند و مسئله تاویل آثار هنری را مطرح نمودند. سوال این است که آیا این منجر به تاویل تئوریهای ریاضی خواهد شد؟ از آنجا که ریاضیات نزد مسیحیان هنر دینی محسوب نمی‌شد در این جهت تلاشی نکردند.

آغاز عصر رنسانس شاهد احیای فلسفه افلاطونی بود. فیپینو موسس آکادمی جدید در رسانه‌ی درباره‌ی عشق و رساله‌ی الهیات افلاطونی این نظریه را مطرح می‌سازد که نفس با استغراق در نظاره‌ی مُثُل افلاطونی تا اندازه‌ای از بدن جدا می‌شود. این تمرکز درونی لازمه‌ی آفرینش هنرمندانه و جدایی از عالم واقع و پیش‌بینی آن چیزی است که هنوز وجود ندارد و همچنین لازمه‌ی تجربه‌ی زیبایی است. از آثار مهم این دوره در باب هنرهای زیبا کتاب آلبرتی درباره‌ی نقاشی، پیکرتراشی و معماری است که برای اولین بار پرسپکتیو را به هنر نقاشی معریف کرد و این هنر را با مبانی ریاضی آن مرتبط ساخت. یادداشت‌های شاگرد او لئوناردو داوینچی و کتاب‌های هندسه و علم مناظر و مرایا از آلبرشت دورر نیز سعی داشتند علوم ریاضی را لازمه‌ی وحدت و زیبائی اثر هنری معرفی کنند.[۳]

تاکید بیش از اندازه‌ی عقل‌گرایان دکارتی به تقلید از طبیعت و اصرار بیش از حد تجربه‌گرایان بریتانیایی بر ابعاد روانشناختی هنر تا قرن‌ها بر آراء فلاسفه‌ی غربی حکومت کردند. متاسفانه بسیار از تاملات زیباشناسانه ریاضیدانان قرن نوزدهم و بیستم غرق در همین جوّ مادی‌گرا یا حداکثر ذهن‌گرای فیلسوفان غربی شده که به موجب آن نگاه حقیقت‌شناسانه به دوران شکوفایی ریاضیات مدرن بسیار دشوار می‌نماید.

متأسفانه تاکید مکاتب فلسفه اسلامی بر هستی شناسی و مسئله وجود راه را بر ابراز آراء زیباشناسانه در مورد ریاضیات در تمدن اسلامی بست. می‌توان به جرات گفت که این مکاتب اگر نقش بازدارنده‌ای نداشتند، کمک شایانی هم به پیشرفت علوم و ریاضیات در تمدن اسلامی ننمودند.

عرفان اسلامی از سوی دیگر چنان درخشید که زمینه را برای تئوری سازی ریاضیات به عنوان یک هنر مقدس و هم زمان به عنوان یک علم مقدس فراهم نمود. نظریات دقیقی که در باب ساختار ادراک انسانی و لایه‌های تجرید آن در عرفان اسلامی ساخته و پرداخته شده است در تاریخ تمدن بشری کم نظیر است. حتی موج اول این نظریات که محصول مکتب عرفانی ابن عربی اندلسی است، بر کتب عرفانی اصلی یهودیان و بر اسناد عرفانی مسیحی مانند کمدی الهی دانته حکومت دارد. ایده‌های اصیل این مکتب کاملا بر آثار عرفان هندی در صوفی‌گری ایرانی پیروزمند شد. این فتوحات مقدمه‌ی همنشینی عرفان و فلسفه در حکمت متعالیه‌ی ملاصدرا در مسائل هستی شناسی زیبایی آراء جالب توجهی را شامل می‌شود.

فلسفه زیباشناسی ریاضیات

زیباشناسی به عنوان شاخه‌ای از فلسفه به تحلیل مفاهیم مربوط به ادراک زیبایی می‌پردازد. موضوعات ادراک زیبایی در ریاضیات شامل تمامی قضایا، برهان‌ها و تئوری‌هایی است که موضوع تجربه‌ی زیباشناختی قرار می‌گیرند. مفاهیم ارزش زیباشناختی، تجربه‌ی زیباشناختی و تمام مفاهیمی که در فلسفه هنر بکار می‌روند در فلسفه‌ی زیباشناسی ریاضیات هم مورد مطالعه هستند. برای شناخت ادراک زیبایی، آنطور که هست، تاکید می‌کنیم که در این نوشتار منظور از نگاه فلسفی، خلاصه کردن ساختارهای شناختی با کمک زبان فلسفه است. بنابراین، از ایده‌های فلسفی که به پیچیدگی این ساختارها می‌افزایند احراز خواهیم‌نمود. مثلا این سوال که آیا نگرش زیباشناختی و غیر زیباشناختی معنی دارد مورد توجه ما نیست. چرا که حس طبیعی زیباشناسانه یک ریاضیدان موضوع موشکافی ماست نه حس احساسات زیباشناسانه‌ی یک فیلسوف. زیرا مطالعه احساسات زیباشناسانه‌ی یک فیلسوف پیچیدگی‌هایی غیرطبیعی دارد که در ذهن یک ریاضیدان هرگز یافت نمی‌شود.

در بررسی زیباشناسانه‌ی یک حقیقت ریاضی که به زبان صور هنری بیان شده است، هم نسبتهای درونی مانند نسبت اجزاء یک نظریه به همدیگر و هم نسبت‌های بیرونی مانند نسبت آن تئوری ریاضی با ریاضیدانی که آن را خلق کرده است باید مورد توجه قرار بگیرند. تلاش‌های ریاضیدان برای کشف یک حقیقیت ریاضی وچگونگی فرمول‌بندی و بیان آن و مشکلاتی که با آنها مواجه می‌شود و بر آنها فائق می‌آید دقیقا مورد توجه ما هستند. پس دامنه‌ی لذت زیباشناختی را نمی‌توان به لذّت ادراک حقیقت محدود کرد. مثلا فهم صحیح پاکیزگی یا ظرافت یا استفاده‌ی صحیح از ابزارهای محاسباتی در یک برهان نیز امری زیباشناختی است. با چنین معنای گسترده‌ای از زیبا شناسی حتی می‌توان ریاضیات را در زمره‌ی هنرهای زیبا به حساب آورد. منظور از هنرهای زیبا هنرهایی است که به خاطر نگرش زیباشناسانه به آنها خلق می‌شوند. طبقه‌بندی هنرهای زیبا در زیباشناسی ریاضیات بسیار کارآمد است. یک دسته مهم آن ابعاد زیباشناختی ریاضیات است که به مفهوم فضا مربوط می‌شود و دسته‌ی دیگر ابعادی که با مفهوم زمان سروکار دارد. این دو دسته همان ریاضیات استاتیک و دینامیک هستند. ابعاد هنری مرکب نیز مقصودوند؛ مانند ابعادی که با مفهوم حرکت سروکار دارند.

چندین نوع ارزش مختلف وجود دارد که ریاضیات می‌تواند به عنوان هنر به ما عرضه کند. ارزش‌های محسوس در ریاضیات عموما تصویری هستند. ارزشهای صوری در تفاوت‌های ساختاری صور هنری ریاضی معنا می‌یابند. ارزش‌های نمادین به لایه‌های تجرید ریاضیات و چگونگی نمایش وحدت در باطن و کثرت در ظاهر با توجه به همان معنای نمادین ظاهر و باطن که در فلسفه موردنظر است می‌پردازد. اگر به تاریخ شکل‌گیری یک تئوری ریاضی به عنوان یک اثر هنری نگاه کنیم، ارزش‌هایی همچون، تغییر مضمون، توازن و تعادل، تکامل یا تطور هر جزء نیز مطرح می‌شوند.

برای اینکه یک اثر ریاضی را بتوانیم درست بفهمیم باید با چه چیزهایی از بیرون آن آشنا شویم؟ مستقل‌نگری نظری است که می‌گوید برای درک و فهم صحیح یک اثر، جزء خود آن اثر به چیز دیگری محتاج نیستیم. در برابر این نظر زمینه نگری می‌گوید که باید اثر هنری ریاضی در محیط تامّ و تمام آن درک شود. مطالعه آثار دیگر خالق تئوری ریاضی یا آثار دیگر ریاضیدانان یا عصری که ریاضیدان در آن می‌زیسته و زندگی ریاضی خالق هنری و مقاصد و نیات او اهمیت دارند.

نظریه‌های فاعلیت‌گرایی[1] در زیباشناسی مدّعی هستند ویژگی‌های زیباساز موضوعات ادراکِ زیباشناختی وجود حقیقی ندارند بلکه فقط وجود ذهنی دارند. لذا اتّصاف ارزش زیباشناختی نسبی است و حضور مشاهده‌گر و موضوع ادراک زیباشناختی همراه مفاهیم زیباشناختی الزامی است. نظریه‌های عینیت‌گرایی[2] برخلاف نظریات فاعلیت‌گرا اعتقاد به ارزش حقیقی زیباشناختی موضوعات ادراک دارند و آن را مشخصه‌ی آن موضوع می‌دانند نه ذهن مشاهده‌گر. نظریات فاعلیت‌گرا و عینیت‌گرا در چارچوب لایه‌های تجرید حقیقت ریاضی و مراتب تجرد ساختار ادراک، و ارتباط بین این دو به هم می‌پیوندند که در بخش بعد به آن خواهیم‌پرداخت.

ویژگی‌های زیبایی که توسط منتقدین آثار هنری به کار می‌روند بی‌اندازه متنوع هستند، اما می‌توان گفت که به طور کلی از سه قانون عام پیروی می‌کنند: "وحدت"، "پیچیدگی" و "شدت". در مورد وحدت در کثرت پیش از این بحث کردیم و پیچیدگی ساختارهای زیباشناختی در همان چارچوب معنی پیدا می‌کند. درباره‌ی شدت باید گفت که یک موضوع خوب ادراکِ زیباشناختی باید نوعی کیفیت بارز داشته‌باشد. این سه صفت در کنار هم ویژگی‌های عام موضوعات ادراک زیباشناختی را بوجود می‌آورند. یعنی ارزش‌گذاری اثر هنری، تا جایی که به قوانین عام زیباشناسی مربوط می‌شود، وظیفه‌ی این سه ویژگی است. نزد عینیت‌گرایان ویژگی دیگری هم مطرح است و آن "کاربرد" به معنای عام آن است. اینکه یک اثر هنری تا چه حد وظایفش را خوب انجام می‌دهد.

حقیقت، خیر و زیبایی سه مفهوم اصلی هستند که فلسفه در مورد آن‌ها بحث می‌کند. آثار هنری، به خصوص با معنی توسعه یافته‌ای که ما از هنر مدّنظر داریم همه به نوعی با حقیقت ارتباط دارند. در فلسفه‌ی زیباشناسی ریاضی همین ارتباط بین اثر هنری و حقیقت محک اصلی زیبایی است. اینکه یک نظریه‌ی ریاضی نماد کاملتری برای باطن آن حقیقت ریاضی باشد ویژگی‌های زیباشناسانه‌ای دارد که مختص ریاضیدانان است و فیلسوفان زیباشناس به آن نمی‌پردازند. همچنین فیزیکدانانی که با فرمولبندیهای ریاضی مختلف یک نظریه‌ی فیزیکی و انتخاب مناسب‌ترین آن‌ها سروکار دارند، با این ویژگی‌های زیباشناسانه درگیرند. "تعمیم‌پذیری"، "محاسبه‌پذیری"، و "سادگی" عمده‌ترین این ویژگی‌های زیباشناسانه هستند. اینکه آیا این سه ویژگی مستقلند در حوصله‌ی این مقاله نمی‌گنجد.

رابطه‌ی هنر و خیر یا اخلاق در هنرهای زیبا با محل صدق بر فطرت انسان مطالعه می‌شود. در زیباشناسی ریاضی می‌توان این رابطه را به مباحث ساختار ادراک انسانی محدود نمود. اینکه چطور به صورت طبیعی می‌توان به یک ایده‌ی ریاضی دسترسی پیدا کرد، از سوالاتی است که باید در چارچوب ساختار ادراک انسانی به آن پاسخ داد. برخلاف دیدگاه فلاسفه زیباشناسی که معتقدند

---

[1] subjectivism
[2] objectivism

ارزش اثر هنری به هیچ وجه مطابق با ارزش آن در تهذیب نفس آفریننده و مخاطب هنر نیست، در فلسفه‌ی زیباشناسی ریاضی به این معتقدیم که خلق اثر هنری ریاضی به تکامل ساختار ادراک ریاضیدان کمک می‌کند و این همان چیزی است که مقصود اخلاق است یعنی کمال انسانی. این نکته ما را به شاخه‌ای جدید از فلسفه‌ی زیباشناسی رهنمون می‌کند و آن زیباشناسی هنرمند است. چرا که زیبایی اثر هنری تجلی زیبایی ساختار ادراک هنرمند است.

زیباشناسی ریاضیدانان

منظور از زیباشناسی ریاضیدانان زیباشناسی ساختار ادراک انسانی آنان است. دیدگاه اسلام به علوم چنان است که هم مشوق تسخیر طبیعت توسط انسان است و هم مشوق کمال عالم بواسطه‌ی علم. از نظرگاه اسلامی همه‌ی علوم مهارشده به توحیدند به این معنی که شناخت حقیقت در تمام درجات هستی و شناخت ارتباط بین این درجات هستی مورد تاکید است. اسلام نظر به مراتب عالیه‌ی علوم دارد و علوم را موجی از عالم غیب می‌داند. به این ترتیب، علوم مختلف در کمال انسان نقش دارند و یا اینکه هر یک از علوم مختلف ابعادی از کمالات انسان را نشان می‌دهند. از طرف دیگر، هر یک از علوم به جنبه‌هایی از عظمت هستی اشاره می‌کنند و هر یک درباره‌ی خالق اشاراتی دارند. همه این تجلیات چه در ساختار ادراک انسان و چه در جهان هستی هم‌آهنگ و هم‌آوا هستند. کارآمدی علوم گواهی بر این هماهنگی است.

با این وصف، علوم مثل اسماء الهی حرکت نزولی و صعودی دارند. همانند اسماء الهی در مراتب هستی عالم نزول می‌یابند و در مراتب هستی انسان کامل عروج می‌کنند و به علم توحید بازمی‌گردند. سرچشمه‌های همه‌ی علوم در علوم الهی است و همه‌ی علوم دوباره به این سرچشمه‌ها می‌پیوندند. هماهنگی علوم گواه بر وحدت سرچشمه‌های آنان است. تولد، حیات و مرگ تئوریهای علمی در این رودخانه‌ی در جریان نزول و عروج واقع می‌شود.

به این ترتیب، علوم در خدمت همه‌ی ابعاد انسان هستند و ادراک علوم همه‌ی ابعاد شناختی انسان را به کار می‌گیرد. بنابراین در خلق یک تئوری ریاضی هم دست‌ورزی و درگیری با مثال‌های طبیعی، هم تفکر و تجرید ریاضی، هم حدس و الهام قلبی، هم ساختارشناختی و قوای روحانی، هم برهان عقلی و هم انوار روشنگر قدسی و هم ذات ریاضیدان درگیرند و این لایه‌های مختلف ادراک انسانی با یکدیگر ارتباط نمادین دارد. هر لایه‌ای تجلی یک لایه‌ی مجردتر و متجلی کننده‌ی یک لایه‌ی ملموس‌تر است. هر درجه‌ی شناخت، باطن درجه‌ای دیگر و ظاهر درجه‌ای عمیق‌تر است. این همان ارتباطی است که آن را ارتباط نمادین خواندیم.[۵]

زیبایی ریاضیات با پیوستن به علوم تجربی به عنوان باطن آن‌ها و وصل شدن به علوم الهی به عنوان سرچشمه ریاضیات کامل می‌شود و در این چارچوب تمام مراتب هستی و تمام ویژگی‌های زیباشناختی را در برمی‌گیرد. زیبایی ریاضیدانان و ساختار ادراکی آنان نیز وقتی کامل می‌شود که این علم در ساختار ادراکی آنان به علم توحید وصل شود و به کاربردهای خادم نوع بشر بیانجامد. بنابراین زیباترین نوع ریاضیات جامع بین ریاضیات محض و کاربردی است و زیباترین ریاضیدان جامع بین مهندس، ریاضیدان و حکیم است.

اگر بخواهیم ابعاد زیباشناختی ریاضیات محض را مستقل از سرچشمه‌های الهی و ابعاد کاربردی بررسی کنیم، باید بگوییم که همان‌طور که ریاضیات محض حکمت وسطی است و واسطه‌ی علوم تجربی و علوم الهی است، زیبائی ریاضیدان محض در شناخت فرمالیسم تعمیم و تخصیص، تجلی و عروج حقیقت، نزول و صعود اسماء الهی، و شناخت ارتباط و معنی ظاهر و باطن محدود می‌شود که با تجربیات زیباشناسانه‌ی ریاضیدانان نیز تطابق دارد.

ریاضیات حقیقی و حقیقت ریاضیات

با بسط حوزه علوم ریاضی و ارتباط آن با علوم تجربی و علوم الهی، زیباشناسی ریاضیات چیزی نیست جز حقیقت شناسی ریاضیات. برای شناخت زیبایی ریاضی باید دانست که بهره‌ی آن از حقیقت چیست. همان‌طور که گفتیم علم ریاضیات به معنای توسعه یافته‌ی آن از همه‌ی لایه‌های حقیقت بهره می‌برد و تمام لایه‌های شناخت را به کار می‌گیرد، اما ریاضیات به معنا مشهور آن کدام است و بهره‌ی آن از حقیقت چیست؟

ذهن انسان چون به بررسی و شناخت لایه‌های هستی حقیقت و همچنین لایه‌های شناخت انسانی می‌پردازد، این لایه‌های تجرید همچون آینه‌ای در ذهن تجلی می‌کنند. به این سبب، علوم به همان معنای مشهور آن که پدیده‌ای کاملا ذهنی هستند در ذهن وجودی لایه‌لایه دارند و بین این لایه‌ها ارتباط نمادین برقرار است. اما ساختار نفس انسان و ذهن کنکاش‌گر او چنان است که از دسترسی وهم و شیطان درون و برون در امان نیست. بسیاری از لایه‌های تجرید ذهنی علوم تنها وجود ذهنی دارند نه وجود حقیقی، یعنی

از تجلیات لایه‌های تجرید هستی به ذهن نیستند. رابطه‌ی نمادین بین بسیاری از لایه‌های تجرید در ذهن رابطه‌ی نمادین اعتباری است نه رابطه‌ی نمادین حقیقی که تجلی ارتباط بین ظاهر و باطن در مراتب هستی باشد. بنابراین چنین نیست که تمامی فرمالیسم علوم مدرن و تمامی تئوریهای علمیِ مورد قبول حقیقی باشند یا تصویری از حقیقت باشند.

این موشکافی منجر می‌شود که بین ریاضیات حقیقی که از تجلیات مراتب هستی است و غیر آن تمایز قائل شویم. اینکه همه‌ی تفکرات ریاضی‌گونه‌ی بشر را ریاضیات بدانیم ناشی از این اشتباه است که ریاضیات و سایر علوم را محدود به عالم ذهن دانسته‌اند و آن‌ها را تنها واجد مراتب وجود ذهنی دیده‌اند. اما حقیقت علم ریاضیات که متصل به علوم تجربی و علوم الهی است نه تنها عالم ذهن بلکه بسیاری از بواطن آن را مانند عالم قلب و ادراک قلبی و عالم روح و ادراک روحانی و عالم عقل و ادراک عقلانی و عالم نور و ادراک نورانی درنوردیده‌است.

ریاضیدان موحّد به نور تفکر ساختار مفهومی مسئله علمی را می‌شناسد و به نور حدس استراتژی حمله به آن را تشخیص می‌دهد و به نور الهام آن مسئله را حل می‌کند و به نور وحی حقیقت باطنی آن را درک می‌کند و به نور عقل آن را تئوری‌سازی می‌کند و به انوار نیّر قدسی تئوری‌ها را با حقیقت منطبق می‌کند. این همه بر ذات او تاثیر می‌گذارد و ساختار ادراکی او را کمال می‌بخشد. خوشا حال عالمی که اینها اوصاف او باشند.

مراجع

[۱] هال، لویس ویلیام هلزی، *تاریخ و فلسفه‌ی علم*، ترجمه‌ی عبدالحسین آذرنگ، تهران، سروش، ۱۳۶۳.

[۲] نصر، حسین *معرفت و امر قدسی*، ترجمه‌ی فرزاد حاجی میرزائی، تهران، نشر و پژوهش فرزان روز، ۱۳۸۰.

[۳] بیردزلی، مونرو *تاریخ زیباشناسی*، ترجمه‌ی محمد سعید حنایی کاشانی، تهران، هرمس، ۱۳۷۶.

[۴] هاسپرس، جان *مسائل زیباشناسی*، ترجمه‌ی محمد سعید حنایی کاشانی، تهران، هرمس، ۱۳۶۳.

[۵] پارسا، حمید *نماد و اسطوره در عرصه توحید و شرک*، قم، اسراء، ۱۳۷۳.

قضیه‌ای جالب در نظریه‌ی مقدماتی گروه‌ها

خشایار فیلُم

هدف این مقاله‌ی کوتاه معرفی قضیه‌ای به نام "قضیه‌ی شور" در جبر مقدماتی و حل سه مساله‌ی ابتکاری به کمک این قضیه است. در واقع برای فهمیدن صورت قضیه‌ی مذکور و مسایل مرتبط، همان گونه که در ادامه خواهید دید به هیچ چیز بیشتر از اطلاعات جبر ۱ نیاز نیست ولی این مسائل به هیچ وجه بدیهی نیستند. قبل از بیان صورت این قضیه نمادگذاری‌هایی را که در ادامه به کار خواهیم برد، شرح می‌دهیم.

نمادگذاری و یادآوری

فرض کنید G یک گروه است و H زیرگروهی از آن باشد و $x \in G$.

- این را که H زیرگروه G است به صورت $H < G$ می‌نویسیم.
- عنصر همانی G را به e نشان می‌دهیم.
- زیرگروه مشتق G را به G' و مرکز G را به $Z(G)$ نمایش می‌دهیم.
- مشتق G کوچترین زیرگروهی از G است که در G نرمال است و گروه خارج‌قسمتی حاصل از آن آبلی است. به عبارت دیگر:

$$G' \subset H \iff H \text{در} G \text{نرمال و} \frac{G}{L} \text{آبلی است.}$$

- مرتبه‌ی عنصر x را با $o(x)$ نشان می‌دهیم.
- منظور از $[G : H]$ اندیس H در G است.
- مرکزساز (centralizer) x در G، زیرگروه زیر از G است:

$$C_G(x = \{a \in G \mid ax = xa\}$$

- کلاس تزویجی (conjugacy class) x در G یعنی مجموعه‌ی $\{axa^{-1} \mid a \in G\}$ در تناظر یک‌به‌یک است با مجموعه‌ی همدسته‌های چپ (یا راست) زیرگروه $C_G(x)$ از G. لذا اگر $[G : C_G(x)] < \infty$، تعداد عناصر کلاس تزویجی x متناهی و برابر $[G : C_G(x)]$ خواهد بود.
- نرمال‌ساز (normalizer) H در G به صورت

$$N_G(H) = \{x \in G \mid xHx^{-1} = H\}$$

تعریف می‌شود و بزرگترین زیرگروه G شامل H است که H در آن نرمال است. تعداد مزدوج‌های H یعنی تعداد زیرگروه‌های xHx^{-1} از G برابر است با: $[G : N_G(H)]$.

- قضیه‌ی ساختاری گروه‌های آبلی با تولید متناهی: اگر G آبلی و "با تولید متناهی" (finitely generated) باشد، آنگاه G را می‌توان به صورت جمع مستقیم تعداد متناهی از گروه‌های دوری نوشت:
$$G \cong \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}$$
که در آن برای هر $n \geq 2$، منظور از $\mathbb{Z}_n$ گروه دوری n عضوی $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ است.

حال به بیان صورت قضیه‌ی شور می‌پردازیم:

قضیه‌ی شور(Schur): فرض کنید G گروهی باشد که برای آن $[G : Z(G)] < \infty$ در این صورت G' متناهی است.

اثبات این قضیه را می‌توانید در کتاب An Introduction to the Theory of Groups نوشته‌ی J. Rotman بیابید. در ادامه، به حل سه مسئله به کمک این قضیه می‌پردازیم.

مساله ۱. *فرض کنید G یک گروه نامتناهی است که اندیس هر زیرگروه نابدیهی آن متناهی است. ثابت کنید G دوری است.*

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم G آبلی است. اگر $H < G$ و $H \neq \{e\}$ آنگاه H هم در ویژگی مذکور صدق می‌کند یعنی اندیس هر زیرگروه غیربدیهی آن متناهی است. چرا که بنابر فرض $[G : H] < \infty$ و اگر $\{e\} \neq K < H$ داریم $[G : K] < \infty$ و بنابراین به دلیل $[G : K] = [G : H].[H : K]$ خواهیم داشت: $[H : K] < \infty$. حال توجه کنید که اگر $Z(G) \neq \{e\}$ در این صورت $[G : Z(G)] < \infty$ و لذا از قضیه‌ی شور $|G'| < \infty$. حال اگر G' غیر بدیهی باشد، باید $[G : G'] < \infty$ که با توجه به نامتناهی بودن G و متناهی بودن G' امکان‌پذیری نیست. پس اگر $Z(G) \neq \{e\}$، G' بدیهی و لذا G آبلی است. پس هر گروه با خاصیت مساله در صورت نابدیهی بودن مرکزش آبلی است. از آنچه پیشتر گفته‌شده، این برای زیرگروه‌های غیربدیهی G هم برقرار خواهدبود. یعنی ثابت کردیم که:

(*): برای هر زیرگروه $H \neq \{e\}$ از G، $Z(H) = \{e\}$ یا H آبلی است.

حال برای اثبات آبلی بودن G از برهان خلف استفاده می‌کنیم: فرض کنید G آبلی نباشد. ادعا می‌کنیم که:

(**): رابطه‌ی جابه‌جا شدن در $G - \{e\}$ ترایایی است: اگر x, y, z عناصری غیربدیهی از G باشند و هریک از z, y با x جابه‌جا شوند، آنگاه z, y با یکدیگر هم جابه‌جا می‌شوند.

برای اثبات (**) توجه کنید که چون z, y با x جابه‌جا می‌شوند $y, z \in C_G(x)$. ولی چون $x \in C_G(x)$، $C_G(x) \neq \{e\}$ و لذا از (*) نتیجه می‌شود $Z(C_G(x)) = \{e\}$ و یا $C_G(x)$ آبلی است. حالت اول رخ نمی‌دهد چرا که از تعریف $C_G(x)$ داریم: $x \in Z(C_G(x))$. بنابراین $C_G(x)$ آبلی خواهد بود که نتیجه می‌دهد عناصر y, z از آن با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند و (**) ثابت می‌گردد.

حال به کمک (**) فرض خلف مبنی بر غیرآبلی بودن G را به تناقض می‌کشانیم: چون G آبلی نیست، $a, b \in G$ موجودند که $ab \neq ba$. لذا $a, b \neq e$. حال $a \in C_G(a)$ و $a \neq e$ پس $C_G(a) \neq \{e\}$ و لذا از فرض مساله $[G : C_G(a)] < \infty$ که نتیجه می‌دهد تعداد اعضای کلاس تزویجی a متناهی است. بنابراین مجموعه‌ی $\{b^i a b^{-i} \mid i \in \mathbb{N}\}$ متناهی است. این نشان می‌دهد که $r, s \in \mathbb{N}$ با $r > s$ موجودند که $b^r a b^{-r} = b^s a b^{-s}$ یا به عبارت دیگر $a b^{r-s} = b^{r-s} a$. اگر $b^{r-s} = e$ آنگاه $\infty > o(b) > 1$ چرا که $r > s$ و $b \neq e$ بود. بنابراین $\infty > |\langle b \rangle| > 1$. لذا چون G نامتناهی است، $\langle b \rangle$ زیرگروهی غیربدیهی از G است که برای آن $[G : \langle b \rangle]$ نامتناهی است. این با فرض مساله تناقض دارد. پس $b^{r-s} \neq e$. لذا b^{r-s} با a جابه‌جا می‌شود و $a, b, b^{r-s} \in G - \{e\}$. ولی b^{r-s} با b هم جابه‌جا می‌شود. پس چون بنابر (**) رابطه‌ی جابه‌جا شدن بر $G - \{e\}$ ترایایی است، a و b با هم جابه‌جا می‌شوند که تناقض است. پس به تناقض می‌رسیم و G آبلی است.

حال به راحتی می‌توان دید که G با تولید متناهی است: فرض کنید $x_1 \in G - \{e\}$. پس طبق فرض $[G : \langle x_1 \rangle] < \infty$. اگر $G = \langle x_1 \rangle$ که مساله حل است. در غیر این صورت یک عنصر $x_2 \in G - \langle x_1 \rangle$ انتخاب کنید. پس $[G : \langle x_1, x_2 \rangle] < [G : \langle x_1 \rangle]$. دوباره اگر $G = \langle x_1, x_2 \rangle$ که حکم مساله حل است. در غیر این صورت $x_3 \in G - \langle x_1, x_2 \rangle$ را در نظر می‌گیریم و ... . چون در هر مرحله اندیس زیرگروه جدید کم می‌شود، این فرایند سرانجام به پایان می‌رسد و rای موجود خواهد بود که برای آن $G = \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$. پس تا اینجا ثابت کردیم که G آبلی و با تولید متناهی است. حال بنابر قضیه‌ی ساختاری گروه‌های آبلی با تولید متناهی $G \cong \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}$ که در آن $m_1, \ldots, m_k \geq 2$ و $m \in \mathbb{N}$. اگر $k > 0$ یعنی $m_1, \ldots, m_k$ موجود باشند، آنگاه G عناصری به جز e از مرتبه‌ی متناهی دارد که امکان‌پذیر نیست. چرا که زیرگروه دوری تولید شده توسط چنین عناصری یک زیرگروه متناهی غیربدیهی خواهد بود که اندیس آن در G به دلیل نامتناهی بودن G متناهی نیست و این بنابر فرض مساله نمی‌تواند رخ دهد. لذا $G \cong \mathbb{Z}^m$ که در آن $m\mathbb{N}$. حال اگر $m \geq 2$، $\mathbb{Z}^m$ در سمت راست این یکریختی (و در نتیجه در G)

زیرگروه غیربدیهی از اندیس نامتناهی به صورت $\{(a, ۰, \dots, ۰) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ دارد که باز هم با شرطی که روی G داریم در تناقض است. بنابراین $m = ۱$ و $G \cong \mathbb{Z}$. لذا G دوری است. $\square$

مساله ۲. *فرض کنید G گروهی باشد که در آن مرتبه‌ی هر عنصری به جز همانی نامتناهی است. ثابت کنید اگر G یک زیرگروه دوری از اندیس متناهی داشته باشد، آنگاه G دوری است.*

اثبات. زیرگروه دوری مذکور از G را H می‌نامیم بنابراین $[G:H]$. ابتدا توجه کنید که بدون کاسته‌شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که H علاوه بر داشتن خواص فوق، نرمال هم هست. چرا که $H < N_G(H) < G$ و لذا $[G : N_G(H)] \leq [G : H] < \infty$.
پس تعداد مزدوج‌های H متناهی است بنابراین $g_۱, \dots, g_s \in G$ موجودند که

$$\{xHx^{-۱} \mid x \in G\} = \{g_۱Hg_۱^{-۱}, \dots, g_sHg_s^{-۱}\}$$

در نتیجه

$$\cap_{x \in G} xHx^{-۱} = \cap_{t=۱}^{s} g_tHg_t^{-۱}$$

و با استفاده از این تساوی

$$[G : \cap_{x\in G}xHx^{-۱}] = [G : \cap_{t=۱}^{s} g_tHg_t^{-۱}] \leq \prod_{t=۱}^{s}[G : g_tHg_t^{-۱}] = ([G : H])^s < \infty$$

همچنین $\cap_{x\in G}xHx^{-۱}$ به وضوح زیرگروهی نرمال از G است و به دلیل آنکه مشمول در زیرگروه دوری H است، خود دوری است. لذا زیرگروه $\cap_{x\in G}xHx^{-۱}$ از G، علاوه بر آن که تمامی خواص H را دارد، نرمال هم هست و بنابراین با تعویض آن و H در صورت لزوم می‌توان فرض کرد که H یک زیرگروه دوری نرمال با اندیس متناهی است پس $y \in G$ موجود است که $H = \langle y \rangle$.
فرض کنید $N = [G : H] = [G : \langle y \rangle]$. اگر $y = e$، G دارای N عضو خواهد بود که نتیجه می‌دهد همه‌ی عناصر آن از مرتبه‌ی متناهی‌اند و لذا از مفروضات مساله $G = \{e\}$، و در این حالت حکم برقرار است. لذا فرض کنید $y \neq e$. ادعا می‌کنیم $y \in Z(G)$. برای اثبات توجه کنید که چون $\langle y \rangle$ در G نرمال است، می‌توان گروه خارج‌قسمتی $G/\langle y \rangle$ را تشکیل داد که به دلیل $[G : \langle y \rangle] = N$، N عضوی است. پس توان Nام هریک از عناصر آن همانی است. این نتیجه می‌دهد:
(۱): برای هر $x \in G$، $x^N \in \langle y \rangle$.

حال $x \in G$ را دلخواه بگیرید. نشان می‌دهیم x با y جابه‌جا می‌شود. چون $\langle y \rangle$ در G نرمال بود، به ازای $m \in \mathbb{Z}$ای $xyx^{-۱} = y^m$. حال استقرایی ساده نتیجه می‌دهد برای هر $k \in \mathbb{Z}$، $xy^kx^{-۱} = y^{mk}$. از (۱) می‌توان k را طوری گرفت که $x^N = y^k$ و در نتیجه y^k با x جابه‌جا می‌شود. بنابراین $xy^kx^{-۱} = y^{mk}$ نتیجه می‌دهد که $y^k = y^{mk}$ یا معادلا $y^{k(m-۱)} = e$. ولی بنابر فرض مساله G عنصر غیرهمانی از مرتبه‌ی متناهی ندارد و در نتیجه چون $y \neq e$، $k = ۰$ یا $m = ۱$. چون $x^N = y^k$، حالت اول نتیجه می‌دهد مرتبه‌ی x متناهی است و لذا از شرط مساله $x = e$ و بنابراین $xy = yx$. اگر هم $m = ۱$، چون m عددی بود که $xyx^{-۱} = y^m$، باز هم $xy = yx$. در نتیجه نشان دادیم که هر $x \in G$ دلخواه با y جابه‌جا می‌شود و بنابراین $y \in Z(G)$. حال داریم $\langle y \rangle < Z(G)$ و لذا:

$$[G : Z(G)] \geq [G : \langle y \rangle] = N < \infty$$

به کار بردن قضیه‌ی شور نتیجه می‌دهد که G' متناهی است. پس تمامی عناصر G' از مرتبه‌ی متناهی‌اند و حال دوباره چون بنابر فرض عناصر مرتبه‌ی متناهی G همانی‌اند پس $G' = \{e\}$ و لذا G آبلی است.

علاوه بر آبلی بودن، G از تولید متناهی هم هست. داریم $N = [G\langle y \rangle]$ و لذا اگر همدسته‌های چپ $\langle y \rangle$ در G را به صورت $z_۱\langle y \rangle, \dots, z_N\langle y \rangle$ بگیریم، $G = \cup_{i=۱}^{N} z_i\langle y \rangle$ و در نتیجه $G = \langle y, z_۱, \dots, y_N \rangle$. پس G یک گروه آبلی با تولید متناهی است و حال از قضیه‌ی ساختاری این گروه‌ها $G \cong \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}_{m_۱} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}$. دوباره چون G عنصری از مرتبه‌ی متناهی به غیر از همانی ندارد، هیچ یک از $\mathbb{Z}_{m_i}$ نمی‌توانند در سمت چپ ظاهر شوند. لذا $G \cong \mathbb{Z}^m$ که $m \in \mathbb{N}$. برای اتمام حل کافی است نشان دهیم که $m = ۱$.

بنابر (۱) برای هر $x \in G$ داشتیم $x^N \in \langle y \rangle$. پس اگر تحت یکریختی $G \cong \mathbb{Z}^m$، y به عنصر $(b_۱, \dots, b_m)$ از $\mathbb{Z}^m$ برود:

$$\forall (a_۱, \dots, a_m) \in \mathbb{Z}^m : (Na_۱, \dots, Na_m) \in \{(tb_۱, \dots, tb_m) \mid t \in \mathbb{Z}\}$$

گزاره‌ی فوق نتیجه می‌دهد که هر دو عضو $\mathbb{Z}^m$ بر $\mathbb{Z}$ وابسته‌ی خطی‌اند که به وضوح در حالت $m \geq ۲$ امکان‌پذیر نیست. پس $m = ۱$ و $G \cong \mathbb{Z}$ که اثبات را تمام می‌کند. $\square$

در نهایت به مساله‌ی آخر که شاید جالب‌تر از مسائل قبلی باشد می‌پردازیم.

مساله ۳. *فرض کنید G گروهی است که تعداد عناصر از مرتبه‌ی متناهی آن متناهی است. ثابت کنید این عناصر تشکیل یک زیرگروه می‌دهند.*

اثبات. مجموعه‌ی A را عناصر از مرتبه‌ی متناهی در G بگیرید. پس طبق قرض $|A| < \infty$ و باید نشان دهیم که A زیرگروه G است. ابتدا توجه کنید که بدون کاسته‌شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که A گروه G را تولید می‌کند. چرا که اگر $H = \langle A \rangle$ زیرگروهی از G باشد که عناصر A تولید می‌کنند، $A \subset H$ زیرمجموعه‌ی تمامی عناصر از مرتبه‌ی متناهی H خواهد بود و حال اثبات حکم برای H نتیجه می‌دهد که A زیرگروهی از H و لذا چون H خود زیرگروهی از G خواهد بود، یک زیرگروه G است. پس فرض می‌کنیم که عناصر متعلق به A گروه G را تولید می‌کنند یعنی $G = \langle A \rangle$.

اگر $x \in A$، تمامی عناصر کلاس تزویجی x همانند خود x از مرتبه‌ی متناهی‌اند. بنابراین بنابر شرط مساله روی G، تعداد عناصر کلاس تزویجی x در G متناهی است. ولی تعداد عناصر این کلاس برابر با $[G : C_G(x)]$ که در آن $C_G(x)$ مرکزساز x در G است. لذا برای هر $x \in A$، $[G : C_G(x)] < \infty$. با توجه به متناهی بودن A از این نامساوی‌ها می‌توان نتیجه گرفت:

$$[G : \cap_{x \in A} C_G(x)] \leq \prod_{x \in A} [G : C_G(x)] < \infty \tag{۱}$$

توجه کنید که $\prod_{x \in A} [G : C_G(x)]$ به دلیل $|A| < \infty$ معنی دارد. به دلیل اینکه $G = \langle A \rangle$ یک عنصر G در مرکز قرار دارد اگر و تنها اگر با تمامی عناصر A جابه‌جا شود. پس $Z(G) = \cap_{x \in A} C_G(x)$، و حال معادله‌ی (۱) نتیجه می‌دهد که $[G : Z(G)] < \infty$. پس بنابر قضیه‌ی شور زیرگروه مشتق G متناهی است. حال ادعا می‌کنیم:

ادعا: برای هر $x \in G$ مرتبه‌ی x در گروه G متناهی است اگر و تنها اگر مرتبه‌ی xG' در گروه G/G' متناهی باشد.

برای اثبات این ادعا توجه کنید که اگر در G، $o(x) < \infty$ آنگاه به ازای $n \in \mathbb{N}$ای $x^n = e$ و در نتیجه در گروه G/G' داریم $(xG')^n = x^n G' = G'$ که نشان می‌دهد مرتبه‌ی xG' در گروه مذکور متناهی است. برای اثبات عکس حکم توجه کنید که اگر مرتبه‌ی xG' در گروه G/G' متناهی باشد، به ازای $n \in \mathbb{N}$ای $x^n \in G'$. ولی G' متناهی بود و بنابراین در G داریم $(x^n)^{|G'|} = x^{n|G'|} = e$ که نتیجه می‌دهد $o(x) < \infty$ و طرف دیگر هم ثابت می‌شود.

حال به کمک ادعای فوق نشان می‌دهیم که $A < G$. چون A بنابر تعریف مجموعه‌ی عناصر از مرتبه‌ی متناهی G بود، عنصر همانی G را در بردارد. برای هر $x \in G$، $o(x) = o(x^{-1})$ که نشان می‌دهد اگر $x \in A$ آنگاه $x^{-1} \in A$. پس تنها قسمت باقیمانده در اثبات گروه بودن A، اثبات بسته بودن آن نسبت به ضرب است. اگر $x, y \in A$ آنگاه x و y عناصر از مرتبه‌ی متناهی Gاند و لذا بنابر ادعای فوق xG' و yG' عناصر از مرتبه‌ی متناهی G/G'اند. ولی این گروه آبلی است. در نتیجه مرتبه‌ی $(xG')(yG') = (xy)G'$ هم در این گروه متناهی است و حال استفاده مجدد از ادعای بالا نتیجه می‌دهد که مرتبه‌ی $xy \in G$ متناهی است یا معادلا $xy \in A$ و این حل مساله را به اتمام می‌رساند. $\square$

کاربردهایی از توپولوژی زاریسکی

ابوالفضل طاهری

در این نوشتار می‌خواهیم به کاربردهایی از توپولوژی زاریسکی بپردازیم. توپولوژی زاریسکی از مباحثی است که در هندسه‌ی جبری برای بررسی چندجلمه‌ای‌ها مطرح می‌شود و در واقع ضعیف‌ترین توپولوژی است که چندجمله‌ای‌ها تحت آن پیوسته‌اند.
در ادامه ابتدا مقدماتی را مطرح می‌کنیم، سپس در بخش ۲ اثباتی از قضیه‌ی کیلی-همیلتون را ارائه می‌کنیم که همین مقدمات برای آن کافی است. اما در بخش ۳ به مبحثی می‌پردازیم که پیش‌نیازهای بیش‌تری نیاز دارد، و گفتن آن‌ها خارج از حوصله‌ی این نوشتار است و خواننده می‌تواند به [۷] و یا Field and Galois Theory از Patrick Morandi مراجعه کند.

۱ مقدمات

فرض کنید K یک میدان باشد، منظور از یک n-فضای آفین روی K حاصلضرب دکارتی $K\times\cdots\times K$ (n بار) است. این فضا را با K^n، یا $\mathbb{A}^n(K)$ و یا $\mathbb{A}$ نمایش می‌دهیم. در حالت خاص $n=1$ این فضا را خط آفین و در حالت $n=2$ صفحه را آفین می‌نامیم.
اگر F یک چندجمله‌ای غیرثابت در $K[x_1,\ldots,x_n]$ باشد، مجموعه صفرهای F یک ابررویه[1] نامیده می‌شود و با $V(F)$ نماش داده می‌شود. یک ابر صفحه در K^2، به عبارت دیگر، صفرهای یک چندجمله‌ای دو متغیره غیرثابت یک خم مسطح آفین نامیده می‌شود.
فرض کنید S یک مجموعه از چندجمله‌ای‌ها در $K[x_1,\ldots,x_n]$ باشد. قرار می‌دهیم
$$V(S)=\{p\in K^n \mid \forall F\in S; F(p)=0\}$$
در این صورت $F(S)=\cap_{F\in S}V(F)$. اگر $S=\{F_1,\ldots,F_k\}$، در این صورت $V(S)$ را به صورت $V(F_1,\ldots,F_n)$ نمایش می‌دهیم.
زیرمجموعه‌ی $X\subset K^n$ یک مجموعه‌ی جبری آفین نامیده می‌شود اگر زیرمجموعه‌ی $S\subset K[x_1,\ldots,x_n]$ موجود باشد به طوری که $X=V(S)$.
در زیر خواصی ساده از مجموعه‌های جبری آفین را می‌بینید:

- فرض کنید $S_1,S_2\subset K[x_1,\ldots,x_n]$ در این صورت اگر $S_1\subset S_2$ آنگاه داریم $V(S_1)\supset V(S_2)$.
- اگر $F,G\in K[x_1,\ldots,x_n]$ آنگاه $V(FG)=V(F)\cup V(G)$.
- فرض کنید $S_1,S_2\subset K[x_1,\ldots,x_n]$، خواهیم داشت:
$$V(S_1)\cup V(S_2)=V(\{fg: f\in S_1, g\in S_2\})=V(S)$$

از مطلب فوق نتیجه می‌شود اجتماع تعداد متناهی مجموعه‌ی جبری آفین، یک مجموعه‌ی جبری آفین است.

- $V(1)=\emptyset$ و $V(0)=K^n$.

[1] hyper surface

- اگر $S \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ و I ایده‌آل تولید شده به وسیله‌ی S باشد آنگاه $V(I) = V(S)$.
- اگر $S_\alpha \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ آنگاه $V(\cup_\alpha S_\alpha) = \cap_\alpha V(S_\alpha)$.

فرض کنید K یک میدان و X زیرمجموعه‌ای از K^n باشد، مجموعه‌ی همه‌ی چندجمله‌ای‌ها در $K[x_1, \ldots, x_n]$ که روی X صفر می‌شوند تشکیل یک ایده‌آل در $K[x_1, \ldots, x_n]$ می‌دهند. این ایده‌آل را با $I(X)$ نمایش می‌دهند.

$$I(X) = \{F \in K[x_1, \ldots, x_n] \mid \forall a \in X; F(a) = 0\}$$

توجه کنید که I را می‌توان به عنوان یک نگاشت در نظر گرفت که به هر زیرمجموعه‌ی K^n یک ایده‌آل در $K[x_1, \ldots, x_n]$ نسبت می‌دهد. همچنین V می‌تواند به عنوان یک نگاشت در نظر گرفته شود که به هر زیرمجموعه از $K[x_1, \ldots, x_n]$ یک مجموعه‌ی جبری آفین نسبت می‌دهد.
در زیر برخی از خواص I را می‌بینیم:

- فرض کنید $X, Y \subset K^n$ در این صورت اگر $X \subset Y$ آنگاه $I(X) \supset I(Y)$.
- $I(\emptyset) = K[x_1, \ldots, x_n]$، اگر K نامتناهی باشد $I(K^n) = \{0\}$، و برای $a_1, \ldots, a_n \in K$، $I((a_1, \ldots, a_n)) = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$
- برای هر زیرمجموعه‌ی $X \subset K^n$ داریم $X \subset V(I(X))$ و تساوی اتفاق می‌افتد اگروتنها اگر X یک مجموعه‌ی جبری آفین باشد.
- برای هر زیرمجموعه‌ی $S \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ داریم $S \subset I(V(S))$ و تساوی اتفاق می‌افتد اگر وتنها اگر S یک ایده‌آل یک مجموعه‌ی جبری آفین باشد.
- $I(X_1 \cup X_2) = I(X_1) \cap I(X_2)$ و به طور کلی $I(\cup_\alpha X_\alpha) = \cap_\alpha I(X_\alpha)$.

فرض کنید K یک میدان باشد و $n \geq 1$، توپولوژیکی زاریسکی را روی K^n به این صورت تعریف می‌کنیم که بسته‌های این توپولوژی را مجموعه‌های جبری آفین درنظر می‌گیریم. به راحتی می‌توان دید که مکمل مجموعه‌های جبری آفین یک توپولوژی روی K^n تعریف می‌کند.
فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد، X را تحویل‌پذیر گوییم اگر بتوان X را به صورت اجتماع دو زیرمجموعه‌ی سره و بسته آن نوشت. اگر X تحویل‌ناپذیر نباشد آن را تحویل‌ناپذیر می‌گوییم.

قضیه ۱. *یک زیرمجموعه‌ی X از K^n تحویل‌ناپذیر است اگر وتنها اگر $I(X)$ یک ایده‌آل آول $K[x_1, \ldots, x_n]$ باشد.*

نتیجه ۲. *از قضیه‌ی فوق نتیجه می‌شود اگر K میدان نامتناهی باشد، آنگاه K^n تحویل‌ناپذیر است.*

قضیه ۳. *فرض کنید K میدانی نامتناهی باشد، آنگاه هر مجموعه‌ی ناتهی و باز در K^n چگال است.*

برای آشنایی بیشتر با مطالب فوق، و مشاهده‌ی اثبات گزاره‌ها می‌توانید به [۱] تا [۳] مراجعه کنید.

۲ قضیه کیلی-همیلتون

در نظریه‌ی ماتریس‌ها، کیلی کارهای بسیاری انجام داد، اما یکی از باارزش‌ترین کارهای او مقاله‌ای بود که در آن قضیه‌ی کیلی-همیلتون مطرح شد که بیان می‌داشت هر ماتریس مربعی در چندجمله‌ای مشخصه‌ی خود صدق می‌کند.
در مقاله‌ای تحت عنوان A memoir on the theory of matrices که در سال ۱۸۵۸ از کیلی منتشر شد، کیلی قضیه‌ی کیلی-همیلتون را اثبات کرد. اثبات شامل محاسبه برای ماتریس‌های ۲×۲ و نشان دادن اینکه می‌توان آن را به ماتریس‌های ۳×۳ گسترش داد، بود. سپس او بیان داشت که نتیجه را می‌توان به حالت کلی تعمیم داد. همچنین اضافه کرد: "لازم نمی‌دانم که در حالت کلی، برای ماتریس‌های با هر درجه‌ای، قضیه را اثبات کنم."

همیلتون مستقل از کیلی با استفاده از کواترنیون‌ها، و بدون استفاده از ماتریس‌ها، قضیه را برای $n = 4$ اثبات کرد. سپس کیلی در مقاله‌ای دیگر با کمک ماتریس‌ها به این مساله مهم پرداخت و آن را مساله کیلی-همیلتون نامید. در این بخش با استفاده از توپولوژی زاریسکی قضیه کیلی-همیلتون را اثبات می‌کنیم.

منظور از $M_n(K)$ مجموعه ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های در میدان K می‌باشد و $GL_n(K)$ مجموعه ماتریس‌های وارون‌پذیر با درایه‌های در میدان K می‌باشد.

فرض کنید $x_1, \dots, x_n$ متغیرهایی در میدان K باشند. kامین تابع متقارن اولیه از $\{x_i\}$ را تعریف می‌کنیم:

$$\mu_k(x_1, \dots, x_n) \sum (x_{i_1} \dots x_{i_k})$$

که این مجموع روی تمام زیرمجموعه‌های $\{i_1, \dots, i_k\}$ از $\{1, \dots, n\}$ است.

خواص زیر به راحتی در مورد توابع متقارن اولیه بدست می‌آید:

- فرض کنید G یک چندجمله‌ای متقارن روی $\{x_i\}$ باشد؛

$$G(x_1, \dots, x_n) = G(x_{\beta(1)}, \dots, x_{\beta(n)})$$

برای تمامی جایگشت‌های روی ۱ تا n برقرار باشد، آنگاه G را می‌توان برحسب توابع متقارن اولیه $\mu_k(x_1, \dots, x_n)$ نوشت.

- اگر $f \in P_n$، $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$، باشد، آنگاه ضرایب f به وسیله‌ی توابع متقارن اولیه روی ریشه‌ها، $\{r_i\}$، بدست می‌آید:

$$a_{n-k} = (-1)^k \mu_k(r_1, \dots, r_n); k = 1, \dots, n$$

اثبات مطالب فوق را در [۴] ببینید.

قضیه ۴. *(قضیه کیلی-همیلتون) فرض کنید $A \in M_n(K)$ باشد. اگر $p_A(t) = \det(tI - A)$ آنگاه $p_A(A) = 0$.*

لم ۵. *مجموعه ماتریس‌های در $M_n(K)$ با مقادیر ویژه تکراری مجموعه‌ی جبری‌اند.*

اثبات. فرض کنید A یک ماتریس باشد و p_A چندجمله‌ای مشخصه این ماتریس باشد و $\{r_1, \dots, r_n\}$ ریشه‌های این چندجمله‌ای باشند. تعریف می‌کنیم $\operatorname{disc}(p_A) = \prod_{i<j}(r_i - r_j)^2$. این تابع صفر است اگر وتنها اگر p_A ریشه‌ی تکراری داشته باشد. از طرفی $\operatorname{disc}(p_A)$ نسبت به تمامی جایگشت‌های $\{1, \dots, n\}$ روی ریشه‌ها ثابت است، پس می‌توان آن را به صورت یک چندجمله‌ای برحسب توابع متقارن اولیه از $r_1, \dots, r_n$ که همان ضرایب p_A هستند، نوشت. همچنین از آنجاییکه ضرایب p_A بر حسب چندجمله‌ای‌هایی از درایه‌های A قابل بیان هستند پس کلا $\operatorname{disc}(p_A)$ یک چندجمله‌ای بر حسب درایه‌های A است و ماتریس‌هایی که مقادیر ویژه‌ی تکراری دارند در این چندجلمه‌ای صدق می‌کنند و بنابراین مجموعه‌ی جبری‌اند. □

لم ۶. *فرض کنید $D_n(K)$ مجموعه ماتریس‌های $n \times n$ روی میدان نامتناهی K باشد که مقادیر ویژه متمایز دارند. در این صورت $D_n(K)$ در $M_n(K)$ با توپولوژی زاریسکی چگال است.*

اثبات. مجموعه‌ی $D_n(K)$ به وضوح ناتهی است. مجموعه ماتریس‌های با مقادیر ویژه‌ی تکراری مجموعه‌ی جبری‌اند و در نتیجه مکمل آن یعنی $D_n(K)$ باز است. حال با توجه به قضیه‌ی ۳ نتیجه می‌شود که $D_n(K)$ در $M_n(K)$ چگال است. □

قضیه ۷. *هر ماتریس $A \in D_n(K)$ قطری‌پذیر است، یعنی وجود دارد ماتریس $T \in GL_n(K)$ به طوری که $T^{-1}AT$ قطری است.*

اثبات. فرض کنید D ماتریس قطری مقادیر ویژه A، از $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ باشد و T ماتریس بردارهای ویژه $\nu_1, \dots, \nu_n$ متناظر با $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ به صورت ستونی باشد. آنگاه $AT = TD$. پس کافی است نشان دهیم T وارون‌پذیر است و بنابراین کافی است نشان دهیم ν_iها مستقل خطی‌اند. فرض کنید $\sum_{i=1}^m a_i \nu_i = 0$ که m کمترین مقدار ممکن است که تمام a_iها همگی صفر نباشند. پس می‌توان فرض کرد $a_1 \neq 0$. حال طرفین تساوی را روی A اثر دهید بدست می‌آوریم $\sum_{i=1}^m a_i \lambda_i \nu_i = 0$. از طرفی با ضرب تساوی فوق در λ_1 بدست می‌آوریم $\sum_{i=1}^m a_i \lambda_1 \nu_i = 0$. حال با کم کردن دو رابطه‌ی اخیر از یکدیگر، داریم:

$$\sum_{i=1}^m a_i \lambda_i - \sum_{i=1}^m a_i \lambda_1 = 0 \Rightarrow \sum_{i=2}^m a_i (\lambda_i - \lambda_1) \nu_i = 0$$

که با فرض مینیمم بودن m در تناقض است. $\square$

حال به اثبات قضیه کیلی-همیلتون می‌پردازیم.

اثبات. (قضیه کیلی-همیلتون) می‌خواهیم نشان دهیم مورفیسم $f : K^{n^2} \to K$ که $A \to p_A$ تابع صفر است. چون $D_n(K)$ در $M_n(K)$ چگال است کافی است حکم را برای $A \in D_n(K)$ ثابت کنیم. با توجه به قضیه‌ی قبل $A \in D_n(K)$ قطری‌پذیر است. داریم:

$$p_{T^{-1}AT}(T^{-1}AT) = T^{-1}p_A(A)T$$

بنابراین کافی است حکم را برای Aهای قطری ثابت کنیم. پس فرض کنید A ماتریس قطری است که $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ درایه‌های قطر آن باشند. برای محاسبه‌ی $p_A(A)$، p_A را روی A اثر می‌دهیم، p روی تک تک درایه‌های ماتریس عمل می‌کند و تمام درایه‌ها به جز درایه‌های قطر اصلی صفر است. درایه‌های قطر اصلی نیز مقادیر ویژه هستند که تحت اثر p_A صفر می‌شوند و ماتریس حاصل ماتریس صفر است. بنابراین حکم ثابت می‌شود. $\square$

۳ قضایای پایه نرمال و پایه اولیه

در این بخش می‌خواهیم نشان دهیم که خواص جبری توسیع‌های میدانی را می‌توانیم با خصوصیات مورفیسم‌های بین واریته‌های آفین بیان کنیم. به عنوان کاربرد قضایای پایه اولیه و پایه نرمال که دو قضیه‌ی ساده در جبر است را توسعه می‌دهیم. مطالب این بخش براساس مقاله‌ی Generalizations of the Primitive and Normal Basis Theorems از دکتر شهرام بیگلری می‌باشد. در این بخش از نمادگذاری و نتایجی از [۷] نیز استفاده می‌کنیم که امکان ذکر آن‌ها در اینجا نمی‌باشد.

ابتدا نتایجی در مورد توپولوژی زاریسکی روی فضاهای آفین استاندارد و زیرمجموعه‌های آن‌ها ثابت می‌کنیم. تمامی نتایج از تعاریف بدست می‌آید. سپس به قضیه اعضای اولیه می‌پردازیم. برای این قضیه از این واقعیت استفاده خواهیم کرد که توسیع میدانی E/F از میدان‌های نامتناهی، جدایی‌پذیر است اگر وتنها اگر وجود داشته باشد میدان $K \subset E$ و F-جبر نشاننده $E \to K^n$ به طوری که تصویر آن با توپولوژی زاریسکی چگال باشد. این موضوع توسیع قضیه‌ی اعضای اولیه را نتیجه می‌دهد:

قضیه ۸. *فرض کنید E/F یک توسیع جدایی‌پذیر درجه متناهی از میدان‌های نامتناهی باشد و S یک مجموعه‌ی متناهی از چندجمله‌ای‌های ناثابت روی F باشد. آنگاه نامتناهی $a \in E$ وجود دارد به طوری که*

$$\forall h \in S; E = F(h(a))$$

نشان خواهیم داد که نامتناهی $a \in E$ وجود دارد به طوری که $E = F[a]$ و $N_{E/F}(a) = ۱$.

در مرحله‌ی بعد می‌بینیم که توسیع E/F از درجه‌ی n روی میدان‌های نامتناهی، گالواست اگر وتنها اگر یک F-جبر نشاندن از $E \to E^n$ وجود داشته باشد به طوری که تصویر آن با توپولوژی زاریسکی چگال باشد. با توجه به این مطلب خواهیم داشت:

قضیه ۹. *فرض کنید توسیع E/F، توسیع گالوا از درجه متناهی از میدان‌های نامتناهی باشد، و S مجموعه‌ای متناهی از چندجمله‌ای‌های ناثابت روی F باشد. در این صورت نامتناهی $a \in E$ وجود دارد به طوری که برای هر $h \in S$ داریم:*

- $E = F(h(a))$
- $\{\sigma(h(a)) \mid \sigma \in Gal(E/F)\}$ *یک پایه برای E/F است.*

این قضیه در واقع توسیع قضیه عضو اولیه و پایه نرمال است. در حالت کلاسیک این قضیه، می‌بینیم که برای توسیعی که $E \neq F$ است، تعداد نامتناهی $a \in E$ وجود دارد که $E = F(a)$ و $N_{E/F}(a) = ۱$ و $\{\sigma(a) \mid \sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)\}$ یک پایه برای E روی F است.

نتایجی در مورد توپولوژی زاریسکی

گزاره ۱۰. *فرض کنید K یک میدان باشد و توپولوژی زاریسکی را روی K^n در نظر بگیرید. در این صورت هر خودریختی K-خطی از K^n پیوسته است.*

اثبات. با توجه به اینکه از توپولوژی زاریسکی استفاده می‌کنیم و تابع K-خطی است به راحتی می‌توان دید که وارون یک گوی باز در K^n باز است و این حکم را نتیجه می‌دهد. $\square$

گزاره ۱۱. *فرض کنید $F \subset K$ یک توسیع از میدان‌های نامتناهی باشد و V یک F-فضای برداری است از K^n باشد. در این صورت بستار V در K^n با توپولوژی زاریسکی، یک K-زیرفضای برداری است که توسط V تولید شده است.*

اثبات. فرض کنید V_K، K-زیرفضای برداری تولید شده توسط V باشد. در این صورت یک پایه برای V_K از اعضای V انتخاب می‌کنیم. حال خودریختی K-خطی f از K^n یافت می‌شود که V_K را به یک بسته زاریسکی K^r می‌برد که $r = \dim_K V_K$.

بنا به تعریف، f همیومورفیسم است و F-خطی است. داریم $F^r \subset f(V) \subset K^r$. کافی است نشان دهیم F^r در K^r چگال است، زیرا کافی است از رابطه‌ی بدست آمده بستار بگیریم.

نشان می‌دهیم اگر $p \in K[x_۱, \dots, x_r]$ روی F^r صفر باشد آنگاه $p = ۰$. عضو ثابت $(\lambda_۱, \dots, \lambda_{r-۱}) \in F^{r-۱}$ را در نظر بگیرید. چندجمله‌ای $p(\lambda_۱, \dots, \lambda_{r-۱}, x_r) \in K[x_r]$ نامتناهی ریشه دارد و بنابراین معادل چندجمله‌ای صفر است. این نتیجه می‌دهد p به عنوان چندجمله‌ای روی x_r با درایه‌های در $K[x_۱, \dots, x_{r-۱}]$ روی تمام $F^{r-۱}$ صفر است. حال به کمک استقرا بدست می‌آید $p = ۰$. $\square$

نتیجه ۱۲. *فرض کنید E/F یک توسیع درجه n از میدان‌های نامتناهی باشد و K میدان شامل F است. در این صورت بستار تصویر نمایش منظم*

$$\xi_{E/F} : E \to End_F(E) \otimes_F K = M_n(K)$$
$$x \to (L_x : y \to xy) \otimes ۱$$

یک K-زیرفضای از بعد n است.

لم ۱۳. *فرض کنید K یک میدان نامتناهی باشد و n یک عدد صحیح مثبت و $p_i \in K[x_۱, \dots, x_i]$ چندجمله‌ای‌هایی باشند که $\frac{\partial p_i}{\partial x_i}$ برای تمام $i \leq n$ ناصفر است. آنگاه نگاشت:*

$$p : K^n \to K^n; (\lambda_۱, \dots, \lambda_n) \to (p_۱(\lambda_۱), \dots, p_n(\lambda_۱, \dots, \lambda_n))$$

تصویر زاریسکی چگال دارد.

اثبات. تعریف می‌کنیم:

$$\bar{\lambda} = (\lambda_۱, \dots, \lambda_n) \in K^n; p_i(\bar{\lambda}) = p_i(\lambda_۱, \dots, \lambda_i)$$

حال با استقرا روی n ثابت می‌کنیم اگر برای چندجمله‌ای $q \in K[T_۱, \dots, T_n]$ و برای هر $\bar{\lambda} \in K^n$ داشته باشیم $q(p_۱(\bar{\lambda}), \dots, p_n(\bar{\lambda})) = ۰$، آنگاه $q = ۰$.

اگر $n = ۱$ باشد، از ناثابت بودن $p_۱$ نتیجه می‌شود که تصویر p به عنوان یک تابع روی K، زیرمجموعه‌ای نامتناهی است و $q(p_۱(\bar{\lambda})) = ۰$ باید بی‌نهایت جواب داشته باشد، پس $q = ۰$.

حال فرض کنید حکم برای $n - ۱$ درست است، حکم را برای n ثابت می‌کنیم. چندجمله‌ای q از n متغیر است، داریم

$$q = \sum_{r=۰}^{m} q_r T_n^r; q_r \in K[T_۱, \dots, T_{n-۱}]$$

از فرض $\frac{\partial p_n}{\partial x_n} \neq ۰$ نتیجه می‌شود $\bar{\mu} := (\lambda_۱, \dots, \lambda_{n-۱})$ وجود دارد که چندجمله‌ای $p_n(\lambda_۱, \dots, \lambda_{n-۱}, T_n)$ ثابت نیست. بنابراین مجموعه‌ی $A = \{p_n(\lambda_۱, \dots, \lambda_{n-۱}, \lambda_n) \mid \lambda_n \in K\}$ نامتناهی است. پس نتیجه می‌شود $q(p_۱(\bar{\mu}), \dots, p_{n-۱}(\bar{\mu}), T_n)$ بی‌نهایت صفر دارد زیرا تمامی اعضای A ریشه‌ی آن هستند، و بنابراین برای تمامی rها داریم:

$$\forall \bar{\mu} \in K^{n-۱}; q_r(p_۱(\bar{\mu}), \dots, p_{n-۱}(\bar{\mu}), T_n) = ۰$$

و بنابر فرض استقرا $q = ۰$. $\square$

نتیجه ۱۴. *فرض کنید K میدان نامتناهی و $p \in K[t]$ را چندجمله‌ای ناثابت در نظر بگیرید. آنگاه نگاشت*
$$\tilde{p} : K^n \to K^n; (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \to (p(\lambda_1) \dots, p(\lambda_n))$$
تصویر چگال دارد.

قضیه عضو اولیه

توسیع E/F را جدایی‌پذیر می‌گوییم اگر هر عضو $\lambda \in E$ ریشه‌ی ساده‌ی یک چندجمله‌ای ناصفر $f(x) \in F[x]$ باشد.

فرض کنید E/F یک توسیع جدایی‌پذیر با درجه متناهی روی میدان‌های نامتناهی باشد. یک F-جبر نشاننده $\xi_{E/F}$ که در نتایج فوق دیدیم را در نظر بگیرید، با توجه به خوش‌تعریفی و تعریف [۷]، وجود دارد $P \in GL_n(K)$ به طوری که تابعی که $x \in E$ را به $P^{-1}\xi_{E/F}(x)P$ می‌فرستد، یک F-جبر همیومورفیسم تعریف می‌کند $\bar{\xi}_{E/F} : E \to K^n$، که تصویر این همیومورفیسم با توجه به [۷] چگال زاریسکی است. در واقع در [۷] نشان داده شده است که عکس این حکم همیشه درست است.

گزاره ۱۵. *توسیع E/F از میدان‌های نامتناهی از درجه متناهی جدایی‌پذیر است اگر وتنها اگر وجود داشته باشد، توسیع میدانی K/F و F-جبر نشاننده $\bar{\xi}_{E/F} : E \to K^n$ که دارای تصویر زاریسکی چگال است.*

تعریف ۱۶. *فرض کنید K میدانی نامتناهی باشد و n عدد صحیح مثبتی است. تعریف می‌کنیم:*
$$P_K(n) = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n : \lambda_i \neq \lambda_j, \forall i \neq j\}$$

قضیه ۱۷. *(قضیه عضو اولیه) فرض کنید E/F توسیع جدای‌پذیر از درجه متناهی از میدان‌های نامتناهی است و S مجموعه‌ی متناهی از چندجمله‌ای‌های ناثابت روی F است. در این صورت نامتناهی $a \in E$ وجود دارد به طوری که برای هر $h \in S$ داریم $E = F(h(a))$.*

اثبات. قرار دهید $n := \dim_F E$. در این صورت برای $n = 1$ حکم واضح است. بنابراین فرض کنید $n > 1$.

میدان K، K^n، $\bar{\xi}_{E/F} : E \to K^n$، و $P_K(n)$ را که در بالا تعریف کردیم، در نظر بگیرید. برای هر $h \in S$، h را به صورت یک تابع روی E در نظر بگیرید و $\tilde{h}$ را مورفیسم متناظر با آن که در نتیجه ۱۴ آمد در نظر بگیرید. با توجه به تعریف، مجموعه‌ی $P_K(n)$ باز و ناتهی است و بنابراین $\tilde{h}^{-1}(P_n(K))$ زیرمجموعه‌ی ناتهی از K^n است. با توجه به چگال بودن $\bar{\xi}_{E/F}(E)$ در فضای تحویل‌ناپذیر K^n، داریم:
$$\bar{\xi}_{E/F}(E) \cap (\cap_{h \in S} \tilde{h}^{-1}(P_K(n))) \neq \emptyset$$

حال فرض کنید $\bar{\xi}_{E/F}(a)$ عضوی در این مجموعه باشد و $h \in S$. چون $\bar{\xi}_{E/F}$ یک F-جبر همیومورفیسم است داریم $\bar{\xi}_{E/F} o h = \tilde{h} o \bar{\xi}_{E/F}$. بنابراین $\tilde{h}(\bar{xi}_{E/F}(a)) \in P_K(n)$ اگر وتنها اگر $\bar{\xi}_{E/F}(h(a)) \in P_K(n)$.

با توجه به تعریف $P_K(n)$، چندجمله‌ای مینیمال $\bar{\xi}_{E/F}(h(a))$ روی K از درجه n است. بنابراین چندجمله‌ای مینیمال $h(a)$ روی F از درجه n است و در نتیجه $E = F(h(a))$. بعلاوه با توجه به تحویل‌ناپذیری K^n و بنابراین $\bar{\xi}_{E/F}(E)$، اشتراک بالا یک مجموعه‌ی نامتناهی است. □

فرض کنید $E \neq F$، با توجه به اثبات فوق مجموعه
$$A := \{aF^* \mid E = F(h(a)), \forall h \in S\} \subset \frac{E^*}{F^*}$$
نامتناهی است.

نتیجه ۱۸. *فرض کنید E/F یک توسیع نابدیهی جدایی‌پذیر از میدان‌های نامتناهی با بعد متناهی باشد. در این صورت نامتناهی $a \in E$ وجود دارد به طوری که $E = F(a)$ و $N_{E/F}(a) = 1$.*

اثبات. F-جبر نشاندن $\bar{\xi}_{E/F} : E \to K^n$ را در نظر بگیرید که در آن $K^n = D_n(K)$ است. بنابراین داریم $N_{E/F}(a) = \det(\bar{\xi}_{E/F}(a))$.

حال اگر قرار دهیم $S = \{x^n\}$ که $n = \dim_F E$، به عبارتی در صورت قضیه مجموعه‌ی S را چندجمله‌ای x^n در نظر بگیرید، آنگاه $b \in E^*$ را طوری می‌یابیم که $E = F(b^n)$. حال می‌توانیم قرار دهیم $a = b^n N_{E/F}(b)^{-1}$. اگر تنها تعداد متناهی

a وجود داشته باشد که در شرایط مساله صدق کند، مثلا $a_1, \dots, a_k$ متناظر با $b_1, \dots, b_k$، آنگاه برای $U = \tilde{x}^{n^{-1}}(P_K(n))$ و $C = \{x \in K^n \mid x^n - \det(x) = 0\}$ داریم:

$$\bar{\xi}_{E/F}(E) \subset (D_n(K)) \cup \bar{\xi}_{E/F}(b_1)C \cup \dots \cup \bar{\xi}_{E/F}(b_k)C$$

که با تحویل‌ناپذیری K^n در تناقض است. □

تعمیم قضیه پایه نرمال

توسیع جدایی‌پذیر E/F با درجه‌ی متناهی گالواست اگر مجموعه‌ی F-جبر خودریختی‌های E دقیقا $[E:F]$ عضو داشته باشد. با استفاده از نتایجی که تا کنون بدست آوردیم، از توپولوژی زاریسکی برای توصیف این مطلب استفاده می‌کنیم و سپس قضیه‌ی پایه نرمال را ثابت می‌کنیم.

فرض کنید E/F یک توسیع گالوا از میدان‌های نامتناهی با درجه n باشد. میدان $E \supset K$ و F-جبر نشانننده $\xi : E \to K^n$ وجود دارد که تصویر آن با توپولوژی زاریسکی چگال است. چون E/F گالواست برای هر $i = 1, \dots, n$ تصویر F-جبر منومورفیسم $\pi_i : E \to K$ با ضابطه‌ی $x \to \bar{\xi}_{E/F}(x)_i$ در E قرار می‌گیرد. عکس این مطلب نیز همیشه درست است.

گزاره ۱۹. *توسیع E/F از میدان‌های نامتناهی با درجه‌ی n، گالواست اگر وتنها اگر F-جبر نشاننده $\bar{\xi}_{E/F} : E \to D_n(E)$ وجود داشته باشد که تصویر آن با توپولوژی زاریسکی چگال باشد.*

تعریف ۲۰. *فرض کنید E/F توسیع گالوا از درجه‌ی n روی میدان‌ها نامتناهی است. اعضای $Gal(E/F)$ را با $\{1, \dots, n\}$ نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:*

$$N_E(n) = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in E^n; \det(\lambda_{\sigma\tau}) \neq 0\}$$

که در آن $\det(\lambda_{\sigma\tau})$ را به این صورت تعریف می‌کنیم: فرض کنید f یک تابع یک به یک و پوشا از $Gal(E/F)$ به $\{1, \dots, n\}$ باشد. دترمینان فوق را دترمینان ماتریسی در نظر می‌گیریم که درایه‌ی ijام آن λ_a است که $a = f^{-1}(i)f^{-1}(j)$ می‌باشد.

قضیه ۲۱. *(پایه نرمال) فرض کنید E/F یک توسیع گالوا از درجه‌ی متناهی از میدان‌های نامتناهی، و S مجموعه‌ای از چندجمله‌ای‌های ناثابت روی F باشد. در این صورت تعداد نامتناهی $a \in E$ وجود دارد به طوری که برای هر $h \in S$ داریم $E = F(h(a))$ و $\{\sigma(h(a)) \mid \sigma \in Gal(E/F)\}$ یک پایه برای E روی F است.*

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم $N_E(n)$ ناتهی است. زیرا برای $\lambda := (1, 0, \dots, 0)$ داریم $\det(\lambda_{\sigma\tau}) = \pm 1$. حال شبیه قضیه اعضای اولیه اثبات را ادامه می‌دهیم. مجموعه‌ی $P_K(n)$ را با $P_E(n) \cap N_E(n)$ جابه‌جا می‌کنیم و بدست می‌آوریم:

$$\bar{\xi}_{E/F}(E) \cap (\cap_{h \in S} \tilde{h}^{-1}(P_E(n) \cap N_E(n))) \neq \emptyset$$

فرض کنید $\bar{\xi}_{E/F}(a)$ عضوی از این مجموعه باشد و $h \in S$. با توجه به اثبات بالا $E = F(h(a))$. به عبارت دیگر، چون $\lambda := \bar{\xi}_{E/F}(h(a)) \in N_E(n)$، برای هر $\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)$ داریم $\lambda_\sigma = \sigma(h(a))$ بنابراین $\det(\lambda_{\sigma\tau}) \neq 0$. با توجه به نتایجی از [۷] این هم ارز است با اثبات اینکه $\{\sigma(h(a)) \mid \sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)\}$ یک پایه برای E روی F است. □

نتیجه ۲۲. *فرض کنید E/F توسیع گالوا نابدیهی از میدان‌های نامتناهی با بعد متناهی باشد. در این صورت نامتناهی $a \in E$ وجود دارد به طوری که $E = F(a)$، $N_{E/F}(a) = 1$ و $\{\sigma(a) \mid \sigma \in Gal(E/F)\}$ یک پایه برای E روی F است.*

تشکر و قدردانی

در پایان از استاد بزرگوار، دکتر محمد غلامزاده محمودی که راهنمای من در گردآوری این مطالب بودن، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

مراجع

[۱] غلامزاده‌محمودی، محمد، *آشنایی با هندسه جبری*، ۸۹–۸۸.

[2] William Fulton, *Algebraic Curve, An Introduction to Algebraic Geometry* , 1969.

[3] Donu Arapura, *Notes on Basic Algebraic Geometry* , 2008.

[4] A. Rosoff Jeffrey, *A Topological Proof of the Cayley-Hamilton Theorem* , Gustarus Adolphus College.

[5] Alessadro Perotti, *Http://www.science.unitn.it/ Perotti/HistorofLinearAlgebra.pdf* , 2008.

[6] Shahram Biglari, *Generalization of the Primitive and Normal Basis Theorem* , Communications in Algebra 37: 317-322.

[7] N. Bourbaki, *Algebra II. Elements of Mathematics* , Translated by P. M. Cohn and J. Howie, 1988.

لم اسپرنر و قضیه نقطه ثابت براور[1]

آلکس رایت[2]

یک نقطه‌ی ثابت برای تابع $f : X \to X$ نقطه‌ای مانند $x_\circ \in X$ است که $f(x_\circ) = x_\circ$.
قضایایی که در مورد وجود نقاط ثابت توابع صحبت می‌کنند در آنالیز بسیار مفید هستند. یکی از مشهورترین این قضایا به براور باز می‌گردد. فرض کنید $D_n = \{x \in \mathbb{R}^n : | x | \leq 1\}$؛

قضیه نقطه ثابت براور: هر تابع پیوسته $f : D_n \to D_n$ دارای نقطه‌ی ثابت است.

در این مقاله می‌خواهیم اثباتی برای قضیه‌ی براور در حالت $n = 2$ با استفاده از لم اسپرنر، که یک مسئله ترکیبیاتی است ارائه دهیم.
در ادامه به لم اسپرنر و قضیه براور می‌پردازیم.
قضیه براور برای حالت $n = 1$ بسیار ساده و مقدماتی است اما برای بعدهای بالاتر مسئله به این سادگی نیست. اثبات زیر برای حالت $n = 1$ است:

اثبات. فرض کنید $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ تابعی پیوسته باشد. تعریف می‌کنیم $g(x) = x - f(x)$ در این صورت $g(1) \geq \circ$ و $g(-1) \leq \circ$. بنابراین با توجه به قضیه مقدار میانی نقطه‌ای مانند $x_\circ$ وجود دارد که $g(x_\circ) = \circ$، و این نتیجه می‌دهد که $f(x_\circ) = x_\circ$. □

تعریف ۱. *مجموعه‌ی $G \subset \mathbb{R}^n$ را یک دامنه‌ی نقطه ثابت می‌نامیم اگر هر تابع پیوسته از G به خودش دارای نقطه‌ی ثابت باشد.*

بنابراین نقطه‌ی ثابت براور می‌گوید که D_n برای $n \geq 1$ یک دامنه‌ی نقطه ثابت است. اگر از D_n یک نقطه برداریم در این صورت دیگر دامنه‌ی نقطه ثابت نیست، همچنین $[\circ, 1] \cup [2, 3]$ و $\mathbb{R}$ دامنه‌ی نقطه ثابت نیستند (به راحتی می‌توانید روی این مجموعه‌ها توابعی مناسب تعریف کنید که نقطه‌ی ثابت ندارند). این واقعیت که D_n فشرده است نقشی اساسی در قضیه‌ی نقطه ثابت براور دارد.

قضیه ۲. *فرض کنید G یک دامنه‌ی نقطه ثابت باشد و $f : G \to H$ یک هومومورفیسم باشد(تابعی پیوسته، یک‌به‌یک و پوشا با وارون پیوسته) در این صورت H نیز یک دامنه‌ی نقطه ثابت است.*

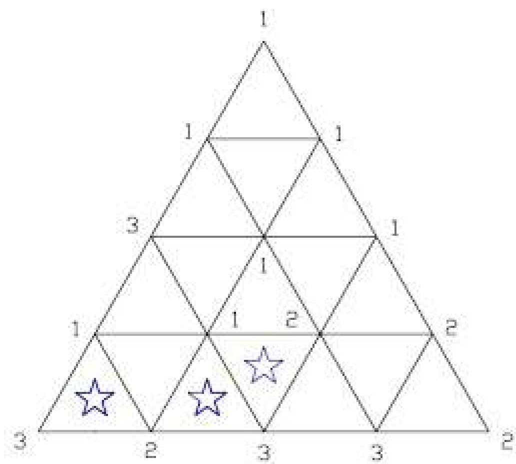
اثبات. فرض کنید $g : H \to H$ تابعی پیوسته باشد در این صورت $f^{-1} o g o f : G \to G$ نیز پیوسته است بنابراین دارای نقطه‌ای ثابت مانند $x_\circ$ است. حال داریم

$$(f^{-1} o g o f)(x_\circ) = x_\circ \Rightarrow g(f(x_\circ)) = f(x_\circ)$$

بنابراین $f(x_\circ)$ نقطه‌ی ثابت g است. □

قضیه‌ی فوق نشان می‌دهد که دامنه‌ی نقطه ثابت، خاصیتی توپولوژیک است. بنابراین در حالت خاص برای قضیه نقطه‌ی ثابت براور در حالت $n = 2$ مسئله معادل این است که نشان دهیم هر تابع پیوسته از یک مثلث به خودش دارای نقطه ثابت است زیرا تابعی پیوسته، یک به یک و پوشا با وارون پیوسته از دایره به مثلث وجود دارد.

[1] Sperner's Lemma and Brouwer's Fixed Point Theorem - Alex Wright
[2] ترجمه‌ی ابوالفضل طاهری



شکل ۱: یک نمونه مثلث‌بندی

لم اسپرنر

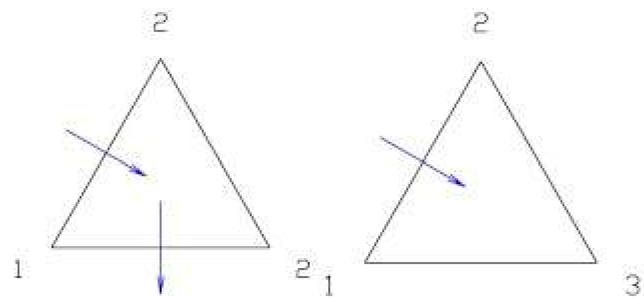
یک مثلث‌بندی از یک مثلث، تقسیم مثلث فوق به مثلث‌های کوچکتر است. مثلث‌های کوچک را مثلث‌های کودک و گوشه‌های مثلث‌ها را رئوس می‌نامیم. بین دو راس یال وجود دارد و دو مثلث با هم در یک راس یا یک یال می‌توانند اشتراک داشته باشند.
یک برچسب‌گذاری اسپرنر، یک برچسب‌گذاری بر روی رئوس یک مثلث‌بندی با اعداد ۱ و ۲ و ۳ است به طوری که:

- سه گوشه‌ی مثلث اصلی با ۱ و ۲ و ۳ برچسب‌گذاری شود.
- هر راس روی خطی که i, j را به هم وصل می‌کند دارای برچسب i یا j باشد.

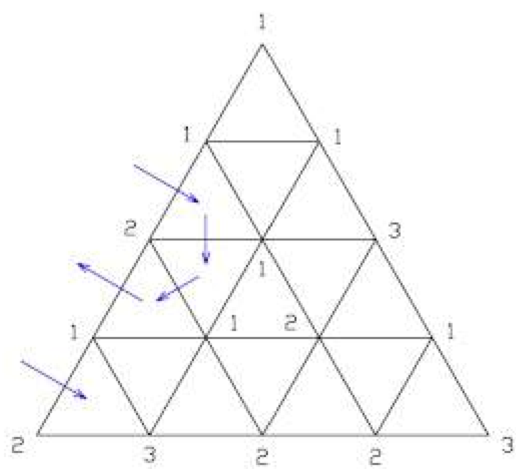
لم ۳. (*لم اسپرنر*) *هر برچسب‌گذاری اسپرنر دارای یک مثلث کودک با برچسب رئوس ۱ و ۲ و ۳ است.*

لم اسپرنر به ابعاد بالاتر هم تعمیم داده می‌شود به این صورت که هر رنگ‌آمیزی یک مثلث‌بندی ابرسطحی با $n+1$ رنگ، دارای یک ابرسطح کودک است که تمامی $n+1$ رنگ را دارد. اثباتی را که در ادامه برای حالت ۲ بعدی می‌آید در واقع می‌توان برای n دلخواه گسترش داد.

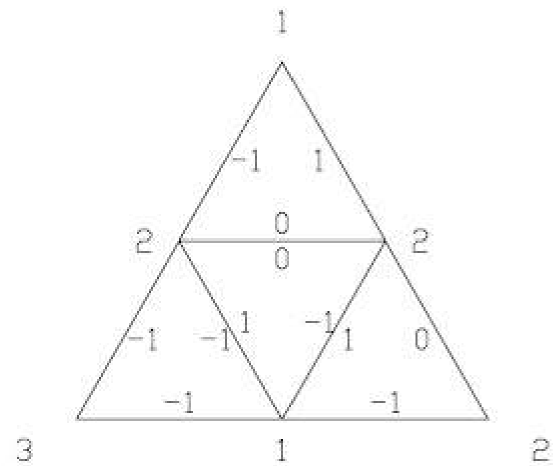
اثبات. ابتدا به این واقعیت می‌پردازیم که تعداد یال‌های ۲-۱ در سطح بیرونی مثلث، فرد است. برای دیدن این موضوع، یال‌های روی مرز را که دارای رئوس با برچسب ۱ یا ۲ هستند یک برچسب می دهیم به این صورت که تفاضل دو برچسب رئوس آن را به آن نسبت می‌دهیم. بنابراین هر ۲-۱ یال دارای برچسب ± 1 و هر ۱-۱ یال و ۲-۲ یال دارای برچسب ۰ خواهد بود. دیده می‌شود که مجموع این برچسب‌ها برابر با تفاضل گوشه‌هاست یعنی ۱ (دقت کنید که مسیری از ۱ و ۲ ها را طی می‌کنیم که با ۱ شروع و به ۲ ختم می‌شود پس تعداد تغییرات فرد است پس تعداد ۲-۱ یال‌ها فرد است.)
حال به مثلث به شکل یک خانه نگاه می‌کنیم. هر مثلث کودک یک اتاق است و هر ۲-۱ یال را یک در برای اتاق درنظر می‌گیریم. مسیری در مثلث بندی را درنظر بگیرید که از خارج مثلث شروع می‌شود و از درها می‌گذرد. یک مسیر تنها در صورتی تمام می‌شود که از مثلث خارج شویم یا وارد یک ۳-۲-۱ مثلث شویم. به علاوه با انتخاب یک ورودی مسیر به طور یکتا مشخص می‌شود زیرا هیچ مثلثی سه یال ۲-۱ ندارد، همچنین این نتیجه می‌دهد که دو مسیر نمی‌توانند در یک مثلث مشترک باشند. تمامی این چنین مسیرهایی را در نظر بگیرید. هر مسیر که انتهای آن خروج از مثلث باشد یک جفت ۲-۱ یال در مرز دارد یکی برای شروع و یکی برای پایان. بنابراین، این مسیرها تعداد زوجی از ۲-۱ یال‌های روی مرز را شامل می‌شوند اما تعداد ۲-۱ یال‌های روی مرز تعداد فردی بود، بنابراین حداقل یک مسیر وجود دارد که به ۳-۲-۱ مثلث ختم می‌شود. پس حکم نتیجه می‌شود. □



شکل ۲: حرکت در مثلث‌ها



شکل ۳: برخی از مسیرها در یک مثلث



شکل ۴: برچسب‌گذاری یال‌ها

لم ۴. *(حالت قوی‌تر اسپرنر) بدون کاسته شدن از کلیت، فرض کنید که برچسب‌گذاری اسپرنر مثلث بیرونی، به صورت ساعتگرد باشد. فرض کنید A تعداد مثلث‌های کودک ۳-۲-۱ باشد که در جهت عقربه‌های ساعت علامت‌گذاری شده‌اند و B تعداد مثلث‌های ۳-۲-۱ که خلاف جهت عقربه‌های ساعت شماره‌گذاری شده‌اند. در این صورت داریم $A - B = ۱$.*

اگر این لم را ثابت کنیم، در این صورت $A + B$ تعداد مثلث‌های کودک ۳-۲-۱ خواهد بود که عددی فرد است و بزرگتر از صفر. اثبات لم اسپرنر را به گونه‌ای تغییر می‌دهیم که این لم را نتیجه دهد.

اثبات. به هر یال در مثلث‌بندی یک برچسب نسبت می‌دهیم. اگر یک یال بین دو مثلث مشترک باشد در این صورت دارای دو برچسب خواهد بود که هرکدام مربوط به یک مثلث کودک است. حال یک یال در یک مثلث کودک را درنظر بگیرید که دارای برچسب راسی i و j در جهت ساعتگرد است. در این صورت برچسب یال را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۰ & j = i \mod ۳ \\ ۱ & j = i + ۱ \mod ۳ \\ -۱ & j = i - ۱ \mod ۳ \end{cases}$$

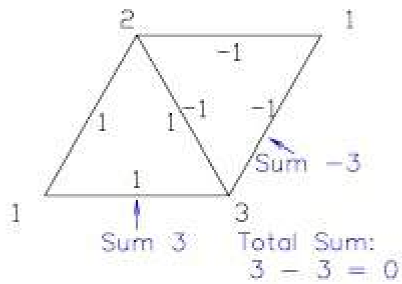
در مورد این برچسب‌گذاری یالی، ویژگی‌های زیر را داریم:

- مجموع برچسب‌های یال‌های یک مثلث کودک ۳-۲-۱ ساعتگرد ۳ است و برای یک مثلث ۳-۲-۱ پادساعتگرد ۳- است، و در غیر این صورت صفر است.
- اگر یک یال بین دو مثلث مشترک باشد در این صورت برچسب آن در یک مثلث، منفی برچسب آن در دیگری است.
- مجموع برچسب‌های یالی یک چندضلعی که از ترکیب چند مثلث کودک حاصل شده‌است برابر است با مجموع، مجموع‌های برچسب‌گذاری یالی مثلث‌های کودک تشکیل‌دهنده‌ی آن.

مجموع یال‌های مثلث بزرگ ۳ است زیرا مجموع روی هر ضلع برابر ۱ است(فرض کرده‌ایم که به صورت ساعت‌گرد مثلث برچسب‌گذاری شده است.). حال با استفاده از ویژگی سوم، مجموع برچسب‌های تمام مثلث‌های کودک برابر ۳ است یعنی

$$۳A - ۳B = ۳ \Rightarrow A - B = ۱$$

□



شکل ۵: ویژگی سوم، در مورد چندضلعی‌ها

مختصات مرکزی باری[۳]

مختصات مرکزی باری یک نقطه درون یک مثلث را به صورت میانگین وزن‌دار رئوس مثلث در نظر می‌گیریم. به عبارتی مثلث را به عنوان یک پوش محدب در نظر بگیرید، در این صورت هر نقطه‌ی مثلث را می توان به شکل

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c$$

نوشت که در آن

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

و a, b, c مختصات رئوس مثلث است. پس مختصات مرکزی باری به صورت سه‌تایی‌های مرتب است که مجموعشان ۱ است. برای مثال اگر (۰,۰)، (۰,۱)، (۱,۰) سه راس مثلث باشند در این صورت مختصات مرکزی باری آن‌ها به ترتیب (۱,۰,۰)، (۰,۱,۰)، (۰,۰,۱) است. در این مثال مختصات مرکزی باری نقطه‌ی (۱/۴,۱/۴) باید (۱/۲,۱/۴,۱/۴) شود.

قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت براوور

قضیه ۵. (*نقطه‌ی ثابت برای* $n = 2$) *هر تابع پیوسته از مثلث به خودش دارای نقطه‌ی ثابت است.*

اثبات. فرض کنید f تابعی پیوسته از مثلث T به خودش باشد. می‌نویسیم $(a, b, c) \to (a', b', c')$ اگر در مختصات مرکزی باری $f(a, b, c) = (a', b', c')$ باشد. هر نقطه درون مثلث را به صورت زیر برچسب‌گذاری می‌کنیم. فرض کنید $(a, b, c) \to (a', b', c')$:

- اگر $a' < a$ در این صورت برچسب (a, b, c) را ۱ در نظر می‌گیریم.
- اگر $a' \geq a$ و $b' < b$ در این صورت برچسب (a, b, c) را ۲ در نظر می‌گیریم.
- اگر $a' \geq a$ و $b' \geq b$ اما $c' < c$ در این صورت برچسب (a, b, c) را برابر ۳ درنظر می‌گیریم.

اگر نتوانیم برای (a, b, c) یک برچسب بیابیم در این صورت $a' \geq a$، $b' \geq b$، $c' \geq c$ بنابراین $a' = a$، $b' = b$، $c' = c$، پس (a, b, c) یک نقطه‌ی ثابت است. پس فرض می‌کنیم که تمامی نقاط را برچسب‌گذاری کرده‌ایم. در غیر این صورت نقطه‌ی ثابت داریم و حکم ثابت است.
می‌خواهیم به دنباله‌ای از مثلث‌های کوچک ۳-۲-۱ برسیم که به یک نقطه همگرا هستند. اگر این نقطه، نقطه‌ی ثابت نباشد پیوستگی f ما را به این سمت می‌برد که تمامی گوشه‌ها دارای یک برچسب هستند. این مطالب را به صورت زیر بیان می‌کنیم.

[۳] Barycentric Coordinate

ابتدا لازم است نشان دهیم که این برچسب‌گذاری یک برچسب‌گذاری اسپرنر است. اگر به گوشه‌ها نگاه کنیم، مطالب زیر را می‌یابیم:

- اگر $(1,0,0) \to (a',b',c')$، با توجه به اینکه اگر $a' \geq 1$ در این صورت $a' = 1$، پس $(1,0,0)$ نقطه‌ی ثابت است، نتیجه می‌شود که $a' < 1$. پس برچسب این گوشه برابر ۱ است.
- اگر $(0,1,0) \to (a',b',c')$ در این صورت $a' \geq 0$ اما $b < 1$ زیرا در غیر این صورت این گوشه نقطه‌ی ثابت است پس برچسب این گوشه ۲ است.
- به طور مشابه برچسب $(0,0,1)$ برابر ۳ است.
- اگر به نقاط به شکل $(a,b,0)$ نگاه کنیم که روی خط واصل بین $(1,0,0)$ و $(0,1,0)$ هستند نگاه کنیم، می‌بینیم که اگر $(a,b,0) \to (a',b',c')$ در این صورت $a' < a$ یا $b' < b$، بنابراین برچسب همواره ۱ یا ۲ است. زیرا در غیر این صورت $a' \geq a$، $b' \geq b$ و $c' \geq 0$ بنابراین $a = a', b = b', c = c'$ و این نقطه، نقطه‌ی ثابت است.
- به طور مشابه می‌توان دید که برچسب نقاط روی خط واصل بین $(0,1,0),(0,0,1)$ برابر ۲ یا ۳ است و برچسب نقاط خط بین $(1,0,0),(0,0,1)$ برابر ۳ یا ۱ است.

بنابراین اگر به این طریق یک مثلث‌بندی را برچسب‌گذاری کنیم یک برچسب‌گذاری اسپرنر خواهیم‌داشت.
حال دنباله‌ای از مثلث‌بندی‌ها را در نظر می‌گیریم که قطرشان به صفر میل می‌کند(قطر یک مثلث‌بندی بیشترین فاصله‌ی بین رئوس مجاور در مثلث‌بندی است). هر کدام از این مثلث‌بندی‌ها حداقل یک ۳-۲-۱ مثلث کودک دارد. فرض کنید این مثلث دارای رئوس زیر است:

$$(x_{n,1}, y_{n,1}, z_{n,1}), (x_{n,2}, y_{n,2}, z_{n,2}), (x_{n,3}, y_{n,3}, z_{n,3})$$

که به ترتیب دارای برچسب ۱ و ۲ و ۳ هستند. اندیس n نشان می‌دهد که مثلث مربوط به مثلث‌بندی مرحله‌ی nام در دنباله‌ای است که قطرش به صفر میل می‌کند.
حال بنا به قضیه‌ی وایرشتراس[۴] (هر دنباله‌ی کراندار در $\mathbb{R}^n$ دارای زیردنباله‌ای همگراست)، زیردنباله‌ای همگرا یافت می‌شود که

$$(x_{n_k,i}, y_{n_k,i}, z_{n_k,i}) \to (x,y,z)$$

برای $1 \leq i \leq 3$. می‌توانیم سه زیردنباله را یکی درنظر بگیریم زیرا قطر مثلث به صفر میل می‌کند.(همچنین می‌توانیم از قضیه‌ی وایرشتراس سه بار استفاده کنیم و به یک زیردنباله برسیم که برای هر $1 \leq i \leq 3$ همگرا به (x,y,z) است). حال فرض کنید:

$$(x_{n_k,i}, y_{n_k,i}, z_{n_k,i}) \to (x'_{n_k,i}, y'_{n_k,i}, z'_{n_k,i})$$

$$(x,y,z) \to (x',y',z')$$

بنابراین داریم(با توجه به برچسب‌گذاری اسپرنر):

$$x'_{n_k,1} \leq x_{n_k,1}$$

چون این راس دارای برچسب ۱ است، و بنابر پیوستگی داریم:

$$x' \leq x$$

به طور مشابه $y' \leq y$ و $z' \leq z$. پس (x,y,z) نقطه‌ی ثابت است. □

با استفاده از لم ترکیبیاتی اسپرنر، یکی از قضایای توپولوژیک را ثابت کردیم که تکنیک بسیار جالبی است. بخش بسیار زیادی از توپولوژی جبری به کمک این تکنیک، یعنی مثلث‌بندی فضاها بیان می‌شود.
قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت براور کاربردهای فراوانی در نظریه‌ی بازی‌ها برای اثبات وجود تعادل در بازی‌ها، در نظریه معادلات دیفرانسیل و بسیاری دیگر از بخش‌های ریاضیات دارد.

---

[۴] Bolzano-Weierstrass

توابع پیوسته چه مقدار مشتق‌پذیرند؟

آرمان خالدیان

در اوایل قرن نوزدهم اکثر ریاضی‌دانان فکر می‌کردند که هر تابع پیوسته حقیقی در زیرمجموعه‌ی قابل توجهی از $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است؛ شاید به این خاطر که اکثر توابع شناخته‌شده تا آن زمان در مجموعه‌های قابل توجهی از دامنه‌ی خود مشتق‌پذیر بودند و وجود تابعی که روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد اما در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نباشد دور از ذهن می‌آمد. از دهه‌ی چهارم قرن نوزدهم میلادی به بعد، ریاضی دانانی چون بولتزانو، ریمان و به خصوص وایرشتراس توابعی معرفی کردند که پیوسته اما هیچ‌جا مشتق‌پذیر بودند، یعنی در هیچ جایی از دامنه مشتق‌پذیر نبودند. این مثال نقض عجیبی بر اداعای فوق بود و شوک بزرگی بر جامعه‌ی ریاضی وقت وارد کرد.

تابعی که وایرشتراس معرفی کرد به این صورت بود:

$$\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \circ < a < 1, ab > 1 + 3\frac{\pi}{2}$$

$$\omega(x) = \sum_{k=\circ}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$$

نمودار تابع به مانند فراکتال‌ها رفتار می‌کند.

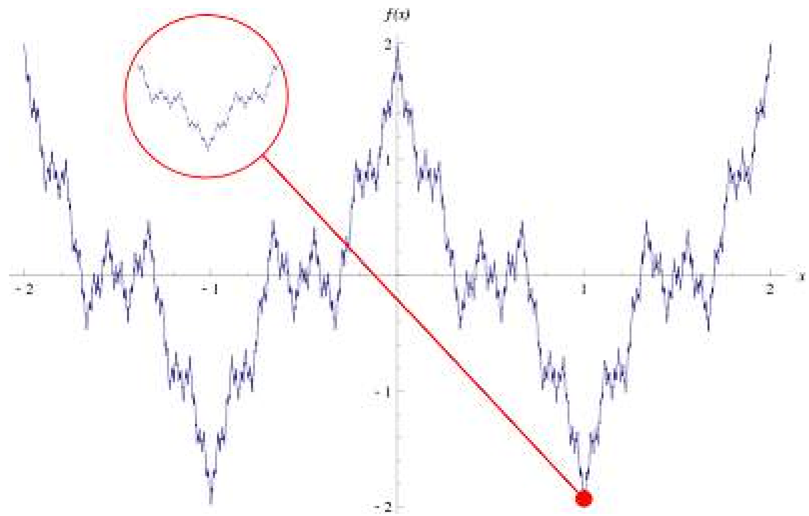
پس از این نمونه، توابع دیگری در طول زمان توسط ریاضی‌دان‌های مختلف معرفی شدند. پس از این دگرگونی این سوال مطرح شد که مجموعه‌ی این گونه توابع به چه اندازه بزرگ است که منجر به پاسخی حیرت‌انگیز شد؛ تقریبا تمام توابع پیوسته‌ی حقیقی هیچ‌جا مشتق‌پذیرند!!

مجموعه‌ی تمام توابع حقیقی پیوسته روی بازه‌ی $[a, b]$ با متر سوپریمم را با $C[a, b]$ نمایش می‌دهیم و مجموعه‌ی توابع حقیقی پیوسته اما هیچ‌جا مشتق‌پذیر در $[a, b]$ را با $ND[a, b]$ نشان می‌دهیم. می‌دانیم که مجموعه‌ی توابع قطعه‌قطعه خطی در $C[a, b]$ چگالند یعنی هر تابع پیوسته را می‌توان با این توابع تقریب زد. مانند ساخت تابع وایرشتراس(استفاده از دسته‌ی خاصی از توابع قطعه‌قطعه خطی) می‌توان نشان داد که $ND[a, b]$ در $C[a, b]$ چگال است، یعنی بستار $ND[a, b]$ مجموعه‌ی تمام توابع در $C[a, b]$ است! در واقع $ND[a, b]$ حتی بزرگتر از این است. برای این منظور مقدمات زیر را داریم.

اگر X یک فضای متریک باشد و M زیرمجموعه‌ای از آن، M را هیچ‌جا چگال گویند اگر بستار آن یعنی $\bar{M}$ هیچ مجموعه‌ی باز ناتهی را شامل نشود. مجموعه‌ی M را از دسته‌ی بئر اول گویند اگر $M = \cup_{k=1}^{\infty} M_k$ که همه‌ی M_kها در X هیچ‌جا چگال‌اند. اگر M از دسته‌ی بئر اول نباشد گویند از دسته‌ی بئر دوم است. به عنوان مثال همه‌ی فضاهای متریک کامل مانند $\mathbb{R}$ با متر معمولی از دسته‌ی بئر دومند. مجموعه‌ی اعداد گویا در $\mathbb{R}$ از دسته‌ی بئر اول و اعداد گنگ از دسته‌ی بئر دوم است. توجه کنید که $\mathbb{Q} = \cup_{i=1}^{\infty}\{q_i\}$ که هر $\{q_i\}$ تک عضوی است و هیچ‌جا چگال است، لذا $\mathbb{Q}$ از دسته‌ی بئر اول است.

می‌دانیم که $C[a, b]$ با متر سوپریمم یک فضای متریک(توپولوژیک) کامل است. باناخ و مازورکویچ در سال ۱۹۳۱ نشان دادند که $ND[a, b]$ از دسته‌ی بئر دوم است. می‌توان نشان داد که اعضای $C[a, b]$ که مشتق یک‌طرفه (چپ یا راست) متناهی دارند(از جمله توابع مشتق‌پذیر) از دسته‌ی بئر نوع اول است به نوعی یعنی $ND[a, b]$ در $C[a, b]$ خیلی بزرگ است مانند اعداد گنگ در اعداد حقیقی!

علاوه بر این ویژگی‌ها توپولوژیک، $ND[a, b]$ را در $C[a, b]$ می‌توان از دیدگاه نظریه‌ی اندازه بررسی کرد که منجر به یک دید احتمالاتی می‌شود. به عنوان مثال $\mathbb{R}$ را با اندازه‌ی لبگ روی آن درنظر بگیرید. اندازه لبگ μ، به هر بازه، طول آن را نسبت می‌دهد



شکل ۱: تابع وایرشتراس

و روی مجموعه‌های از هم جدا جمعی است. مثلا $\mu[a,b]=b-a$ و اندازه‌ی هر تک نقطه‌ای صفر است. حال توجه کنید که اندازه برای هر زیرمجموعه‌ی $\mathbb{R}$ قابل بیان نیست.

یک زیرمجموعه در $\mathbb{R}$ برل است اگر از اجتماع یا اشتراک شمارا و مکمل‌گیری از مجموعه‌های باز در $\mathbb{R}$ بدست آمده باشد. به مجموعه‌های برل می‌توان اندازه نسبت داد. آنگاه اندازه‌ی مجموعه‌ی $\mathbb{Q}$ برابر است با

$$\mu(\mathbb{Q})=\mu(\{\cup_{i=1}^{\infty}q_i\})=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(\{q_i\})=\sum 0=0$$

یعنی $\mathbb{Q}$ طول ندارد و طول آن صفر است. این یک دید احتمالاتی درباره‌ی $\mathbb{Q}$ بوجود می‌آورد.

اگر $\mathbb{R}$ را به $[0,1]$ محدود کنیم و روی $[0,1]$ اندازه‌ی لبگ را بنشانیم آنگاه این اندازه تبدیل به یک اندازه‌ی احتمال می‌شود. احتمال رخداد $\mathbb{Q}$ به عنوان یک پیشامد در $[0,1]$ برابر صفر است. یعنی اگر عددی تصادفی در بازه‌ی $[0,1]$ انتخاب کنیم احتمال گویا بودن آن صفر است و احتمال گنگ بودن آن یک! توجه کنید که $\mathbb{Q}$ از دسته‌ی بئر نوع اول و $\mathbb{Q}^c$ از دسته‌ی بئر نوع دوم است. به نوعی می‌توان تعبیر کرد که در فضاهای توپولوژیک احتمال رخداد مجموعه‌های بئر نوع اول تقریبا صفر ولی دسته‌ی بئر دوم بسیار شایعند.

شبیه به استدلال بالا را می‌توان به $ND[a,b]$ در $C[a,b]$ توسعه داد، یعنی $ND[a,b]$ در $C[a,b]$ بسیار شایع است.

با استفاده از متر سوپریمم می‌توان بازها را در $C[a,b]$ معین کرد و با استفاده از آن $\mathfrak{B}$، یعنی برل‌ها را ساخت ولی چون $C[a,b]$ بی‌نهایت بعدی است نمی‌توان به آن اندازه‌ی لبگ نسبت داد، اما اندازه‌های دیگری چون اندازه‌ی وینر را می‌توان به آن نسبت داد. اندازه‌ی وینر در بررسی حرکت براونی استفاده می‌شود. حرکت براونی یک فرآیند تصادفی است که مسیرهای آن تقریبا همه‌جا مشتق‌ناپذیرند.

با استفاده از μ_w، اندازه‌ی وینر، می‌توان $(C[a,b],\mathfrak{B},\mu_w)$ را به عنوان یک فضای اندازه یا احتمال در نظر گرفت، آنگاه در این فضا $ND[a,b]$ یک مجموعه‌ی شایع است و مجموعه‌ی توابع پیوسته‌ای که حتی در یک نقطه‌ی دامنه مشتق‌پذیرند، اندازه صفر است؛ یعنی اگر از مجموعه‌ی توابع پیوسته حقیقی به تصادف یک تابع انتخاب شود به احتمال صفر مشتق‌پذیر است؛ و $ND[a,b]$ یک مجموعه‌ی شایع است.

اما یک مشکل وجود دارد و آن این است که $ND[a,b]$ در $C[a,b]$ برل نیست. اما می‌توان نشان داد که زیرمجموعه‌ای از آن برل است و در $C[a,b]$ شایع است. شایع در واقع مفهوم نظریه اندازه‌ی دسته‌ی بئر نوع دوم در فضاهای توپولوژیک است اما امتیاز بیشتری چون نتایج احتمالاتی آن را دارد.

مراجع

[1] B. R. Hunt, *The Prevalence of Continous Nowhere Differentiable Functions* , Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1994), 711-717.

[2] B. R. Gelbaum and J. M. H. Olmstead, *Conterexamples in Analysis* , Holden Day Publisher, 1964.

ما ریاضی را به عنوان حرفه انتخاب نمی‌کنیم!

عماد نصرالله‌پور

این نوشته یک بازترجمه از نسخه‌ی انگلیسی مصاحبه‌ای است که میخاییل گلفاند با یوری منین در ۳۰ سپتامبر ۲۰۰۸ انجام داده است که در روزنامه‌ی روسی " Troitsky Variant " چاپ شده‌است (ببینید.)
یوری منین در دانشگاه Northwestern استاد است و جزو هیات علمی باز نشسته موسسه‌ی ماکس پلانک در بن آلمان است. او همچنین محقق برجسته در انستیتو ریاضی استکلو روسیه است. نسخه انگلیسی مقاله در Notices of AMS جلد ۵۶، شماره ۱۰ صفحه‌ی ۱۲۶۸ تا ۱۲۷۴ چاپ شده‌است.

ما ریاضی را به عنوان حرفه انتخاب نمی‌کنیم ، ریاضی ما را انتخاب می‌کند!

گلفاند (Gelfand) : آیا شیوه‌ی تحقیق ریاضی طی ۵۰ سال گذشته تغییر کرده‌است؟
منین (Manin) : من فکر می‌کنم اشخاصی که در حال حاضر مشغول تحقیق در زمینه‌ی ریاضیات هستند همانطور کار می کنند که ۲۰۰ سال پیش کار می‌شد! شاید دلیل آن عدم انتخاب ریاضی به عنوان حرفه از طرف ما باشد ، بلکه این ریاضی است که ما را انتخاب می‌کند.
و ریاضی همیشه افراد خاصی را انتخاب می کند که از آن نوع بیش از چند هزار نفر در هر نسل وجود ندارد.
روش جامعه ی ریاضی تغییر کرده‌است؛ یعنی موسساتی که در آن ها ریاضی مطالعه می‌شود تغییر کرده‌اند. این تغییر غیر طبیعی نیست. در زمان نیوتون و بعد از آن لاگرانژ آکادمی‌ها و دانشگاه‌ها بوجود آمدند
در این دوره ریاضی‌دانان آماتور که کیمیاگری و ستاره‌شناسی هم دنبال می‌کردند با تبادل نامه‌ها جامعه‌ی ریاضی را تشکیل دادند. بعد از آن مجلات بوجود آمدند حدودا ۳۰۰ سال پیش. در نیمه‌ی دوم قرن ۲۰ ام کامپیوترها اضافه شدند و باعث تحول ریاضی شدند.
گلفاند: یعنی از زمان نیوتون و لاگرانژ تا نیمه‌ی دوم قرن بیستم چیز مهمی عوض نشد ؟
منین: نه. سیستم از دانشگاه‌ها بعلاوه‌ی اکادمی‌ها و مجلات تشکیل شده ، و این سیستم کم کم طی این سال‌ها پیشرفت کرده.
به طور مثال مجله‌ی سرل(Crelle) را در نظر بگیرید که از سال ۱۸۲۶ چاپ می شده ، وا قعا هیچ تغییری در این مجله مشاهده نمی‌شود. مقاله ی آبل در مورد حل‌ناپذیری معادلات درجه ی پنج به بالا توسط رادیکال‌ها در آنجا چاپ شده‌بود. به عنوان یکی از اعضای هیات تحریریه مجله در حال حاضر هم این مقاله را با اشتیاق قبول می‌کنم.
طی چند دهه‌ی گذشته ارتباط جامعه با ریاضی‌دان های حرفه‌ای تغییر کرده. رابطه بوسیله‌ی گرنت‌ها و پرپوزال‌ها و... صورت می‌گیرد. در ریاضی همچین چیزی خیلی غیرعادی است ، اول باید بگویید چه کار با ارزشی می‌کنید و در نهایت حساب کارهایی که کرده‌اید رو پس بدهید.
گلفاند: درست است. گرنت‌ها در ریاضی غیر عادی هستند ، اما چه راه دیگری وجود دارد؟
منین: خوب ما به چه چیزی احتیاج داریم ، حقوق برای افراد و بودجه برای موسسات. خوشبختانه من هم برای حقوق کار کردم هم برای بودجه ، نه تنها در مسکو بلکه ۱۵ سال هم در بن و مشکلی در آن نمی‌بینم. اما نهادهای که ابن بودجه‌ها را تامین می‌کردند بودجه را صرف فرهنگ ، بهداشت عمومی و آموزش می‌کنند. ریاضیات هم بخشی از فرهنگ است نه صنعت و خدمات یا چیزی شبیه آن‌ها.

گلفاند: اما این روش‌ها موجب رکود نمی‌شود؟
منین: تا به حال که نشده.
گلفاند: چیزی که شما می‌گویید فقط برای ریاضیات ممکن است چون ریاضیات علم ارزانی است.
منین: دقیقا، من همیشه گفته‌ام ، ما چرا باید خودمان را در بازار قرار دهیم؟ ما خرجی تحمیل نمی‌کنیم و همچنین از منابع طبیعی مصرف نمی‌کنیم و محیط را آلوده نمی‌کنیم؛ به ما حقوق بدهید و ما را در آرامش بگذارید.
گلفاند: شما به کامپوترها اشاره کردید، بعد از بوجود آمدن آنها چه تغییری در ریاضیات پیش آمد؟
منین: چه تغییری پیش آمد؟ امکان منحصر به فرد انجام آزمایش‌های فیزیکی بزرگ در واقعیت ذهنی. ما می‌توانیم غیرمحتمل‌ترین چیزها را آزمایش کنیم. به طور دقیق‌تر کارهایی که اویلر می‌توانست بدون کامپوتر انجام دهد! گاوس هم می‌توانست این کارها را انجام بدهد .اما الان هر ریاضی دانی با نشستن پشت میزش می‌تواند این کارها رو انجام بدهد. اگر تصور به اندازه کافی قوی برای تمییز قائل شدن بین بعضی جلوه‌های این واقعیت افلاطونی ندارید می‌توانند آزمایش کنید. اگر یک ایده به ذهنتان برسد که فلان چیز با فلان چیز برابر است میت‌وانند بشینید و برای میلیون‌ها مقدار حدسشتون رو چک کنند.
آدم‌هایی پیدا شدند که ذهن ریاضی دارند ولی به کامپیوتر تمایل دارند. در واقع این افراد قبل از کامپیوتر هم وجود داشتند. به نظر من اویلر هم از کامپیوتر بشدت استقبال می‌کرد. حتی رامانوجان که در واقع ریاضی نمی‌دانست. حتی همکار من اینجا زگیر بخوبی از کامپیوتر در کارش استفاده می کند. کامپیوتر به او کمک می کند این واقعیت افلاطونی را بهتر درک کند، و البته من فکر می‌کنم واقعا موثر است.
من خودم همچین آدمی نیستم ولی می‌فهمم چه کمکی می‌تواند بکند و خوشحالام که همکارانم در این زمینه کمکم می‌کنند. این کاری است که کامپیوترهای برای ریاضی محض انجام داده‌اند.
گلفاند: نظرشما راجع به ارتباط ریاضی و فیزیک نظری چیست ، به نظر شما چگونه ساختاری دارد؟
منین: این ارتباط در طول عمر خود من تغییر کرده‌است. مهم است که اشاره کنم در زمان نیوتون، اویلر، لاگرنژ و گاوس این ارتباط به حدی نزدیک بود که افراد در هر دو شاخه فعالیت می‌کردند. بعضی‌ها خودشان را بیشتر ریاضی‌دان و برخی بیشتر فیزیک‌دان می‌دانستند ولی در واقعا کاملا مشابه بودند. این موضوع تا پایان قرن نوزدهم ادامه داشت ولی در قرن بیشتم کاملا قضیه فرق کرد. یک مثال خوب تحول نظریه ی نسبیت عام است. انشتین وقتی در سال ۱۹۰۷ با زبان شهودی خودش شروع به فهمیدن نسبیت عام کرد، نه تنها ریاضیات مورد نیاز نظریه‌اش را بلد نبود، بلکه نمی‌دانست همچین ریاضیاتی وجود دارد. بعد از چند سال که به مطالعه‌ی کوانتم پرداخت دوباره به گرانش برگشت و در سال ۱۹۱۲ نامه ای به دوستش مایکل گراسمن نوشت "تو باید به من کمک کنی یا من من دیوانه می‌شوم" . اولین مقاله‌ی آنها "مروری بر نظریه‌ی نسبیت عام و گرانش، قسمت فیزیکی آلبرت انشتین ، قسمت ریاضی مارکل گراسمن، بود تلاش آن‌ها نیمه موفق بود. آن‌ها زبان درست را پیدا کردند ولی معادله‌ی درست را پیدا نکردند. در سال ۱۹۱۵ معادله‌ی درست توسط انشتین و هیلبرت پیدا شد. هیلبرت معادلات درست را با انتخاب چگالی لاگرانژی درست پیدا کرد. اهمیت این مساله مدتی توسط انشتین فراموش شده‌بود. این یک همکاری بی نظیر توسط دو متفکر بزرگ بود که بدبختانه تاریخدان‌ها را به سمت نزاعی احمقانه بر سر اولین فرد کشاند. سازندگان نظریه کاملا به بینش یکدیگر اعتقاد داشتند و به این همکاری افتخار می‌کردند. برای من این نقطه‌ای بود که ریاضی و فیزیک فاصله گرفتند و این فاصله تا سال ۱۹۵۰ ادامه پیدا کرد. فیزیک‌دان‌ها مکانیک کوانتمی را پایه‌گزاری کردند که در آن به مفاهیم ریاضی مثل فضای هیلبرت، معادله‌ی شرودینگر، کوانتش کنش، عدم قطعیت و تابع دلتا رسیدند. این کاملا نوع جدیدی از فیزیک و همچنین فلسفه بود. همه‌ی ریاضیاتی که نیاز داشتند خودشان متحول کردند. در همین حین ریاضی‌دان‌ها یه آنالیزو هندسه پرداختند و پایه‌های آنالیز تابعی و توپولوژی را بنا نهادند. اتفاق مهمی که در نیمه اول قرن افتاد فشار فلاسفه و منطق‌دانها برای روشن کردن و محض کردن ایده‌های کانتور، تسرملو، وایتهد و بقیه در مورد مجموعه‌ها و بینهایت بود. این طرز فکر منجر به چیزی شد که امروزه به آن بحران زیر بناها و علوم کاپیوتر گفته می‌شود. این پارادوکس که زبان متناهی در مورد بینهایت‌ها اطلاعات می‌دهد. زبان‌های فرمال، مدل‌ها و راستی، سازگاری و کامل بودن ، مسائل خیلی مهمی مورد بررسی قرار گرفتند ولی تقریبا به کارهایی که فیزیک‌دان‌ها آن زمان می‌کردند بی‌ربط بود. بعد تورینگ آمد و به ما گفت که استنتاج ریاضی یک ماشین است نه یک نوشته. یک ماشین! عالی بود. ۱۰ سال بعد ماشین‌های فون نیومان را داشتیم و اصل جدایی نرم‌افزار و سخت‌افزار. ۲۰ سال دیگر هم گذشت و همه چیز آماده بود. در یک سوم اولیه قرن بجز چند ذهن بخصوص (فون نیومان بدون شک هم یک ریاضی دان و هم یک فیزیک دان بود و من هیچ کس دیگری با ذهنی در ابعاد او در قرن بیستم نمی شناسم) ریاضی‌دان‌ها و فیزیک‌دان‌ها به طور موازی کار خودشان را پیش می‌بردند و بعد از مدتی دیگر به یکدیگر توجه نمی‌کردند. در ۱۹۴۰ فاینمن در مورد انتگرال مسیر نوشت و روش جدیدی برای کوانتش ارائه داد. او کارش را اول

به صورت ریاضی شروع کرد. از نظر ریاضی کار او مثل برج ایفلی می‌مانست که در هوا معلق است ، ساختاری قوی بدون پایه‌های ریاضی. انتگرال مسیر وجود داشت و جواب درست می‌داد ولی بر پایه‌ی هیچ چیزی نبود. این وضعیت در حال حاضر بهتر نشده.

بعد از آن در دهه ی ۱۹۵۰ نظریه‌ی میدان‌های کوانتمی نیروهای هسته‌ای بوجود آمد و در این نظریه میدان‌های کلاسیک با هموستارها در ریاضی یکی شدند و معادله‌ی کنش به معادله‌ای شناخته‌شده در هندسه دیفرانسیل تبدیل شد. معادلات یانگ میلز پدیدار شدند تا ریاضیدان‌ها و فیزیکدان‌ها توجه شان به یکدیگر جلب شد. به طور عجیبی (برای من خوشایند) ما بیشتر از فیزیکدان‌ها یاد گرفتیم تا آن‌ها از ما. مشخص شد که آنها به کمک نظریه میدان‌های کوانتمی و انتگرال فاینمن یک ابزار شناختی تولید کرده‌اند که یکی پس ازدیگری حقیقت‌های ریاضی را کشف می‌کند. آن‌ها اثبات نبودند بلکه کشف بودند! بعد از آن ریاضیدان‌ها پشت میزهاشون نشستند ، سرشان را خواراندند و این کشفیات را به شکل قضایا تغییر شکل دادتد و شروع به اثبات آن‌ها به روش صادق خودمان کردند. این نشان می‌دهد کاری که فیزیکدان‌ها انجام دادند از نظر ریاضی معنی دارد. و فیزیکدان‌ها گفتند ما می‌دانستیم که کار ما درست است به هر صورت از توجه شما متشکریم. ما از فیزیک‌دان‌ها یاد گرفتیم که چه سوالاتی بپرسیم و انتظار چه جواب‌هایی داشته باشیم قانونی که همیشه کار می‌کند. فریمن دایسون در سخرانی گبیس خودش با نام فرصت از دست رفته(۱۹۷۲) توصیف کرده که چگونه ریاضیدان‌ها و فیزیک‌دان‌ها فرصت اکتشافات جدید به دلیل عدم توجه به یکدیگر از دست‌دادند. قسمت جالب اینجا بود که او اعتراف می‌کرد که متوجه ارتباط عمیق‌تر بین فرم‌های ماژولار وجبرهای لی نشد چون دایسون نظریه اعداد کار با دایسون فیزیک‌دان حرف نمی‌زد! بعداز آن ویتن پدیدار شد

با استعداد منحصر به فردش در تولید ریاضی از این برج ایفل معلق در هوا. او استاد توانایی ذهنی است که ریاضیاتی خیلی قوی اما با شهود فیزیکی تولید می‌کند. نقطه‌ی آغازین کار او جهان فیزیکی که به توصیف اتفاقات تجربی می‌پردازد نیست، بلکه یک سازوکار ذهنی است که برای توصیف دنیای فاینمن، شوینگر، توموگاما. سازوکاری که کاملا ریاضی است ولی پایه های ضعیفی دارد. به نظر من یک ساختار عظیمی ساخته‌شده که فاقد پایه‌ی ریاضی قوی است.

گلفاند: پس همه با این ایده بزرگ شدند که پایه‌ای وجود ندارد، و با آن زندگی کردند یا سعی می‌کنند پایه ای برای آن بسازند؟

منین: هیچ یک از تلاش‌هایی که انجام شده به موفقیت عمومی نرسیده‌اند. ریاضیدان‌ها تقریب‌هایی از انتگرال فاینمن بدست آوردند به طور مثال انتگرال وینر که حدودا سال‌های اولیه دهه ۲۰ ساخته‌شد. این تئوری برای مطا لعه‌ی حرکت براونی استفاده می‌شده. چند تئوری دیگر هم وجود دارند ولی همه‌ی آنها بحدی محدودند که برای همه‌ی کاربردهای انتگرال فاینمن کافی نیستند. به عنوان یک تئوری ریاضی از نظر قدرت کوچک است و قابل مقایسه با ساختار ریاضی که در حال حاظر ریاضیات عالی تولید می‌کند نیست.

من نمی‌دانم وقتی که ویتن دست از کار بکشد این ساختار چطور به کارش ادامه می‌دهد ولی امید دارم که بزودی به جهان ریاضی هم بیاید. یک تشکیلات کوچک تولید شده که مشغول ثابت کردن تئوری‌هایی است که ویتن حدس می‌زند، به طور مثال نظریه میدان های کوانتمی توپولوژیک که شناخته‌شده و موفق بوده. در واقع توپولوژی هموتوپیک و نظریه میدان‌های کوانتمی توپولوژیک به حدی رشد کردند که من فکر می‌کنم دارند به زبان پایه‌های جدید تبدیل می‌شوند. در واقع این اتفاق افتاده‌است. تئوری کانتور در مورد بینهایت‌ها در ریاضیات قبل از او ریشه‌ای نداشته. شما می‌توانید هر جور می‌خواهید قضاوت کنید ولی این ریاضیات جدیدی بود یک راه جدید برای فکر کردن به ریاضی و یک راه جدید برای به وجود آوردن ریاضیات جدید. در نهایت با وجود بحث‌ها و تناقضاتی که وجود داشت به نظر بورباکی این ریاضیات مورد قبول بود. آنها مبانیی پراگماتیک درست کردند که دهه‌ها بوسیله همه‌ی ریاضیدانان استفاده شد ، در مقابل مبانی نرمال که توسط منطق‌دان‌ها و ریاضی‌دانان ساختی به ما عرضه شد.

گلفاند: ریاضی‌دانان روس در مورد بورباکی نظر متفاوتی دارند. منتقدان زیادی از این روش نظریه‌ی مجموعه ای مجرد وجود دارد و بعضا اعتقاد دارند که این موضوع باعث فاصله گرفتن از فیزیک شده و فرصت‌های زیادی از دست رفته.

منین: واقعا این موضوع مهم نیست. اینکه آنها بورباکی را نفرین می‌کنند نشان می‌دهد که متوجه نیستند در حال حاضر چگونه کارها انجام می‌شوند. کاری که بورباکی کرد یک قدم تاریخی بود مانند کاری که کانتور انجام داد. اما این قدم با وجود اینکه نقش خیلی مهمی داشت بسیار ساده بود. نه بنا کردن یک مبنای فلسفی برای ریاضی بلکه ساختن یک زبان عمومی برای ریاضی بود که می‌شد از آن برای بحث کردن در احتمال، توپولوژی، نظریه گراف، آنالیز تابعی یا حتی هندسه جبری و خود منطق هم استفاده کرد. شما با چند لغت ساده شروع می کنید مجموعه ، عضو، زیرمجموعه... بعد تعاریف ساختارهای اولیه ساخته می‌شوند. گروه، فضای توپولوژیک، زبان فرمال ..." این اسم‌ها لایه ی دوم اصطلاحات خودمان هستند. ممکن است لایه های بالاتری هم وجود داشته‌باشند ولی روشهای ساخت آنها مشابه است وبوسیله کنار هم قرار دادن اینها مردم با یکدیگر صحبت میکنند و مفاهیم را واضح انتقال می دهند. یک زبان فرمال مجموعه ای از حروف بعلاوه ی تعدادی لغات مشخص و روابط و قوانین استنتاج است. از این نظر نظریه ناکامل بودن گودل کاملا طبیعی می شود و خیلی عحیب به نظر نمی رسد. وقتی تعجب آور است که به طور فلسفی

بیان شود، ولی در حقیقت این قضیه می گوید یک ساختار خاص مولد متناهی ندارد، آه خدای من! در نتیجه بورباکی کاری کاملا متفاوت از چیزی این ها فکر می کنند انجام داده.

گلفاند: در نهایت به نظر شما در ۲۰ سال آینده چه انفاقاتی خواهد افتاد؟

منین: من تحول انقلابی پیش بینی نمی کنم چون به نظر من در ۳۰۰ سال گذشته هم چنین اتفاقی نیافتاده. هر دفعه یک شهود جدید و قدرتمند روی کار می آید و ریاضی‌دان‌ها به روش های عجیبی سعی می کنند آن را بشناسند. اتفاقا یک سخرانی با این مضمون که برگزار نشد آماده کرده‌بودم. من تحول ایده‌ی اعداد صحیح را از زمان قدیم تا تئوری پیچیدگی کلومگروف بررسی کردم و از ریاضیات جدید استفاده نکردم. همیشه یک ایده ثابت وجود داشته. در حوزه های مختلف تفاوت هایی وجود دارند ولی فقط در طرز بیان است. ولی ایده همیشه ثابت و بدون تغییر بوده و ادامه داشته. هیچ چیز فراموش نشده. از این رو تغییر خیلی بزرگی را پیشبینی نمی کنم. احتمالا تغییراتی در آنچه مبانی پراگماتیک ریاضی نامیدم حاصل خواهد شد. منظور به طور خلاصه یک کدگزاری مناسب برای ابزار های بدرد بخور جدید و پر ایده است. مثلا انتگرال های فاینمن، کتگوری های مرتبه بالا و تئوری های جبرهای هموتوپیک و همچنین روش های جدید ارزش گزاری و قبول مطالب که در مقالات و ذهن ریاضیدانان فعال وجود دارد. وقتی این مبانی پراگماتیک بصورت واضحی بیان شوند که احتمالا چند نسخه ی مختلف هم خواهد داشت بحث بر سر نسخه ی بهتر صورت خواهد گرفت ولی با وجود تنوعی که در ایده های بین ریاضی دانان کاری مختلف، وجود دارد همیشه اشتراکاتی وجود دارد. به هر حال بعد از کانتور و بورباکی تفکر نظریه ی مجموعه ای در ذهن ما رسوخ کرده. وقتی من شروع به صحبت کردن در مورد موضوعی می کنم از اصطلاحات و ساختار های بورباکی استفاده می کنم. فضای توپولوژیک، فضای خطی، میدان اعداد حقیقی، توسیع جبری متناهی، گروه بنیادی ... ! من نمیتوانم این کار را طور دیگری انجام دهم. وقتی در مورد چیز جدیدی فکر میکنم می گویم یک مجموعه با خاصیت الف و خاصیت ب است ویکی مثل آن قبلا وجود داشته که الف و ب نامیده می شده ، یک چیز شبیه دیگری هم بوده که الف و الف نامیده می شده من اصول را کمی تغییر می دهم و آن را ج و د می نامم. وقتی ما شروع به حرف زدن می کنیم همیشه این کار را می کنیم با یک مجموعه ی گسسته ی کانتور شروع می کنیم و شرایطی با شیوه ی بورباکی روی آن می‌گذاریم.

اما یک تغییر اساسی روانشناسانه هم رخ داده. این روز ها این تغییرات به صورت تئوری های پیچیده توصیف می‌شوند که بوسیله ی آنها دیده می‌شود که ساختارهای و فرم های قدیمی به طور مثال اعداد طبیعی با ساختار هندسی(نیمکره ی راست) جایگزین شده اند. به جای مجموعه های گسسته که ابری از اعضای گسسته هستند ما به بررسی فضا های گنگی می‌پردازیم که به سختی دفرم می‌شوند ، یکی را به دیگری مپ می‌کنیم و در این میان خود فضا ها مهم نیستند بلکه فضاها در حد دفرم شدن مهمند. اگر ما بخواهیم دوباره به مجمو عه‌های گسسته برگردیم بوسیله‌ی موئلفه های پیوستگی یک فضا بیان میکنیم که بعد و شکلشان مهم نیست. قبلا این فضا ها به شکل مجموعه های کانتور با توپولوژی دیده می شدند که مپ های بین آن‌ها مپ های کانتور بود و بعضی از آنها در حد هموتو پی بررسی می‌شدند و ... .

من تقریبا مطمئنم که یک برعکس شدگی در آگاهی جمعی ریاضی‌دانان در حال اتفاق افتادن است ، تصویر نیمکره ی چپی وهموتوپیک جهان در حال تبدیل شدن به ایده‌ی اولیه است. مجموعه‌های گسسته از موئلفه های همبندی یک فضا ساخته می شوند که در حد هموتوپی تعریف شده‌است.

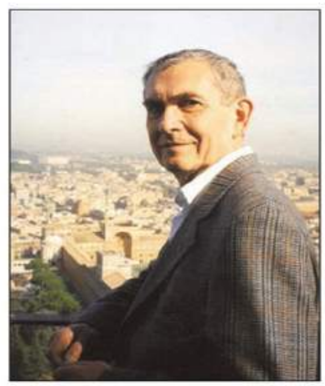
در واقع نقطه ها ی کانتور موئلفه های همبندی ، مجموعه های جاذب یا همچین چیز هایی شده اند. نگاه ما آنقدر بینهایت شده است که برای ساختن مجموعه های متناهی باید دو مجموعه نا متناهی را تقسیم کنیم.

این یک راه موازی برای بررسی انتگرال های فاینمن هم هست. اول به شکل یک نوشته هیریگلیف بود که نیاز به تعبیر داشت. قدم های اول و دوم و سوم و چهارم تعبیر همه مشخص بودند که با انالوژی های مختلفی ظاهر شد که همه ریاضیات واضحی داشتند (مدل‌های اسباب بازی).

در یک مرحله ممکن است شما یک سری فرمال داشته باشید که نه تنها حد ندارد بلکه جمله های آنهم واگرا هستند(البته انتگرال های متناهی بعدند) بعد شما به صورت مصنوعی هر جمله را رگولار می‌کنید و متناهی می شود . ولی سری باز هم واگرا می‌شود. برای همین آنها تعبیری از خود سری ها درست کردند. و در نهایت از میان این همه بی‌نهایت یک جواب متناهی پیدا می‌شود. و دراین میان یک سری تئوری ریاضی خیلی جذاب تولید می‌شود. من یک آنالوژی ما بین این روش‌های عجیب و مبانی پراگماتیک که در قالب کتگوری تئوری و جبر همولوژیک است می‌بینم.

Photo courtesy of Xenia Semenova.

Yuri Manin, Cinque Terre, Italy, 1994.



Manin, in front of the panorama of Rome from the gallery of San Pietro, 1998.

درباره‌ی خودارجاعی[1] (I)

امیر حسین اکبرطباطبایی

۱ مقدمه

"اولین جمله‌ی این مقاله نادرست است."

می‌پذیرم که مقدمه را با جمله‌ای غیرعادی شروع کرده‌ام؛ اما اگر منصف باشید این گزاره آن قدرها هم غیرعادی نیست. دست کم یک جمله‌ی درست‌ساخت زبان فارسی است، به این معنی که از نظر دستور زبان، حقیقتا یک جمله است و در ساختار نحوی آن خطایی صورت نگرفته. بنابراین من حداقل می‌توانم ادعا کنم اگر چه جمله‌ای به ظاهر بی‌ربط گفته‌ام اما دست کم کلامی معنادار ادا کرده‌ام. به این دلیل ساده که انتظار داریم هر گزاره‌ی درست ساخت فارسی لاجرم معنایی هم داشته باشد.

حال یک بار دیگر به جمله‌ی اول مقدمه که آن را A می‌نامیم نگاه کنید و سعی کنید معنای این گزاره را بیابید...

درست است؛ این جمله اساسا بی‌معناست. اما چرا؟ برای اینکه نشان دهیم A نمی‌تواند معنایی داشته باشد از برهان خلف کمک می‌گیریم. بنابراین فرض کنید A معنادار باشد؛ در این صورت یا صادق است یا کاذب. برای شروع فرض می‌کنیم A صادق باشد و این یعنی وقتی شروع می‌کنید به خواندن این مقاله، اولین گزاره‌ای که با آن مواجه می‌شوید، گزاره‌ای نادرست است. اما این گزاره چیزی نیست جز خود A؛ پس A باید کاذب باشد و این دقیقا خلاف فرض اولمان مبنی بر صادق بودن A است، تناقض. درنتیجه اگر قرار باشد A را معنادار فرض کنیم تنها راه این است که A کاذب باشد. ولی کذب A به معنای نادرست بودن "اولین جمله‌ی این مقاله نادرست است." خواهد بود که یعنی صدق A، و باز هم تناقض. پدیده‌ی عجیبی است این گزاره‌ی A. وقتی درستی آن را فرض می‌کنیم، کذبش نتیجه می‌شود، و از فرض نادرستی‌اش، صدق آن. کجای کار اشتباه کرده‌ایم؟ جواب این است: هیچ کجا!

گزاره‌ی A حقیقتا یک گزاره‌ی متناقض است؛ جمله‌ای به ظاهر معنادار در زبان فارسی، اما در واقع عمیقا بی‌معنا. چه چیز در گزاره‌ی A غیرعادی است یا بهتر است بپرسیم چه ویژگی‌ای از A مشکل‌ساز از آب درآمده‌است؟

پاسخ، که هسته‌ی اصلی این مقاله را تشکیل می‌دهد چیزی نیست جز خودارجاعی. درحقیقت آن چه که درباره‌ی این جمله غیرطبیعی است این است که A برخلاف جملات معمولی زبان فارسی، درباره‌ی خودش نیز حرف می‌زند یا به بیان دقیق‌تر، بررسی ارزش درستی‌اش را «به خودش ارجاع می‌دهد». از این منظر رفتار غیرمنتظره‌ی A خیلی هم عجیب نخواهدبود؛ زیرا تلاش برای یافتن معنای A دقیقا مشابه این است که از کسی که متهم به ارتکاب جرمی است بخواهند خودش درباره‌ی خودش قضاوت کند. با این تفاسیر، به نظر می‌رسد که بتوانیم جمله‌ی A را به سبب مشابهتش به مثالی که در بالا آوردیم، مهمل بدانیم و به تبع آن هر گزاره‌ی خودارجاعی در زبان را. و این اصل کلی را بپذیریم که: «برخی از جملات در زبان فارسی، برخلاف ظاهرشان، بی‌معنایند». به عنوان مثال، جملات "این جمله صادق است"، "هر ادعایی تا اندازه‌ای درست است و تا اندازه‌ای نادرست" و یا حتی برخی از جملات امری مانند "این فرمان را اطاعت نکن" و یا "این جمله را نخوان" در زمره‌ی جملات بی‌معنا خواهندبود.

اما مساله به این سادگی‌ها نیست. مشکل کار اینجاست که برخلاف انتظار، جملات بسیاری وجود دارند که خودارجاعند و بسیاری از آن‌ها مانند A، دردسرساز نیستند. مثلا جمله‌ی "این جمله صادق است" تنها صدق خودش را ادعا می‌کند (با مثال متهم

[1] Self-Reference

مقایسه کنید) و این مطلب به هیچ وجه پارادکسیکال نیست. با این حال شما می‌توانید ادعا کنید که درست است که جملات خودارجاعی هم هستند که مساله ساز نیستند اما از آنجا که بسیار غیرمعمولند، حذفشان از گستره‌ی جملات معنادار زبان نه تنها هیچ صدمه‌ای به زبان مورد استفاده‌ی ما نخواهدزد، بلکه ما را هم از شر جملات دردسرساز رها می‌کند و هم از شر جملات نامعمول. متاسفانه این ادعا آن‌قدرها که در نگاه اول به نظر می‌رسد معقول نیست. زیرا بسیاری از حقایق عمیق دانش بشری ساختاری خودارجاع دارند. به عنوان مثال همه‌ی آن چه تا به حال درباره‌ی "دانش بشری" گفته‌شده‌است جملاتی خودارجاعند. زیرا خود این جملات هم بخشی از همان دانش بشری مورد بحث است. همین طور درباره‌ی گزاره‌های مربوط به زبان‌شناسی و یا مثلا فلسفه‌ی ذهن. بنابراین موضع ابتدایی ما، یعنی حذف این جملات به اتهام بی‌معنایی، نه تنها به صرفه نیست، بلکه عاقلانه هم نخواهدبود.(توجه کنید که همین اصل اولیه‌ی ما یعنی "برخی از جملات زبان فارسی برخلاف ظاهرشان بی‌معنایند" نیز جمله‌ای خودارجاع خواهدبود و باید حذف شود. یعنی اصل اول ما، به محض به اجرا درآمدنش، اول از همه خودش را پاک می‌کند!!!)

راه حل چیست؟ حذف این گزاره‌ها بخش اعظمی از دانش بشری ما را از بین می‌برد و حفظشان مفهوم معنارا! به این سوال در بخش‌های بعد بازخواهیم‌گشت، اما قبل از آن اندکی درباره‌ی این مقاله.

شاید به این فکر کرده‌باشید که این مفاهیم معناداری و خودارجاعی بیشتر تحلیلی زبان‌شناختی است تا مساله‌ای ریاضی. درجواب، باید بگویم که خطر این خودارجاعی‌ها برای ریاضیات، چه به لحاظ تاریخی و چه به لحاظ فلسفی، اگر از خطرشان برای زبان‌شناسی طبیعی بیشتر نبوده‌باشد کمتر نیز نبوده‌است. مثلا تمام تلاش‌های اوایل قرن بیستم در حوزه‌ی مبانی ریاضیات و یا تدوین منطق جدید را می‌توان پاسخی برای همین خودارجاعی‌های به ظاهر بی‌اهمیت دانست. به همین دلیل است که در حوزه‌ی ریاضیات مثال‌های بسیاری از خودارجاعی‌ها وجود دارند که اکثرا با پیشوند "پارادکس" به گوش شما خورده‌اند. مثال‌هایی نظیر پارادکس راسل[۲]، پارادکس ریچارد[۳] و پارادکس بورالی-فورتی[۴] تنها نمونه‌های اندکی از این جنگل انبوه است؛ جنگلی متشکل از پارادوکس‌هایی مختلف که هر کدام از ادبیات خاص خودشان بهره می‌برند؛ یکی مانند آنچه در ابتدای مقدمه ذکر آن رفت، در حوزه‌ی صدق و معنا، و دیگری مانند پارادکس راست در حوزه‌ی نظریه‌ی مجموعه‌ها. اما نکته‌ی جالب اینجاست که این جنگل انبوه از پارادوکس‌ها برخلاف تعدد ظاهریشان گویی همه از یک روح مشترک برخوردارند؛ روحی که برای ریاضیات همان قدر که دردسرآفرین بوده، سازنده نیز بوده است. این روح مشترک چیزی نیست جز گزاره‌های خودارجاع و یا دقیق‌تر، روش ایجاد این خودارجاعی‌ها. روشی که به دلایل تاریخی "قطری‌سازی کانتور[۵]" و یا به اختصار "قطری‌سازی" نامیده‌می‌شود. آن چه در این مقاله در پی آنیم شرح و بسط همین روح مشترک است.

حال ممکن است پیش خودتان این‌طور فکر کنید که درست است که یافتن راه‌حلی برای پارادکس‌ها حیاتی است اما یافتن روح مشترک همه‌ی آن‌ها، یا متحد کردن آن‌ها چه ارزشی خواهدداشت؟ سوال بجایی است و برای پاسخ به همین سوال است که این چند خط را اضافه خواهیم‌کرد.

یک پارادکس چه وقت حاصل می‌شود؟ درست است، وقتی که فرض‌های ابتدایی ما متناقض باشند و با به تعبیر بهتر وقتی که در انتخاب پیش‌فرض‌هایمان بیش از اندازه سهل انگار بوده‌باشیم. بنابراین به طور غیرمستقیم ظهور یک پارادکس یعنی تلاش برای کاهش پیش‌فرض‌هایمان تا سرحد امکان. حال اگر این پارادکس در حوزه‌ای کاملا شهودی رخ دهد، مثلا همین پارادکس ابتدای مقدمه، معنایش این می‌شود که پیش‌فرض‌های شهودی و به ظاهر معقول ما، آن چنان هم معقول نیستند و باید مورد مطالعه‌ی بیشتری قرار گرفته و شاید حتی برخی از آن‌ها کاملا حذف شوند. اما این پیش‌فرض‌ها هم ساده‌اند و هم معقولند. بنابراین ما با دو گزینه مواجه‌خواهیم‌بود: یا زندگی در میان پارادکس‌ها و یا از دست دادن مبانی ساده و شهودی‌مان. به این معنا یک پارادکس در حوزه‌ی شهودهای اولیه‌ی ما -مانند پارادکس‌هایی که در ادامه‌ی این مقاله خواهیم‌دید- انتخابی است میان دو گزینه‌ی عمیقا نارضایت‌بخش.

با این وجود، همین تلاش برای حل پارادکس‌ها و عملا "محدود کردن" پیش‌فرض‌هایمان، نتایجی عمیق حاصل خواهدکرد. مثلا قضایای ناتمامیت گودل[۶]، نمونه‌ی شاهکاری است از خوانشی متفاوت از همین پارادکس دروغگو[۷] (پارادکس ابتدای مقدمه) به عنوان یک عامل محدودکننده! بنابراین یافتن یک روش کلی برای حل پارادکس‌ها، یعنی یافتن یک روش کلی برای تعیین محدودیت‌های ذاتی دانش ما. این مطلب تلاش ما را در ادامه‌ی این مقاله، برای یافتن روح اصلی پارادکس‌ها (که آن را قضیه‌ی

[۲] Russell's Paradox
[۳] Richard's Paradox
[۴] Burali-Forti paradox
[۵] Cantor's diagonalization
[۶] Godel's incompleteness theorems
[۷] Liar Paradox

نقطه ثابت نامیده‌ایم) توجیه می‌کند.

و اما کلام آخر، آن چه در ادامه خواهیددید، شامل دو بخش اصلی است. بخش اول، که ما آن را صوری‌سازی نامیده‌ایم به معرفی ساختارهایی موسوم به ساختارهای توصیفی اختصاص دارد که به کلی‌ترین معنای ممکن به ما اجازه می‌دهند کار را با توصیفی از یک جهان شروع کرده و به کمک ترجمه‌ای از مجموعه‌ی توصیفات به درون جهان، مفاهیم متکی به خودارجاعی‌ها را باز تولید کرده و به صورت قضیه‌ای موسوم به قضیه‌ی نقطه ثابت ارائه کنیم.

اگر چه معرفی این ساختارها و اثبات قضیه نقطه ثابت فوق‌العاده ساده و ابتدایی است، با این وجود قضایای اساسی بسیاری را می‌توان از آن نتیجه گرفت و این وظیفه‌ی بخش دوم مقاله است؛ یعنی بررسی نتایجی که می‌توان از اعمال این قضیه به ساختارهای شناخته شده‌ی منطق و نظریه مجموعه‌ها بدست آورد. در ادامه فهرستی از این نتایج را می‌آوریم که در این مقاله و در شماره‌های بعد، بحث و بررسی خواهند شد:

۱) پارادکس دروغگو و تعریف‌ناپذیری صدق در زبان‌های طبیعی

۲) پارادکس راسل و لزوم محدود کردن تناظر مفهومی-مصداقی در نظریه‌ی مجموعه‌ها

۳) پارادکس ریچارد و تعریف‌ناپذیری مفهوم تعریف‌پذیری در یک زبان واحد

۴) پارادکس کونیگ و تعریف‌ناپذیری خوش ترتیبی‌های ممکن روی اعداد حقیقی

۵) قضیه‌ی مجموعه توانی کانتور[۸]

۶) قضایای ناتمامیت گودل برای نظریه‌های به اندازه‌ی کافی قوی

۷) قضیه لب[۹] برای حساب مرتبه اول

۸) قضیه تعریف‌ناپذیری صدق تارسکی[۱۰]

۹) قضیه بازگشت[۱۱] در نظریه توابع بازگشتی

۱۰ قضیه رایس[۱۲] و تصمیم‌ناپذیری مساله توقف یک الگوریتم[۱۳]

۲ صوری‌سازی

در این بخش تلاش می‌کنیم روح اصلی پارادکس‌ها، یعنی خودارجاعی را به نحوی صوری و دقیق مدل کنیم. اما برای مدل کردن مفهوم خودارجاعی به چه چیزهایی نیاز خواهیم‌داشت؟

در وهله‌ی اول دست کم به دو دسته از اشیا نیاز داریم. دسته‌ی اول اشیایی که به آن‌ها ارجاع می‌شود و به تعبیری اشیای مورد مطالعه ما هستند، (این مجموعه را با M نشان می‌دهیم) مانند اشیای یک جهان واقعی و دسته‌ی دوم اشیایی که به اعضای دسته اول ارجاع می‌کنند (واین مجموعه را با $\mathcal{L}$ نشان می‌دهیم) مثلا جملات یک زبان که اشیای یک جهان را توصیف می‌کنند نمونه‌ای از دسته‌ی دوم هستند. خودارجاعی‌ها از تداخل این دو دسته از اشیا بدست می‌آیند. اما همین‌ها برای ایجاد یک خودارجاعی کافی نیست. در وهله‌ی دوم به یک عمل ارجاع هم نیاز داریم؛ عملی که اشیای درون $\mathcal{L}$ به کمک آن به اشیای مورد مطالعه یعنی M ارجاع می‌دهند. مثلا در مثال بالا، عمل ارجاع چیزی نیست جز تعیین صدق یک فرمول زبان (اعضای $\mathcal{L}$) برای یک شی در جهان خارج (M).

و در نهایت برای ایجاد تداخل بین M و $\mathcal{L}$ و تولید خودارجاعی‌ها، لاجرم باید بتوانیم اشیای $\mathcal{L}$ را با بخشی از اشیای M متناظر کنیم تا یک عضو $\mathcal{L}$ که تنها می‌تواند به اعضای M ارجاع کند به خودش، یا به بیان دقیق‌تر به متناظر خودش نیز بتواند ارجاع کند.

حال اجازه دهید این مفاهیم شهودی را در قالب یک تعریف بگنجانیم:

---

[۸] Cantor's power set theorem
[۹] Lob's theorem
[۱۰] Tarski's theorem of underfinability of truth
[۱۱] Recursion theorem
[۱۲] Rice theorem
[۱۳] Undecidibility of halting problem

تعریف ۱. *چهارتایی مرتب $S = (M, L, ., \lceil\ \rceil)$ را یک ساختار توصیفی یا به اختصار یک ساختار می‌نامیم هرگاه:*

(*i*) *L و M دو مجموعه‌ی ناتهی باشند.*

(*ii*) *عمل . یک تابع از $L \times M$ به L باشد.*

(*iii*) *$\lceil\ \rceil$ یک تابع یک به یک از L به M باشد.*

عمل . و تابع $\lceil\ \rceil$ را به ترتیب عمل ارجاع و تابع مترجم ساختار S می‌نامیم.

مثال ۲. *فرض کنید X یک مجموعه‌ی دلخواه و $Y \subset P(X)$ مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد به طوری که $\emptyset, X \in Y$ و به علاوه $|X| \leq |Y|$. حال عمل . را به صورت مقابل تعریف کنید:*

$$\begin{cases} . : Y \times X \to Y \\ A.a = \begin{cases} X & a \in A \\ \emptyset & a \notin A \end{cases} \end{cases}$$

و تابع یک به یک f را طوری در نظربگیرید که $f : Y \to X$ (چنین تابعی وجود دارد زیرا $|X| \leq |Y|$)، در این صورت چهارتایی $S = (X, Y, ., f)$ یک ساختار توصیفی با عمل ارجاع . و تابع مترجم f خواهد بود.

مثال فوق به نظر مثالی غیرطبیعی است. احتمالا به این دلیل که هم فرض‌های عجیب و غریبی دارد و هم عمل ارجاع ناآشنایی. در ادامه سعی می‌کنیم شهودی برای این مثال دست و پا کنیم.

فرض کنید X را به مجموعه‌ای متشکل از اشیای جهان اطرافمان تعبیر کنیم. در این صورت منظور ما از اعضای Y (که هرکدام زیرمجموعه‌ای از X هستند)، خانواده‌هایی از این اشیا خواهد بود که دارای دست کم یک صفت مشترکند. مثلا اعضای X می‌توانند همه‌ی اشیای درون یک اتاق باشند و اعضای Y، خانواده‌هایی از این اشیا که صفتی مشترک دارند؛ به عنوان مثال مجموعه‌ی همه‌ی اشیای چوبی، یکی از اعضای Y خواهد بود. در این صورت این شرط که $\emptyset, X \in Y$ به این تعبیر می‌شود که در جهان ما دست کم دو صفت وجود دارد که اولی هیچ مصداقی ندارد (مثلا این صفت که یک شی با خودش برابر نیست) و دومی صفت همه‌ی اشیای جهان است (مثلا این صفت که یک شی با خودش برابر است) و شرط $|X| \leq |Y|$. چیزی نیست جز این قید که تعداد صفات مورد بررسی ما حداکثر می‌تواند به اندازه تعداد اشیای مورد بحثمان باشد؛ زیرا در غیر این صورت انگار در جهان ما صفاتی وجود دارند که در آن جهان، غیرقابل فهمند (یک جهان دو عضوی را در نظر بگیرید. موجودات این جهان چطور می‌توانند درباره‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های جهانشان، که چهارتا بیشتر نیست درکی پیدا کنند، در حالی که نمی‌توانند اعداد بزرگتر از دو را بفهمند).

و اما بررسی مفهوم عمل ارجاع. طبیعتا منظور از ارجاع یک صفت به یک شی این است که آیا شی موردنظر، مصداقی از آن صفت هست یا خیر! بنابراین اگر مجموعه‌ی X را نماینده‌ی عدد یک و مجموعه‌ی $\emptyset$ را نماینده عدد صفر در نظر بگیرید، عمل ارجاع S دقیقا همان عمل طبیعی ارجاع یک صفت به یک شی خواهد بود (لازم به ذکر است که تصور X و $\emptyset$ به عنوان نمادهایی صرفا قراردادی برای صفر و یک نادرست است و آن‌ها معانی دیگری را نیز حمل می‌کنند، اما ما در اینجا به این مطلب نخواهیم‌پرداخت).

برای ارائه مثال بعد و بیان اکثر قضایای این مقاله، نیاز خواهیم داشت مفهوم زبان را اندکی روشن کنیم. می‌گوییم اندکی، چون همه‌ی منطق جدید، تلاش برای همین منظور بوده است و بررسی موشکافانه‌ی یک زبان، حتی برای زبان‌های صوری ریاضی، نه در حوصله‌ی این مقاله است و نه حتی مورد نیاز آن. بنابراین طبیعتا به تعریفی شهودی از یک زبان قناعت می‌کنیم و وارد جزئیات بی‌شمار این مطلب نخواهیم‌شد.

منظور از یک زبان چیست؟ در ساده‌ترین صورت «یک زبان مجموعه‌ای از گزاره‌هاست، که به تبعیت از قوانینی خاص موسوم به دستور زبان ساخته می‌شوند و معنایی خاص را حمل می‌کنند». به نظر تعریف خوبی است اما در واقع اندکی فریبکارانه است؛ زیرا مساله تعریف یک زبان را به مساله بررسی مفهوم معنا تحویل می‌کند که ابدا مساله ساده‌ای نیست (پارادکس اول مقدمه را به خاطر آورید). با این حال اینکه معنا چیست و صدق یک گزاره به چه معناست، مانعی برای استفاده‌ی ما از زبان نخواهد بود زیرا ساختار تحلیل‌هایی که درباره‌ی زبان در این مقاله به کار گرفته خواهند شد به گونه‌ای است که ذاتا از این مساله‌ی دشوار می‌گریزد. در ادامه به این مطلب بازخواهیم گشت اما قبل از آن لازم است اندکی درباره‌ی بخش ابتدایی تعریفمان از زبان سخن بگوییم یعنی دستور زبان یا نحو!

آنچه از نحو یک زبان مورد نیاز ماست، تحلیل مختصری است درباره‌ی متغیرهای آن زبان. حال فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان دلخواه باشد. در این صورت گزاره‌های زبان $\mathcal{L}$ در حالت کلی می‌توانند شامل انواع مختلفی از متغیرها باشند؛ متغیرهایی برای اشیای جهان، متغیرهایی برای توابع و روابط و یا حتی متغیرهایی برای خود گزاره‌ها. تعیین اینکه کدام نوع متغیر را برای یک زبان برگزینیم بسته به این است که دامنه‌ی سخن ما چیست. اگر موضوع بحث، اشیای موجود در جهان باشد، انتخاب متغیرهای فردی، منطقی خواهد بود و در صورتی که بخواهیم درباره‌ی صفات و یا روابط بین اشیا سخن بگوییم، انتخاب متغیرهای رابطه‌ای. با این حال یک زبان با متغیرهای فردی هم می‌تواند جملات بسیار ی درباره‌ی روابط بین اشیا بگوید و این یک مرزبندی دقیق نیست.

نمادگذاری: فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان باشد. در این صورت بنابر قرارداد، متغیرهای فردی این زبان را با حروف کوچک $x, y, z, \ldots$ و یا با $x_0, x_1, \ldots$ و متغیرهای دیگر زبان، اعم از تابعی، رابطه‌ای، گزاره‌ای و ... را با حروف بزرگ $X_0, X_1, X_2, \ldots$ و یا با $X, Y, Z, \ldots$ نمایش می‌دهیم.

برای روشن شدن تمایز این متغیرها و طرز کاربردشان در جمله‌های زبان، ارائه‌ی چندمثال خالی از لطف نیست!

مثال ۳. *فرض کنید $\mathcal{L}$ همان زبان فارسی معمولی ما باشد که به یک متغیر فردی (x) و یک متغیر گزاره‌ای (X) مجهز شده‌است. در این صورت مثلا گزاره "x سفید است" $= A(x)$ یک فرمول درست ساخت زبان ما خواهدبود؛ زیرا x یم متغیر فردی است و همان طور که انتظار می‌رود، به اشیای جهان اطراف ما اشاره می‌کند.*

مثلا اگر "برف" $= c$ نمادی برای واژه‌ی برف باشد، گزاره‌ی "برف سفید است" $= A(c)$ یک جمله‌ی درست ساخت زبان فارسی خواهد بود. حال گزاره‌ی "X نادرست است" $= B(X)$ را درنظر بگیرید. B یک فرمول درست ساخت زبان $\mathcal{L}$ است زیرا در آن X به یک گزاره در زبان، ارجاع می‌کند؛ به این دلیل که از نظر ما صدق، تنها برای یک گزاره است که می‌تواند معنا داشته‌باشد. بنابراین اگر جمله‌ی $A(c)$ را به جای X در B جایگذاری کنیم، گزاره‌ی

$$B(A(c)) = \text{"}A(c)\text{ نادرست است"} = \text{«"برف سفید است" نادرست است»}$$

بدست خواهد آمد که جمله‌ای درست ساخت است اما درست نیست.

اکنون آماده‌ایم تا به مسیر اصلی‌مان، یعنی تحلیل مساله‌ی معنا، بازگردیم.

فرض کنید $\mathcal{L}$ مجموعه‌ای از گزاره‌های یک زبان باشد. برای اینکه مفهوم معنا و یا معادلا صدق گزاره‌های $\mathcal{L}$ را روشن کنیم، باید قواعدی وضع کنیم تا صدق گزاره‌ها را معین کند. فرض کنید چنین قواعدی موجود باشند و به علاوه فرض کنید T مجموعه‌ای باشد متشکل از همه‌ی گزاره‌های صادق (البته طبیعتا گزاره‌های صادق نسبت به آن خانواده از قواعد). مثلا در زبان فارسی اگر A یک گزاره باشد، "اگر A آنگاه A" یک گزاره‌ی صادق خواهد بود و بنابراین عضوی از T است. البته به این شرط که قواعد فوق‌الذکر را برای تعیین صدق، همان قواعد طبیعی و آشنای بررسی صدق در زبان فارسی طبیعی درنظر بگیریم.

مساله‌ی معنا تعیین همین مجموعه‌ی T و یا تعیین قواعدی برای تعیّن صدق گزاره‌هاست و این دقیقا همین قسمت دشوار مساله‌ی معناست که ذکر آن رفت. با این وجود ما با فرض اینکه T مجموعه‌ای مفروض است، این قسمت دشوار را دور می‌زنیم و توجهمان را به نتایجی معطوف می‌کنیم که از انتخاب‌های مختلف مجموعه‌ی T به دست می‌آیند.

این نوع آزاد گذاشتن مفهوم صدق، بعدها دست ما را برای اعمال نتایجمان به ساختارهای مختلفی که گاهی حتی به صدق هم مربوط نیستند، بازمی‌گزارد. مثلا هر نظریه‌ی T در یک زبان صوری $\mathcal{L}$ را می‌توان یک مبنای صدق درنظر گرفت؛ یعنی گزاره‌های درون T همان صادق‌های زبان $\mathcal{L}$ خواهند بود.

تعریف ۴. *منظور از یک منطق L، دوتایی مرتب $L = (\mathcal{L}, T)$ است که در آن $\mathcal{L}$ مجموعه‌ی همه گزاره‌های این منطق است و T زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{L}$ که همه‌ی گزاره‌های صادق $\mathcal{L}$ را معین می‌کند. $\mathcal{L}$ را زبان L و T را معناشناسی[۱۴] آن می‌نامیم.*

تبصره: برای اینکه نحوه استدلال‌های ما به حرکت واقعی فکر نزدیک‌تر باشد، هرجا که بیم اشتباه نرود، از عبارت "زبان L" به جای "منطق L" استفاده خواهیم‌کرد. مثلا به جای "منطق L در یک زبان طبیعی"، تنها خواهیم‌گفت "زبان طبیعی L".

اکنون آماده‌ایم تا یکی از مهم‌ترین انواع ساختارهای توصیفی را معرفی کنیم. برای اینکه خودمان را دچار پیچیدگی‌های فنی حالت کلی مساله نکرده‌باشیم این نوع از ساختارها را در قالب یک مثال آشنا ارائه خواهیم‌کرد.

مثال ۵. *منطق $L = (\mathcal{L}, T)$ را در نظر بگیرید که در آن $\mathcal{L}$ مجموعه‌ی همه‌ی گزاره‌های زبان فارسی است که به یک متغیر گزاره‌ای X نیز مجهز شده‌اند و T همان معناشناسی طبیعی زبان ماست؛ یعنی متشکل است از همه‌ی گزاره‌هایی که ما به طور طبیعی صادق*

[۱۴] Semantics

می‌پنداریم. از آنجایی که از نگاه معناشناسانه تنها صدق و کذب یک گزاره حائز اهمیت است، بنابراین طبیعتا دو گزاره‌ی معادل برای ما ارزش یکسانی دارند و حتی برابر تلقی می‌شوند. بنابراین طبیعی است که به جای کارکردن با خودگزاره‌ها، کلاس‌های هم ارزی آن‌ها را نسبت به رابطه‌ی$\equiv$ در نظر بگیریم (توجه کنید فرمول‌های $A(X)$ و $B(X)$ معادلند هرگاه $(\forall X\ (A(X) \iff B(X))$ عضوی از T باشد).

حال فضای این کلاس‌های هم‌ارزی را برابر $L = (\mathcal{L}/\equiv)$ تعریف کرده و عمل مقابل را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} . : L \times L \to L \\ [A(X)].[B(X)] = [A(B)] \end{cases}$$

که در آن منظور از $A(B)$ گزاره‌ای است که از جانشین کردن B به جای X در $A(X)$ دست می‌آید. بررسی اینکه عمل . خوش‌تعریف است، کار سختی نیست و به خواننده محول می‌شود.

حال چهارتایی $S = (L, L, ., id_L)$ را که در آن id_L تابع همانی روی مجموعه‌ی L است، در نظر بگیرید. از آنجائیکه id_L تابع یک‌به‌یک است، چهارتایی S یک ساختار توصیفی خواهدبود.

اگر خوب دقت کنید، خواهید دید که این ساختار، صوری شده‌ی عملی است که ما هر روزه در زبان فارسی روزمره‌مان استفاده می‌کنیم و به کمک همین عمل است که می‌توانیم درون همین زبان فارسی درباره گزاره‌هایش اظهار نظر کنیم و مثلا بگوییم «"برف سفید است" نادرست است» (مثال ۲-۲ را ببینید).

از این مثال در بخش آتی استفاده خواهیم کرد تا نشان دهیم آزادی یک زبان برای اظهارنظر درباره خودش چقد می‌تواند دردسرساز باشد.

پس از این مقدمات کوتاه درباره‌ی ساختار یک زبان، اکنون آماده‌ایم قضیه اصلی این مقاله، یعنی قضیه نقطه ثابت را بیان و اثبات کنیم. اما قبل از آن یک قرارداد.

نمادگذاری: اگر $S = (M, L, ., \ulcorner\ \urcorner)$ یک ساختار توصیفی باشد، در این صورت:

(i) برای هر $A \in L$ و هر $m \in M$ هرجا که بیم اشتباه نرود، از نماد Am به جای $A.m$ استفاده خواهیم‌کرد.

(ii) برای هر دو عضو $A, B \in L$ منظور از $A.B$ و یا AB عضو $A.\ulcorner B \urcorner$ است (توجه کنید از آنجا که $\ulcorner B \urcorner \in M$ ضرب $A.B$ خوش‌تعریف خواهد بود). بنابراین عمل . را می‌توان به عنوان عملی روی L نیز در نظر گرفت. اما به دلایل فنی، ما این عمل را مبنای تعریف ساختارهای توصیفی نگرفته‌ایم و ترجیح داده‌ایم آن را به عنوان یکی از نتایج تعریف اولیه‌مان از عمل ارجاع به دست‌آوریم.

(iii) از آنجا که عمل . روی L (بند (ii)) لزوما شرکت‌پذیر نیست، برای هر انتخاب $A_i \in L$ها که $n \geq i \geq ۱$ منظور از $A_۱A_۲ \ldots A_n$ عبارت است از $A_۱.(A_۲.(\ldots(A_{n-۱}.A_n)\ldots)$.

قضیه ۶. (*قضیه نقطه ثابت*) *. فرض کنید $S = (M, L, ., \ulcorner\ \urcorner)$ یک ساختار توصیفی باشد و $A \in L$. اگر $C \in L$ای وجود داشته‌باشد به طوری که برای هر $B \in L$ داشته باشیم $ABB = CB$، در این صورت A نقطه‌ی ثابت دارد. یعنی $D \in L$ای وجود دارد به طوری که $AD = D$.*

اثبات. تعریف کنید $D = CC$. از آنجا که برای هر $B \in L$ داریم $ABB = CB$ بنابراین برای $B = C$ خواهیم‌داشت $ACC = CC$ که یعنی $AD = D$ و این همان است که می‌خواستیم. □

بیش از اندازه ساده است، نه؟ اندکی صبر کنید؛ در بخش‌های آتی توانایی این قضیه را مورد آزمون قرار خواهیم‌داد.

نگرشی فرمال بر قوانین اجتماعی

اوژن غنی‌زاده

تفاوت بین جمعی از انسان‌ها و یک جامعه‌ی انسانی در چیست؟ از نظر تاریخی، به نظر چنین می‌آید که به جمعیت‌های انسانی زمانی می‌توان نام جامعه را نسبت داد که نوعی "قانون مشترک" بین اعضای آن حکم فرما شود. برای بررسی دقیق‌تر این امر، می‌توان از یک مدل کلی برای جمعیت بهره جست. در این مدل، یک انسان را موجودی کلی تعریف می‌کنیم که در هر زمان می‌تواند عملی از میان مجموعه‌ای از عمل‌ها انجام دهد و در هر زمان نیز در وضعیتی در میان مجموعه‌ای از وضعیت‌ها قرار دارد. با توجه به اینکه شرایطی روی مجموعه‌ی عمل‌ها یا وضعیت‌ها قرار نداده‌ایم، چنین تعریفی به نظر کلیت لازم را داراست که بتوان هر انسان را در چهارچوب آن قرارداد.

حال، به مجموعه‌ای از انسان‌ها که مجموعه‌های یکسانی از عمل‌ها و وضعیت‌ها دارند "جمعیت" می‌گوییم. دقت کنید که این تعریف نیز تعریفی بسیار کلی به نظر می‌آید، چه در هر صورت می‌توان مجموعه‌های عمل‌ها و وضعیت‌های تک تک افراد را اجتماع گرفت و حاصل را به عنوان مجموعه‌ی عمل‌ها و مجموعه‌ی وضعیت‌های هر فرد یک جمعیت قرار داد.

جامعه در این میان، دارای تعریف گنگ‌تری خواهد بود، یک "جمعیت" را زمانی "جامعه" تلقی می‌کنیم که اعضای آن بتوانند بدون درگیری در کنار یکدیگر زندگی کنند. چنین تلقی طبعا به مثابه یک "تعریف" نمی‌تواند تلقی شود، اما آن را به عنوان خط مشی خود در تلاش برای ارایه‌ی تعریفی برای جامعه در مدل ذکر شده برمی‌گزینیم، چه صرف نظر از ایده‌آل گرایی، توانایی اعضای یک جمعیت برای زندگی در کنار یکدیگر بدون اخلال در زندگی هم، کم‌ترین قیدی به نظر می‌آید که واقعا تمیزی بین یک جمعیت و یک جامعه است.

برای واضح‌تر شدن تمیز مورد بحث، جمعیتی با بیش از یک عضو را فرض کنید. بعلاوه، فرض کنید دو تن از این اعضا تصمیم به انجام عملی می‌گیرند که انجام هریک توسط یکی انجام عمل دیگر توسط دیگری را غیر ممکن می‌سازد. برای مثال، فرض کنید هر دو نفر یک سیب یکسان را یافته‌اند و هر دو تصمیم به خوردن آن دارند، یا هر دو می‌خواهند همزمان از مسیری کوهستانی که فقط یک نفر می‌تواند در زمان از آن عبور کند عبور کنند. برای حل مشکل در چنین شرایطی، دو حد قابل تصور است : دو نفر به گفت و گو بپردازند و در مورد سیب یا این که چه کسی جلوتر برود تصمیم‌گیری کنند، یا اینکه دو نفر به قاضی ثالثی رجوع کنند (که الزاما از عضو جمعیت نیست) تا وی تصمیم‌گیری کند. دقت کنید که با اتخاذ هر یک از این دو روش، تمامی اعضای جمعیت می‌توانند به مثابه یک جامعه در کنار یکدیگر زندگی کنند، چراکه در صورتی که "برخوردی" بین اعضا صورت نگیرد، به عبارت دیگر اعمال یک یا چند عضو در تداخل با یکدیگر نباشد، "مشکلی" برای "زندگی" اعضای جمعیت در کنار یکدیگر وجود ندارد و هنگامی که "برخوردی" نیز صورت بگیرد، راه حلی برای رفع آن پیش‌بینی شده.

دقت کنید، در حالتی که حد دوم اختیار شده‌باشد، احتمالا تشخیص این‌که یک وضعیت بین دو یا چند عضو خود یک "برخورد" است یا نه نیز به قاضی ثالث سپرده شده (چراکه در این حد به نوعی ارتباط بین اعضا را نادیده گرفته‌ایم، و دور از ذهن بنظر می‌رسد که تمامی انسان‌ها در تشخیص این‌که یک وضعیت "برخورد" است یا نه یکسان عمل کنند)، بنابراین قاضی ثالث به نوعی ناظر و هدایت کننده‌ی تک تک اعمال اعضای جمعیت ما خواهد بود تا هربرخوردی را تشخیص دهد، و آن را قضاوت کند.

اما هر یک از این دو راه حل در عمل بسیار دور از ذهن به نظر می‌آیند. گفت و گو بین انسان‌ها به تجربه در بسیاری از موارد ناکارآمد است، و بعلاوه در بسیار دیگری از موارد نیز قاضی ثالثی در دست نیست تا به قضاوت بنشیند. در حقیقت، راه حلی که جمعیت‌های انسانی در طول تاریخ به آن دست یافتند، راه‌حلی بینابین این دو حد است، و آن وضع مجموعه‌ای از قوانین در کنار مذاکره و یا رجوع به قاضی ثالث است. اگر فرض کنیم که به نوعی، هر دو انسان قابلیت ارتباط را دارا هستند (به علت پیچیدگی

که این ارتباط می‌تواند داشته باشد، از تعریف دقیق آن می‌پرهیزیم) و بعلاوه فرض کنیم که قاضی ثالث، در صورت وجود، هیچ‌گاه روش خود برای قضاوت را تغییر نمی‌دهد (یعنی با تکرار یک وضعیت، قضاوت وی در مورد "برخورد" بودن آن، و ضمنا با تکرار یک "برخورد"، قضاوت وی در مورد آن یکسان خواهد بود)، در این صورت حد اول، حالتی است که هیچ قانونی بر "جامعه" حکم فرما نیست و در نتیجه حجم زیادی از گفت و گو و ارتباط بین اعضا راه‌گشای برخوردهای بین ایشان است، و حد دوم حالتی است که به نوعی قانونی سخت‌گیرانه و جامع بر تک تک رفتارهای اعضا حاکم است و در نتیجه هیچ نیازی به ارتباط و گفت و گو بین اعضا نیست. دقت کنید که در حالت اول آزادی عمل هر عضو بسیار زیاد است (در حقیقت، محدودیتی بر آن وضع نشده) ولی در عوض رفع و رجوع برخورد میان اعضا بسیار ناکارآمد انجام می‌شود، و در حالت دوم، آزادی عمل اعضا بسیار کم است (قاضی ثالث قادر است تک تک رفتارهای اعضا را بررسی و یا منع کند) ولی (درصورتی که فرض کنیم قاضی ثالث سریعا تصمیم‌گیری می‌کند) برخوردها بسیار کارآمد حل می‌شوند (یا حتی بسیاری از آن‌ها توسط قاضی ثالث پیش‌گیری می‌شوند). بنابراین، به نظر چنین می‌آید که بین این دو حد، طیفی از راه‌حل‌ها بوجود می‌آید که بسته به جامعیت و سخت‌گیرانه بودن قوانین وضع شده، آزادی عمل اعضا زیاد یا کم شده و در عوض نیاز و اتکای آن‌ها به ارتباط با یکدیگر کمتر و یا بیشتر می‌شود (مثال واضحی از این وضعیت را می‌توان در سیر سخت‌گیرانه‌تر شدن قوانین ترافیکی تهران مشاهده کرد).

بنابراین، با فرض اینکه ورای تعریف ما از انسان در این مدل، هر دو انسانی به روشی قادر به برقراری ارتباط با یکدیگرند، و بعلاوه با توجه به آن چه گفته شد با فرض اینکه هر تمیز بین "جمعیت" و "جامعه" در حقیقت راه حلی در طیف فوق‌الذکر است، به تعریف دقیق جامعه در مدل خود می‌پردازیم. در حقیقت، آن چه گفتیم به این معناست که با پیش‌فرض گرفتن قابلیت مذاکره، تمیز میان جامعه و جمعیت وجود نوعی از "قانون اجتماعی" بین اعضاست؛ بنابر این، جامعه، در حقیقت مجموعه‌ای از انسان‌ها با عمل‌ها و وضعیت‌های بالقوه‌ی یکسان و مجموعه‌ای از قوانین اجتماعی یکسان است (دقت کنید که با توجه به اینکه با وجود یکسان بودن مجموعه‌های عمل‌ها و وضعیت‌ها، عمل‌ها و وضعیت‌های خاص برای یک فرد یا گروه خاص هم‌چنان متصور است، بنابراین "یکسان" بودن مجموعه‌ی "قوانین اجتماعی" به معنی برابری مطلق همه‌ی افراد در مقابل این قوانین نیست، بلکه به تعبیری معنای دقیق آن چیزی است که در جوامع امروزی به معنای "برابری مقابل قانون" در نظر گرفته می‌شود). بنابراین، برای ارایه‌ی تعریفی دقیق از جامعه، کافیست تعریفی دقیق از "قانون اجتماعی" ارایه دهیم.

دقت کنید که با توجه به اینکه قوانین باید برای همه‌ی اعضا قابل فهم باشند، از نظر شهودی نیاز است که در "زبانی مشترک" قابل بیان باشند. برای حل این موضوع، زبانی مرتبه‌ی اول، مانند L ، که دارای رابطه‌ی $\vDash$ بین گزاره‌های زبان و ضمنا بین مجموعه‌ی وضعیت‌ها و گزاره‌های زبان است را مفروض می‌گیریم. به علاوه، مجموعه‌ای مشترک از اعمال بالقوه، مانند A و مجموعه‌ای مشترک از وضعیت‌های بالقوه مانند S را در نظر می‌گیریم. یک محدودیت قانونی، به زوج مرتبی مانند (a,ϕ) اطلاق می‌شود که $a \in A$ و $\phi \in L$، و ضمنا برای هر $a \in A$ حداکثر یک زوج (a,ϕ) وجود دارد، و این زوج به این معناست که برای $s \in S$ اگر $s \vDash \phi$ ، آن‌گاه در وضعیت s انجام عمل a ممنوع است. درحقیقت، زوج (a,ϕ) به این معناست که ϕ کلی‌ترین وصف کننده‌ی شرایطی است که طی آن انجام a ممنوع است. حال یک "قانون اجتماعی"، مجموعه‌ای از محدودیت‌های اجتماعی است. دقت کنید، برای دو قانون اجتماعی، مفهوم سخت‌گیرانه‌تر بودن نیز قابل تعریف است. رابطه‌ی کوچکتری روی قوانین اجتماعی چنین تعریف می‌شود که می‌گوییم $sl < sl'$ اگر و فقط اگر داشته‌باشیم :

$$\forall(a,\phi) \in sl \exists(a,\phi') \in sl', \phi \vDash \phi'$$

که در حقیقت به این معناست که sl' از sl سخت‌گیرانه‌تر است، چراکه اگر S_a مجموعه‌ی وضعیت‌هایی باشد که در نتیجه‌ی وضع sl انجام عمل a در آن‌ها ممنوع است و $S_{a'}$ مجموعه‌ی وضعیت‌هایی که در نتیجه‌ی وضع sl' انجام a در آن‌ها ممنوع است، داریم:

$$S_a = \{s \in S \mid \exists(a,\phi) \in sl, s \vDash \phi\}$$

$$S_{a'} = \{s \in S \mid \exists(a,\phi') \in sl', s \vDash \phi'\}$$

$$s \in S \rightarrow \exists(a,\phi) \in sl, s \vDash \phi$$

$$(a,\phi) \in sl \rightarrow \exists(a,\phi') \in sl', \phi \rightarrow \phi'$$

$$s \vDash \phi, \phi \vDash \phi' \rightarrow s \vDash \phi'$$

$$\Rightarrow \exists(a,\phi') \in sl', s \vDash \phi'$$

$$\Rightarrow s \in S_{a'} \Rightarrow S_a \subset S_{a'}$$

بنابراین، وضع قانون sl' نسبت به وضع sl انجام یک عمل خاص را در شرایط کمتری مجاز می‌داند.

حال، بنا به آنچه گفته‌شد، اعضای این جامعه موجوداتی‌اند که وضعیت‌های بالقوه و اعمال بالقوه‌ی یکسانی دارند، و به علاوه اگر قانونی نیز بر جامعه وضع شده‌باشد همه به زبان یکسانی به قانون نیز آگاهی دارند. دقت کنید که یک سر طیفی که مشخص کردیم حالتی بود که هیچ قانونی بر جامعه وضع نشده و تمامی برخوردها از طریق گفت و گو حل و فصل می‌شوند، بنابراین حتی اگر قانونی بر جمعیت انسان‌های مورد بحث وضع نشده‌باشد نیز همچنان جمعیت مورد ذکر یک جامعه‌ی انسانی به حساب می‌آید. در حقیقت، این سر طیف، معرف جامعه‌ای به نثر سیاسی روز "آنارشیستی" است، و سر دیگر طیف، وضعیتی است که قوانین در هر وضعیت فقط یک عمل را مجاز می‌دانند، یا به عبارت دیگر قاضی ثالثی تمامی رفتارهای افراد را به ایشان دیکته می‌کند، که می‌توان آن را جامعه‌ای تحت سلطه‌ی دیکتاتوری مطلق (قاضی ثالث) دانست. در حقیقت هرچه قوانین سخت‌گیرانه‌تر باشند، آزادی فردی افراد کمتر می‌شود و جامعه بیشتر به سمت دیکتاتوری پیش می‌رود، اما در عوض هر فرد قدرت پیش‌بینی بیشتری نسبت به رفتارهای سایر افراد دارد و در نتیجه کنترل برخورد بین افراد بسیار راحت‌تر و کارآمدتر می‌شود، هرچند این ممکن است به این قیمت باشد که تحقق یک هدف خاص برای یک فرد نه تنها از طریق بهینه که حتی کلا ناممکن شود. از طرف دیگر با کم کردن قوانین آزادی فردی به مقدار قابل توجهی افزایش می‌یابد (قانونی که تهی باشد، بوضوح سهل‌گیرانه‌ترین قانون است که معرف جامعه‌ی کاملا آنارشیستی است) اما پیش‌گیری و یا حل برخورد نیاز به اتکای افراد بر گفت و گو دارد و به شیوه‌ای بسیار ناکارآمد انجام می‌پذیرد، و هرچند که به نظر تحقق طیف گسترده‌ای از اهداف برای افراد به شیوه‌ی بهینه ممکن به نظر می‌رسد، ممکن است که برخوردهای بین افراد و هزینه‌ی مذاکره خود مانع از تحقق اهداف نه تنها به شیوه‌ی بهینه بلکه (مانند حالت دیکتاتوری مطلق) کاملا ناممکن شود.

این بحث راجع به دو سر طیف ما را به سمت ارایه‌ی تعریف دقیقی راجع به "قانون خوب" سوق می‌دهد. در حقیقت در ادامه‌ی بحث پس از تعریف ریاضی اعضای این جامعه، به تعریف "قانون خوب" و تعریف دقیق محاسباتی مساله‌ی یافتن آن برای یک جامعه می‌پردازیم و سپس به بررسی حل‌پذیری این مساله و میزان پیچیدگی آن می‌پردازیم. برای اینکه بستر تعریف، فضا را برای طرح مساله‌ی مذکور باز بگذارد، قانون را در جامعه تثبیت نمی‌کنیم، هرچند فرض می‌کنیم همه‌ی اعضا از یک قانون پیروی می‌کنند. برای این امر، به جای اینکه به جامعه قانون ثابتی را نسبت دهیم، "مجموعه‌ای از قوانین بالقوه" برای آن متصور می‌شویم.

با توجه به آن‌چه گفته شد، یک عضو یک جامعه‌ی انسانی، به طور دقیق یک پنج‌تای به شکل زیر است:

$$(S, L, A, SL, T)$$

که در آن S مجموعه‌ی وضعیت‌های بالقوه، L زبان مرتبه‌ی اول مشترک، A مجموعه‌ی عمل‌های بالقوه، SL مجموعه‌ی قوانین بالقوه، و T تابعی است که مشخص می‌کند که یک فرد در یک وضعیت خاص، با انجام یک عمل خاص و در شرایطی که قانون خاصی وضع شده باشد، به چه وضعیت‌هایی ممکن است دچار شود، یعنی:

$$T = S \times A \times SL \rightarrow ۲^S$$

برای ادامه‌ی بحث، فرض می‌کنیم که تمامی افراد مطیع قانون باشند، یعنی:

$$\forall s \in S, a \in A, sl \in SL; s \vDash \phi \wedge (a, \phi) \in sl \rightarrow T(s, a, sl) = \emptyset$$

به علاوه، فرض می‌کنیم که تعریف T با تعریف ما از سخت‌گیرانه‌تر بودن قوانین سازگار است، یعنی:

$$\forall s \in S, a \in A, sl, sl' \in SL; sl < sl' \rightarrow T(s, a, sl') \subset T(s, a, sl)$$

با توجه به تعریف قانون و اعضای جامعه، اکنون تعریف جامعه نیز خودبه‌خود مشخص شده است، جامعه مجموعه‌ای از اعضای جامعه است که وضعیت‌ها، عمل‌ها و قانون‌های بالقوه‌ی مشترک دارند.

اکنون باید به فرمال‌سازی شهود خود از "قانون خوب" بپردازیم. چنانچه ذکر شد، بی‌قانونی مطلق یا دیکتاتوری مطلق هردو می‌توانند دسترسی به اهداف خاصی را برای افراد غیرممکن سازند. بنابراین، "قانون خوب" در حقیقت قانونی است که دسترسی به این اهداف را برای هر فرد نه تنها میسر سازد، که دسترسی بهینه به آن‌ها را تضمین کند. وجود چنین قانونی به نظر در بسیاری از حالات ناممکن است، بنابراین با تقلیل این شرط، به تعریف "قانون مفید" می‌پردازیم، که قانونی است که دسترسی به اهداف مورد نظر را برای هر فرد تضمین کند. دقت کنید که یک هدف را بسادگی، می‌توان به یک وضعیت خاص تعبیر کرد، بنابراین قانون مفید قانونی است که رسیدن هر فرد از هر وضعیت به هر وضعیت دلخواه را تضمین نماید. دقت کنید که احتمالا تمامی وضعیت‌های هدف قرار نیست تحت حمایت قانون قرار بگیرند (برای مثال وضعیتی که یک نفر با کشتن همسایه‌ی خود احساس رضایت می‌کند)،

به علاوه احتمالا واقعا قرار نیست هر کس از هر وضعیتی بتواند به وضعیت مطلوب خود برسد (برای مثال احتمالا قرار نیست کسی که قتل‌های زنجیره‌ای مرتکب شده بتواند زمانی رییس‌جمهور شود). بنابراین، زیرمجموعه‌ای از وضعیت‌های بالقوه به نام "حالات کانونی" را مشخص می‌کنیم که قرار است قانون به حمایت از افراد در این حالات بپردازد، به عبارت دیگر قرار است حرکت هر فرد از یک وضعیت کانونی به وضعیت کانونی دیگر را تضمین کند. دقت کنید که این ملاحظه محدودیتی بر چهارچوب کاری ما ایجاد نمی‌کند، چه شرطی بر مجموعه‌ی حالات کانونی وضع نکرده‌ایم. بعلاوه، دقت کنید که در دامنه‌ی حالات کانونی، وضعیت غیرقابل برگشت نیز وجود نخواهد داشت، و قانون مورد وضع تضمینی برای در دسترس بودن اهداف غیرقابل بازگشت نمی‌دهد.

آن‌چه شهودا بیان شد را دقیق‌تر بیان می‌کنیم. در یک جامعه، و با قانون تثبیت شده‌ی sl، یک "برنامه‌ی قانونی" را تابعی تعریف می‌کنیم مانند DO، $DO : S \to A$، به طوریکه برنامه در هیچ وضعیتی تصمیمی غیرقانونی نگیرد، یعنی:

$$\forall(a, \phi) \in sl, s \vDash \phi \to DO(s) \neq a$$

برای هر برنامه‌ی قانونی و هر وضعیت شروع دلخواه، "اجرا"ی این برنامه دنباله‌ای از وضعیت‌ها است که در نتیجه‌ی اجرای این برنامه بوجود می‌آیند، یعنی اگر از وضعیت s_0 شروع کنیم، دنباله‌ایست مانند $s_0, s_1, s_2, \ldots$ به طوریکه $s_{i+1} \in T(s_i, DO(s_i), sl)$. در این صورت، اگر در جامعه‌ی ما مجموعه‌ی حالات کانونی F، که $F \subset S$، مشخص شده باشد، می‌گوییم یک قانون، قانون مفیدی است، اگر و فقط اگر، برای هر $s_1, s_2 \in F$، برنامه‌ای قانونی موجود باشد که هر اجرای آن با شروع از s_1، شامل s_2 باشد. دقت کنید، که این شرط که "هر اجرا"ی برنامه باید شامل s_2 باشد در حقیقت به این معناست که مستقل از اینکه چه اتفاقاتی خارج از چهارچوب یک فرد رخ می‌دهد (برای مثال، اینکه سایر افراد چه اعمالی انجام دهند) فرد به هر حال به مقصود خود نیل می‌کند.

با توجه به آنچه گفتیم، حال مساله‌ی پیدا کردن قانون مفید، USLP[۱]، به طور دقیق قابل تعریف است: فرض کنید جامعه‌ای با اعضای انسانی با پارامترهای (S, L, A, SL, T) و مجموعه‌ی وضعیت‌های کانونی F، $F \subset S$ داده شده است. اگر قانون مفیدی برای این جامعه وجود دارد آن را پیدا کن و در غیر این صورت عدم وجود آن را اعلام کن. مساله‌ی USLP ،در حالت کلی، NP-hard است، چنانچه شوهام[۲] و تنهولتز[۳] در[۱] نشان داده‌اند[۴]، اما تحت شرایط خاصی، می‌توان آن را در زمان چندجمله‌ای حل کرد.

دقت کنید، که در چهارچوب کلی تعریف شده، هیچ ساختاری بر وضعیت‌های محتمل جامعه حاکم نیست، و به طور خاص محدودیتی بر تعداد قوانینی که نتیجه‌ی یک عمل خاص را تحت تاثیر قرارمی‌دهند وضع نشده. در واقعیت، جوامع بسیار ساختاریافته‌تر از فرایض ما هستند. برای مثال، هرچند که مجموعه‌ی وضعیت‌های محتمل به‌طور کلی احتمالا بسیار بزرگ خواهد بود، معمولا می‌توان برای هر عضو جامعه "اجزا"یی متصور شد که وضعیت فرد در نهایت حاصل ضرب دکارتی وضعیت هر یک از این اجزاست. برای مثال، اگر وضعیت یک فرد ساعت دو بعد از ظهر در یک موقعیت خاص و با شرایط احساسی خاص بودن باشد، می‌توان اجزای زمان، مکان و شرایط احساسی را برای او در نظر گرفت و وضعیت او در نهایت حاصل وضعیت تک تک این اجزا خواهد بود.

به این خاصیت، اصطلاحا "پیمانه‌ای"[۵] بودن مجموعه‌ی وضعیت‌های محتمل اطلاق می‌شود. به‌طور دقیق‌تر، فرض کنید که تعداد کل وضعیت‌های محتمل n باشد، اگر بتوان برای اعضای جامعه $O(\log(n))$ جزء فرض کرد به‌طوری که هریک از این اجزا تعداد ثابتی حالت داشته‌باشد، و وضعیت هر عضو را بتوان با ضرب دکارتی حالات این اجزاء مشخص کرد، می‌گوییم مجموعه‌ی وضعیت‌های محتمل "پیمانه‌ای" است.

به علاوه، با وجود این‌که در واقعیت تعداد قوانین حاکم ممکن است بسیار زیاد باشند، معمولا در یک شرایط خاص تعداد کمی از آن‌ها روی حاصل اعمال یک عضو خاص تاثیر می‌گذارند. برای مثال، احتمالا هنگام ایستادن پشت چراغ قرمز، وضعیت یک فرد بسته به اعمال وی تحت تاثیر قوانین مالیاتی یا معاملات ملکی قرار نخواهد گرفت. به طور دقیق‌تر، با این فرض که مجموعه‌ی وضعیت‌های محتمل خود "پیمانه‌ای" است، می‌گوییم مجموعه‌ی عمل‌ها "پیمانه‌ای" است، اگر تغییر یک وضعیت خاص یک جزء خاص (از اجزاء وضعیت‌های افراد) تحت تاثیر تعداد ثابتی قانون قرار بگیرد.

با اعمال این دو شرط، یعنی پیمانه‌ای بودن وضعیت‌ها و عمل‌ها، به جامعه‌ای پیمانه‌ای دست می‌یابیم، که برای آن‌ها حل مساله‌ی USLP در زمان چندجمله‌ای امکان‌پذیر است، چراکه در چنین شرایطی اصولا فضای جستجو برای قانون اجتماعی مفید خود از ابعاد چندجمله‌ای است. به طور دقیق‌تر، در ابعاد $O(\log(n))$ جزء داریم که هر یک به تعداد ثابتی از وضعیت‌های کانونی مرتبط

[۱] Useful Social Law Problem

[۲] Yoav Shoham

[۳] Moshe Tennenholtz

[۴] در حقیقت شوهام و تنهولتز نشان دادند که ۳SAT را می‌توان در زمان چندجمله‌ای به USLP کاهش داد.

[۵] Modular

می‌شوند، و در نتیجه کل تعداد قوانین اجتماعی محتمل چندجمله‌ای است. بعلاوه، برای هر چنین قانونی، بررسی دسترسی‌پذیر بودن هر وضعیت کانونی از تمامی وضعیت‌های کانونی دیگر نیز در زمان چندجمله‌ای امکان‌پذیر است، چراکه تعداد وضعیت‌های کانونی، و بعلاوه بررسی دسترسی‌پذیری هر جفت از وضعیت‌های کانونی در زمان چندجمله‌ای امکان‌پذیر است. بنابراین، جستجوی کل فضا در زمان چندجمله‌ای امکان‌پذیر می‌شود.

بازاریابی و فروش در شبکه‌های اجتماعی

محمدامین فضلی
نسترن نیک‌پرتو

چکیده

پیشرفت دانش و تکنولوژی افزایش حجم ارتباطات میان افراد جامعه را موجب شده‌است. این حجم عظیم از تعاملات باعث ایجاد بسترهای مناسبی برای گسترش فعالیت‌های اجتماعی، تجاری و فرهنگی می‌شود که امروزه مورد علاقه‌ی محققان حوزه‌های مختلف دانش اعم از اقتصاد، علوم اجتماعی، علوم کامپیوتر و ... قرار گرفته‌است. در این مقاله قصد داریم به بیان نتایج علمی موجود در حوزه‌ی فن‌آوری اطلاعات در زمینه‌ی بازاریابی، تبلیغات و تعیین قیمت برای فروش کالا که چالش‌های بزرگ شرکت‌های اقتصادی است، بپردازیم.

۱ مقدمه

فضای سایبر باعث به وجود آمدن شکل‌های جدید ارتباط بین انسان‌ها شده‌است. اطلاعات مربوط به این ارتباطات عموما در پایگاه‌های داده ذخیره می‌شود که می‌توان آن‌ها را مجردسازی کرده و دانش سطح بالا از آن‌ها استخراج کرد که کاربردهای فراوانی دارند.[۷و۸]

منظور ما از شبکه‌های اجتماعی، هر بستر تعامل انسانی است که اطلاعات آن در یک پایگاه داده ذخیره شده‌است و یا قابل ذخیره شدن می‌باشد. مانند اطلاعات تماس‌های مشترکین شبکه‌ی مخابرات، اطلاعات معنایی و رابطه‌ای در پایگاه‌های وب، پیامک‌های ارسال شده در شبکه‌های تلفن همراه و ... . تاکنون پژوهش‌های فراوانی در رابطه با استخراج دانش از این دست اطلاعات انجام شده‌است که اکثر آن‌ها نظری بوده و منتج به محصولات تجاری نشده‌اند. بازه‌ی وسیعی از کاربردهای تحقیقاتی و تجاری وجود دارد که این پژوهش‌ها روی آن‌ها تمرکز کرده‌اند. از تحقیقات اجتماعی گرفته [۹] تا پیدا کردن تروریست‌های ۱۱ سپتامبر[۱۰].

در این مقاله ما به بررسی پژوهش‌های مرتبط با بازاریابی و قیمت‌گذاری می‌پردازیم. این امر بدیهی است که خریداران یک کالای خاص روی همدیگر تاثیر می‌گذارند و این رد مکانیزم قیمت‌گذاری که می‌بایستی اتخاذ کنیم موثر خواهدبود. در مقاله‌ی [۲] کالاهایی که شبکه‌های اجتماعی روی فروش آن‌ها تاثیر دارند معرفی شده‌اند و طبقه‌بندی گردیده‌اند.

ارزش این گونه کالاها برای خریداران به گونه‌ای به تعداد افرادی از جامعه که از آن کالا استفاده می‌کنند بستگی دارد. از این دید کالاها را می‌توان به ۳ دسته تقسیم کرد. (از لحاظ نوع تاثیری که تعداد افراد بر ارزش آن‌ها دارد)

- کالاهایی که ارزش آن‌ها برای مصرف کننده تحت تاثیر مستقیم از تعداد کالاهایی است که به فروش رفته‌اند. برای این گروه بهترین مثال، کالاهای مربوط به تکنولوژی‌های ارتباطی است. کالاهایی مانند تلفن یا فکس برای خریدار، متناسب با تعداد افرادی از جامعه است که از آن کالا استفاده می‌کنند، زیرا بدیهی است که هر چه تعداد این افراد بیشتر باشد، کاربری کالای خریداری شده برای فرد افزایش می‌یابد.

- دسته‌ی دیگری از این کالاها، کالاهایی هستند که ارزش آن‌ها تحت تاثیر غیرمستقیم از تعداد به فروش رفته از کالا قرار می‌گیرد. بازی‌های کامپیوتری، سخت افزار کامپیوتر، سیستم عامل و ... مثال‌هایی از این نمونه کالاها می‌باشد. به عنوان

مثال درباره‌ی سخت‌افزار کامپیوتر، هر چه اندازه‌ی بازار فروش کالا بزرگتر باشد، تعداد نرم‌افزارهایی که برای آن مدل سخت‌افزاری نوشته می‌شود بیشتر می‌گردد.

- دسته‌ی سوم از این مدل کالاها، را کالاهای پایا تشکیل می‌دهند که کیفیت و در دسترس بودن خدمات پس از فروش آن متناسب است با اندازه‌ی به فروش رفته از آن. مثال خودرو برای این مدل کالاها مثال خوبی می‌باشد، برای مثال هرچند تعداد به فروش رسیده از نوعی خودرو زیاد باشد خدمات تعمیر و یا تعویض با کیفیت بالاتر و قیمت بهتر عرضه خواهندشد.

در هر سه این دسته از کالاها ارزش کالا برای خریدار به تعداد افرادی که در همان شبکه‌ی خریدار عضو هستند برمی‌گردد. اندازه‌ی شبکه‌ی فروش یک کالا که به این تاثیرات شبکه‌ای می‌انجامد بر حسب بازار و نوع آن کالا می‌تواند متفاوت باشد، مثلا در بازار خودرو تنها وجود یک تولید کننده ممکن است به ایجاد چنین شبکه‌هایی بیانجامد، در مواردی دیگر ممکن است مجموع تولیدات چند شرکت در بازار به ایجاد چنین تاثیراتی منجر شود. به عنوان مثال دستگاه ضبط صوت این گونه است [۲].

در مدلسازی‌های ارائه شده در پژوهش‌های مرتبط با بازاریابی و فروش در شبکه‌های اجتماعی معمولا برای خریداران یک تابع ارزش $\nu_i : 2^V \rightarrow \mathbb{R}^+$ در نظر گرفته می‌شود که منظور از V مجموعه‌ی خریداران است. اگر $S \subset V$، $\nu_i(S)$ مشخص کننده‌ی میزان ارزشی است که فرد iام برای کالای مورد فروش هنگامی که زیرمجموعه‌ی S از افراد جامعه کالای مورد نظر را خریده‌اند دارد. هنگامی که به یک فرد برای خرید یک کالا قیمت p را به فرد iامی پیشنهاد می‌دهد در صورتی آن فرد برای خرید اقدام می‌کند که $\nu_i(S) \geq p$.

مدل‌های فروشی که توسط پژوهشگران مورد مطالعه قرار گرفته‌اند از دیدگاه ما به سه دسته تقسیم می‌شوند:

۱- مدل قیمت صفر(zero pricing): در این مدل سود ما از پول دریافتی خریداران نیست(فرض می‌کنیم قیمت هر جنس صفر است) بلکه به ازای هر خرید یک سود ضمنی می‌بریم که آن مورد نظر است و هدف بیشینه کردند تعداد خریداران می‌باشد. فرض بر این است که $\nu_i(\emptyset)$ در ابتدا برای بسیاری از خریداران منفی است (خریداران نسبت به کالایی که می‌خواهیم بفروشیم اینرسی دارند) در این مدل عموما پیدا کردن مجموعه‌ی اولیه از خریداران است که با تشویق آن‌ها به خرید، عده‌ی زیادی از جامعه به خرید متمایل شوند. این مدل در قسمت دوم این مقاله بررسی شده‌است. کاربرد این مدل بیشتر در به دست آوردن ایده‌های تبلیغات بهینه است.

۲- مدل قیمت خصوصی (privete pricing): در این مدل به هر خریدار یک قیمت خاص پیشنهاد می‌دهیم که این قیمت به شهودی که ما از تابع ارزش وی داریم بستگی دارد. قسمت مهم مسئله پیدا کردن استراتژی برای فروش است که تا حد امکان از تاثیرگذاری خریداران روی یکدیگر در جهت افزایش قیمت و سود بهره ببریم. ما از این روش به عنوان دوره‌گردی یاد می‌کنیم. این مدل در قسمت سوم این مقاله بررسی شده‌است.

۳- مدل قیمت عمومی (public pricing): این مدل نزدیکترین مدل به واقعیت فروش در جامعه است. در این مدل برای یک کالا یک قیمت به صورت عمومی اعلام می‌شود و همه‌ی خریداران هم‌زمان از آن مطلع می‌شوند. سعی داریم قیمت اعلام شده به اندازه‌ای باشد که حاصلضرب تعداد افرادی که کالا را خریداری می‌کنند در قیمت اعلام شده بیشینه باشد. این مدل در قسمت چهارم این مقاله مورد بررسی قرار گرفته‌است.

۲ مدل قیمت صفر و تبلیغات

در این قسمت به مدلسازی و بررسی چگونگی فراگیر شدن یک رفتار (خرید یک کالا) در یک شبکه اجتماعی می‌پردازیم. اهمیت این بحث همان‌طور که از عنوان این قسمت می‌توان حدس زد بیشتر در حوزه‌ی تبلیغات و بالا بردن فروش یک کالا کاربرد دارد.

استراتژی‌های موثری که در این زمینه مطرح می‌شوند اینگونه‌اند که ابتدا گروهی از مصرف کننده‌های بلقوه به مصرف کالا تشویق می‌شوند (مثلا نمونه‌ای مجانی از کالا در اختیار آن‌ها قرار داده می‌شود)، سپس تاثیر آن‌ها در جامعه منجر به حدی از فروش می‌گردد.

سوالی که دومینگوس و ریچاردسون [۱۱و۱۲] در این حوزه مطرح کردند این است که چه افرادی با چه ویژگی‌هایی برای گروه اولیه انتخاب شوند تا حداکثر فروش حاصل شود.

در [۳] به بررسی مدل‌های عملی (operational model) در سیتم‌های تعاملی می‌پردازد و یک الگوریتم تقریبی (approximation algorithm) برای حداکثر کردن حوزه تاثیر یک رفتار در این مدل‌ها ارائه می‌دهد که اثبات آن بر اساس مفاهیم

توابع سابمادولار (submodular function) [۴] می‌باشد. الگوریتم تقریبی AL با فاکتور α برای مسئله‌ی بیشینه سازی A الگوریتمی چندجمله‌ای است که به جواب دقیق و بهینه (OPT) نمی‌رسد. اما پاسخ آن حداقل αOPT است. در این مقاله نتایج پیاده‌سازی و اجرای الگوریتم بر روی مجموعه‌ای از داده‌ها ارائه شده که نشان دهنده‌ی برتری الگوریتم ارائه شده نسبت به توابع اکتشافی معمول در این حوزه (انتخاب راس‌ها با بیشترین درجه یا راس‌های مرکزی) می‌باشد.

در دو مدل بحث شده در این مقاله، برای هر مشتری بلقوه راسی در شبکه در نظر می‌گیریم و تاثیر افراد بر یکدیگر را به صورت یالی جهت‌دار بین آن‌ها نشان می‌دهیم. هر راس نیز در این شبکه دو حالت دارد، فعال و غیرفعال، در این دو مدل هدف اصلی مدلسازی چنین رفتاری است: در ابتدا راس ν غیر فعال است، با گذشت زمان تعداد همسایه‌های فعال آن افزایش می‌یابد، سرانجام آن راس تحت تاثیر همسایه‌های فعالش به احتمال خوبی فعال می‌شود و روی همسایه‌های غیرفعال خود اثر می‌گذارد. توضیحات این دو مدل اختصارا به شرح زیر است:

۱. مدل خطی حد آستانه (Linear Threshold Model): در این مدل برای هر راس در شبکه یک آستانه در نظر می‌گیریم. تاثیر هر راس بر راس‌های همسایه با در نظر گرفتن یک وزن $b_{\nu,\omega}$ برای یال بین آن‌ها مشخص می‌شود. در این مدل هنگامی که مجموع تاثیر همسایه‌ها یک راس از آستانه‌اش بیشتر می‌شود، حالت آن از غیرفعال به فعال تغییر می‌یابد.

$$\sum_{\omega \text{همسایه} \nu \text{است}} b_{\nu,\omega} \geq \theta_\nu$$

۲. مدل انتشار مستقل (Independent Cascade Model): در این مدل به هر یال شبکه یک احتمال $p_{\omega,\nu}$ نسبت می‌دهیم. هرگاه راسی فعال می‌شود به احتمالی که بر روی یال آن با همسایه‌اش آمده می‌تواند راس همسایه را فعال کند، این تلاش تنها یکبار صورت می‌گیرد و اگر با یکبار تلاش راس همسایه فعال نشود، دیگر آن راس تاثیری در فعال شدن راس همسایه‌اش ندارد (راس‌ها مستقلا برای فعال کردن دیگران تلاش می‌کنند).

۱.۲ الگوریتم

الگوریتمی که در [۳] برای این مدل ارائه‌شده، راه‌حل ساده‌ی حریصانه برای این مسئله است، به این صورت که در K مرحله، راسی که بیشترین تاثیر را بر راس‌های غیر فعال در شبکه دارد را انتخاب می‌کنیم. دست‌آورد اصلی در [۳] اثبات فاکتور تقریب $1 - \frac{1}{e} - \epsilon$ برای الگوریتم حریصانه است که این اثبات را هم در چارچوب مفاهیم توابع سابمادولار انجام داده‌است. تابع $f : 2^V \to \mathbb{R}^+$ تعریف شده بر روی زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی متناهی مرجع سابمادولار است اگر وفقط اگر به ازای هر زیرمجموعه‌ی S و T که $S \subset T$ داشته‌باشیم:

$$\forall_{\nu \in V} f(S \cup \{\nu\}) - f(S) \geq f(T \cup \{\nu\}) - f(T)$$

تعریف دیگری از توابع سابمادولار معادل تعریف اول ارائه شده‌است که از لحاظ فهم معنایی از آن ضعیف‌تر می‌باشد. مزیت آن در توانایی بیان است:

$$f(S) + f(T) \geq f(S \cup T) + f(S \cap T)$$

توابع سابمادولار ویژگی‌های جالب توجهی دارند، از جمله ویژگی‌هایی که در [۳] استفاده شده است این است:

بیشینه کردن مقدار یک تابع سابمادولار یک‌نوا و نامنفی برای زیرمجموعه‌های k عضوی ان‌پی‌تمام (NP-Complete) است. (برای اثبات می‌توان نشان داد که مسئله‌ی پوشش راسی (set cover) نمونه‌ی کاهش داده‌شده‌ی این مسئله است) اما در مقاله‌ی [۱۳و۱۱] نشان داده شده است که الگوریتم حریصانه برای این مسئله با تقریب $1 - \frac{1}{e}$ جواب می‌دهد.

قضیه ۱. [۱۴و۱۵] *برای تابع سابمادولار یکنوا و نامنفی f، مجموعه‌ی k عضوی S را این گونه تعریف می‌کنیم: در k مرحله عضوی که بیشتر از بقیه مقدار f را زیاد می‌کند را به S اضافه می‌کنیم. ثابت می‌شود که اگر S^* مجموعه‌ای k عضوی باشد که مقدار f را بیشینه می‌کند، برای $f(S)$ داریم:*

$$f(S) \geq (1 - \frac{1}{e}).f(S^*)$$

برای استفاده از این چارچوب در مسئله مطرح شده تابع $\sigma(A)$ به این صورت تعریف می‌شود: اگر مجموعه‌ی اولیه از راس‌ها در دو مدل تعریف شده A باشد، تعداد نهایی راس‌های فعال در شبکه $\sigma(A)$ است [۳]. حال برای اثبات فاکتور تقریب $1 - \frac{1}{e}$ کافیست ثابت شود که تابع $\sigma(A)$ سابمادولار است. این خاصیت برای مدل انتشار مستقل به صورت جداگانه اثبات شده‌است.

قضیه ۲. [۳] *برای هر نمونه از مدل انتشار مستقل، تابع $\sigma(.)$ سابمادولا ر است.*

قضیه ۳. [۳] *بیشینه کردن رفتار در مدل انتشار مستقل ان‌پی‌تمام است.*

ولی درباره‌ی مدل خطی آستانه، با اثبات معادل بودن آن با مدل انتشار مستقل این خاصیت برای تابع $\sigma(A)$ اثبات شده‌است.

قضیه ۴. [۳] *برای هر نمونه از مدل خطی آستانه، تابع $\sigma(.)$ سابمادولا ر است.*

قضیه ۵. [۳] *برای هر مجموعه‌ی اولیه A مدل خطی آستانه معادل مدل انتشار مستقل با تعریف زیر است.*
به ازای هر راس، یکی از یال‌های ورودی به احتمال $b_{\nu,\omega}$ انتخاب می‌شود و احتمال ۱ به آن اختصاص می‌یابد و یا به احتمال $b_{\omega,\nu}\sum_{\omega} - ۱$ یالی انتخاب نمی‌شود.

قضیه ۶. [۳] *مسئله بیشینه‌سازی رفتار در مدل خطی حد آستانه ان‌پی‌تمام است.*

۳ تعیین قیمت خصوصی و فروشندگی دوره‌گرد

در این مدل تعدادی خریدار داریم که روی همدیگر تاثیر می‌گذارند. قصد داریم ترتیبی از آن‌ها را مشخص کرده و طبق آن ترتیب به آن‌ها مراجعه کنیم (به این ترتیت که به صورت یک جایگشت مشخص می‌شود ، استراتژی فروش می‌گوییم) به هر کسی که مراجعه می‌کنیم یک قیمت ارائه می‌دهیم که این قیمت وابسته به شهودی است که نسبت به تابع ارزش آن شخص داریم. معمولا فرض می‌کنیم تابع توزیع احتمال تجمعی مقدار تابع ارزش را به ازای هر i و هر S می‌دانیم ($F_{i,S}$). هدف این است که ترتیب بهینه و همچنین دنباله‌ی قیمت‌های متناظر با آن را بیابیم به نحوی که بیشترین تعداد از خریداران حاضر به خرید از ما شوند. به عنوان یک مثال بدیهی حالتی را درنظر بگیرید که فقط دو خریدار داریم: الف و ب. ب روی الف تاثیر ∞ واحد دارد. مقدار تابع ارزش در لحظه‌ی صفر که هیچ کس خرید نکرده است برای الف و ب صفر است. اگر ابتدا کالا را به الف معرفی کنیم سود ما صفر می‌شود زیرا به ازای هیچ قیمتی حاضر به خرید نمی‌شوند. ولی اگر ابتدا به ب پیشنهاد کنیم و کالا را مجانی به وی دهیم، روی الف به اندازه‌ی ∞ تاثیر می‌گذارد و از آن به بعد تابع ارزش آن ∞ می‌شود و به ازای هر قیمتی حاضر به خرید می‌شود.

در [۱] به نقل از [۱۳] بر حسب تابع توزیع احتمال و تابع ارزش یک قیمت کوته‌نظرانه ارائه می‌دهد. می‌دانیم هنگامی که فروشنده قیمت p را ارائه می‌دهد احتمال اینکه توسط خریداری با توزیع احتمال تجمعی تابع ارزش $F(p)$ خریداری شود برابر است با $۱-F(p)$ است. پس سود ما برابر با $p(۱-F(p))$ است. قیمت کوته‌نظرانه را برابر با p^* در نظر می‌گیریم که $p^*(۱-F(p^*))$ در آن بیشینه شود.

تابع $R_i(S)$ را میزان سودی تعریف می‌کنیم که بازیکن iام می‌تواند با قیمت‌های کوته نظرانه به دست آورد اگر مجموعه‌ی S از انسان‌ها کالای مورد نظر را خریده‌باشند.

در [۱] این مسئله برای حالتی که تاثیرات خریداران روی همدیگر مثبت است و همچنین در نظر گرفتن فرض‌های دیگری مانند سابمادولار بودن یا سرعت رشد هازارد مثبت (monotone hazard rate) برای تابع ارزش بازیکنان ($\nu_i(S)$) یا تابع سود ($R_i(S)$)، در پیکربندی‌های (setting) مختلف بررسی شده‌است. سرعت رشد هازارد مثبت ویژگی‌ای است که در تئوری حراج‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد [۱۳]. می‌گوییم تابع ν_i دارای سرعت رشد هازارد مثبت است اگر وفقط اگر $h(t) = \frac{f(t)}{۱-F(t)}$ صعودی باشد. در این تعریف $f(t)$ تابع چگالی احتمال توزیع ν_i است و $F(t)$ تابع چگالی تجمعی آن می‌باشد. به عبارت دیگر $F(t)$ احتمال کمتر بودن $\nu_i(S)$ از t است. در ادامه به بیان الگوریتم‌ها و استراتژی‌های قیمت خصوصی بیان‌شده می‌پردازیم.

۱.۳ استراتژی‌های قیمت خصوصی

مقاله‌ی [۱] تنها مقاله‌ای است که این مدل فروش را بررسی کرده‌است. در ادامه پیکربندی‌های مطرح‌شده در این مقاله و نتایج مربوط به هر پیکربندی را با توجه به فرض‌های مطرح شده بیان می‌کنیم:

۱. پیکربندی متقارن (symmetric setting): در این پیکربندی تابع توزیع تجمعی مربوط به $\nu_i(S)$ فقط بستگی به تعداد اعضای S دارد. یعنی تابع توزیع تجمعی $\nu_i(S)$ را می‌توان به صورت F_k درنظر گرفت که $k = |S|$. در این حالت پیدا کردن استراتژی بهینه فروشندگی دوره‌گرد در زمان چندجمله‌ای امکان‌پذیر است.

قضیه ۷. [۱] *در پیکربندی متقارن، استراتژی بهینه با هر شرایطی در تابع ارزش در زمان چندجمله‌ای قابل محاسبه است.*

روشی که برای محاسبه‌ی استراتژی بهینه برای اثبات این قضیه بیان شده است روشی مبتنی بر برنامه‌سازی پویاست (dynamic programming).

۲. پیکربندی عمومی (general setting): در این پیکربندی هیچ فرضی روی تابع توزیع احتمال و مقادیر توابع ارزش نمی‌شود. در این حالت ثابت شده‌است که پیدا کردن استراتژی بهینه ان‌پی‌تمام است.

قضیه ۸. [۱] *در پیکربندی عمومی پیدا کردن استراتژی بهینه حتی در حالتی که خود مقادیر توابع ارزش داده شده‌باشند (یعنی توابع توزیع احتمال تابع ضربه باشند) ان‌پی‌تمام است.*

۳. پیکربندی ترغیت و استخراج (influence and exploit): در این پیکربندی استراتژی‌های قیمت خصوصی با این خاصیت مورد بررسی قرار می‌گیرند که در آن‌ها ابتدا یک مجموعه‌ی خریداران انتخاب می‌شوند و کالا به صورت مجانی به آن‌ها داده می‌شوند. در مراحل بعد فقط تاثیر این مجموعه را بر خریداران دیگر در نظر گرفته و تاثیر خریداران دیگری که در زمان‌های بعدی اقدام به خرید می‌کنند را نادیده می‌گیریم (چیزی مشابه ایده‌های موجود در قسمت دوم این مقاله). بعد از آن بک جایگشت از خریداران را انتخاب کرده و به هر کدام از آن‌ها یک قیمت متناسب با توزیع احتمال تابع ارزش آن‌ها ارائه می‌دهیم.

در [۱] ابتدا این پیکربندی در حالتی که توابع ارزش از روی یک گراف بدون جهت وزن‌دار به صورت جمعی به دست می‌آید، بررسی شده‌است و یک الگوریتم تقریبی با فاکتور $\frac{۲}{۳}$ برای آن ارائه شده است. منظور این است که در این حالت یک گراف وزن‌دار بی‌جهت داریم که وزن هر یال مشخص کننده‌ی تاثیر خریداران مربوط آن یال روی هم است (یعنی i روی j و j روی i به اندازه‌ی $\omega_{i,j}$ تاثیر می‌گذارند). در این حالت فرض می‌کنیم $\nu_i(S)$ به صورت یکنواخت (uniform) از بازه‌ی $[۰, \sum_{j\in S\cup\{i\}} \omega_{i,j}]$ انتخاب می‌شود.

قضیه ۹. [۱] *در حالتی که توابع ارزش تعریف شده به صورت بالا باشند، مجموعه‌ی A وجود دارد که پیاده‌سازی پیکربندی ترغیب و استخراج توسط آن حداقل به $\frac{۱}{۳}$ سود بهترین استراتژی فروشندگی دوره‌گرد می‌انجامد.*

با استفاده از ایده‌ی اثبات ۸ یک قضیه‌ی عمومی‌تر در مورد این پیکربندی اثبات شده‌است.

قضیه ۱۰. [۱] *فرض کنید که تابع $R_i(S)$ برای هر $i \in V$ و هر $S \subset V - \{i\}$ صعودی، نامنفی و سابمادولار باشد. همچنین فرض کنید توابع ارزش دارای سرعت رشد هازارد مثبت باشند. در این صورت مجموعه‌ی A وجود دارد که پیاده‌سازی پیکربندی ترغیب و استخراج توسط آن حداقل به $\frac{e}{۴e-۲}$ سود بهترین استراتژی فروشندگی دوره‌گرد می‌انجامد.*

در [۱] ارتباط بین استراتژی بهینه در پیکربندی ترغیب و استخراج و استراتژی بهینه‌ی فروشندگی دوره‌گرد بیان شده‌است. فرض کنید تابع $g(A) = \sum_{i\in V-A} R_i(A)$ برابر با میزان سودی است که در استراتژی ترغیب و استخراج می‌توان به دست آورد.

قضیه ۱۱. [۱] *یک الگوریتم با زمان چندجمله‌ای وجود دارد که یک مجموعه‌ی A را به نحوی حساب می‌کند که $g(A)$ حداقل $\frac{۱}{۳}$ از سود بهینه در پیکربندی ترغیب و استخراج باشد.*

الگوریتمی که برای محاسبه‌ی این مجموعه در این مقاله معرفی شده اس‌ت مبتنی بر جستجوی محلی (local search) است. ابتدا یک مجموعه‌ی اولیه در نظر می‌گیریم. در هر گام عضوی را به آن اضافه می‌کنیم یا از آن یک عضو را حذف می‌کنیم به نحوی که مقدار تابع g برای آن $\frac{\epsilon}{n^۲}+۱$ برابر شد. ثابت می‌شود که تعداد گام‌ها حداکثر $O(\frac{n^۳}{\epsilon})$ تاست. اثبات اینکه چرا این الگوریتم مبتنی بر جستجوی محلی به این ضریب تقریب دست پیدا می‌کند با توجه به نتیجه‌ایست که در [۱۶] برای بیشینه‌سازی توابع سابمادولار بدون توجه به صعودی یا نزولی بودن تابع ارائه شده‌است.

قضیه ۱۲. [۱۶] *فرض کنید تابع $g(.)$ یک تابع غیرمنفی سابمادولار است. و فرض کنید M اندازه‌ی ماکزیمم آن است. در این صورت الگوریتم جستجوی محلی که در بالا توضیح دادیم به مجموعه‌ی A می‌انجامد که $g(A) \geq \frac{۱}{۳}M$.*

برای استفاده از قضیه‌ی ۱۱ ابتدا باید ثابت کنیم که $g(.)$ یک تابع سابمادولار است. این امر در [۱] به طور مستقیم در حالتی که توابع سود صعودی، نامنفی و سابمادولار باشند اثبات گردیده‌است.

قضیه ۱۳. [۱] *اگر تمام توابع R_i برای هر i نامنفی، سابمادولار و صعودی باشند، آنگاه تابع $g(A) = \sum_{i\in V-A} R_i(A)$ نامنفی و سابمادولار خواهد بود.*

۴ تعیین قیمت عمومی و فروشندگی عمده

رفتاری که در [۶] بررسی شده‌است مربوط به قیمت‌گذاری عمومی در شبکه‌های اجتماعی می‌شود. همانطور که اشاره شده در قمیت‌گذاری عمومی یک قیمت به طور عمومی اعلام می‌شود و همه از آن مطلع می‌شوند. افرادی که میزان تابع ارزش آن‌ها (تعریف تابع ارزش خریداران مانند قسمت‌های قبل به صورت تابعی به شکل $\nu_i : 2^V \to \mathbb{R}^+$) در این مقاله با فرض تاثیر افراد بر رفتار یکدیگر سعی شده قیمت (یا مجموعه‌ای از قیمت‌ها) بهینه‌ای برای بدست آوردن حداکثر سود محاسبه گردد.

در مدل قیمت‌گذاری عمومی فروشنده ابتدا قیمت p_t را در زمان t به صورت عمومی در شبکه اعلام می‌کند. هر فرد با توجه به آن نسبت به خرید یا عدم خرید آن اقدام می‌کند. فروشنده در این مدل می‌تواند بعد از به تعادل رسیدن بازار قیمت کالا را تغییر دهد. همانند قسمت‌های قبل یک فرد اقدام به خرید کالا می‌کند اگر مقدار $\nu_i(S) > p_t$ باشد. در این حالت S مجموعه‌ی افرادی است که تا به حال اقدام به خرید کالا کرده‌اند.

فرض کنید در یک زمان در شبکه افراد مجموعه‌ی S کالا را خریداری کردند و قیمت کالا برابر با p باشد. تابع $B^1(S,p)$ را مجموعه‌ی افرادی که کالا را بعد از یک مرحله خریداری کردند تعریف می‌شود. به این ترتیب اگر برای فرد i ارزش کالا را متناسب با شرایط بازار بگیریم، تابع $B^1(S,p)$ را به این گونه تعریف می‌کنیم:

$$B^1(S,p) = \{i \mid \nu_i > p\} \cup S$$

به این ترتیب افرادی که بعد از k مرحله کالا را خریداری کردند به صورت بازگشتی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B^k(S,p) = B^1(B^{k-1}(S,p),p)$$

این روند تا جایی ادامه می‌یابد که دیگر کسی حاضر به خرید کالا نشود، در این حالت می‌گوییم شبکه به تعادل رسیده و $B(S,p) = B^k(S,p)$ را مجموعه نهایی افرادی که کالا را با قیمت p می‌خرند تعریف می‌شود.

۱.۴ استراتژی‌های قیمت عمومی

مقاله‌ی [۶] تنها مقاله‌ای است که این مدل فروش را بررسی کرده‌است. در ادامه پیکربندی‌های مطرح شده در این مقاله و نتایج مربوط به هر پیکربندی را با توجه به فرض‌های مطرح‌شده بیان می‌کنیم:

۱) پیکربندی Basic(۱) قطعی: در این مسئله فروشنده حق دارد تنها یک بار قیمت اعلام کند و نمی‌تواند آن‌را تغییر دهد. همچنین فرض شده‌است که از مقدار توابع ارزش خریداران به صورت قطعی مطلع هستیم. به این ترتیب مسئله در اینجا این گونه است که قیمت p را به نحوی اعلام کنیم که $p \times B(\emptyset,p)$ بیشینه شود. در این مقاله اعدادی به صورت $\beta_i = \sup\{p \mid i \in B(\emptyset,p)\}$ تعریف می‌شود و ثابت می‌شود که قیمت بهینه در مجموعه‌ی $\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$ قرار دارد. در [۱۷] یک الگوریتم حریصانه برای محاسبه‌ی این اعداد و به دست آوردن قیمت بهینه ارائه شده‌است. این الگوریتم در زمان $O(n^2 \log n)$ کار می‌کند.

۲) پیکربندی Basic(k) قطعی: در این مسئله فروشنده می‌تواند k قیمت در k روز اعلام کند. فرض مسئله این است که در هر روز شبکه به تعادل می‌رسد. به این ترتیب مسئله این‌گونه تعریف می‌شود که k قیمت برای k روز اعلام کنیم که تعداد نهایی خریداران بیشینه گردد. مانند حالت قبلی فرض بر این است که از مقادیر توابع ارزش به صورت قطعی مطلع هستیم. در این پیکربندی هدف پیدا کردن دنباله‌ای از قیمت‌ها به صورت $\{p_i\}_{i=1}^k$ است که $\sum_{i=1}^k p_i \mid S^i - S^{i-1} \mid$ کمینه شود. منظور از S^i مجموعه‌ی خریدارانی است که در روز iام اقدام به خرید می‌کنند و برابر $B(S^{i-1},p_i)$ است. در [۱۷و۶] یک الگوریتم پویا ارائه شده‌است که این دنباله از قیمت‌ها را محاسبه می‌کند. الگوریتم ارائه‌شده در زمان $O(n^2 \log n + n^2 k)$ کار می‌کند.

۳) پیکربندی (۱)Basic غیرقطعی: در واقعیت خیلی بعید است که قبول کنیم فروشنده از مقادیر توابع ارزش مطلع باشد زیرا این مقادیر جزو اطلاعات خصوصی خریداران است. به جای آن فرض می‌شود که توزیع احتمال توابع ارزش را می‌دانیم. این پیکربندی مشابه پیکربندی (۱)Basic است با این تفاوت که برای توابع ارزش مقادیر غیرقطعی و توزیع احتمال فرض می‌شود.

در این پیکربندی متغیرهای X_p و C_p تعریف می‌شوند که به ترتیب تعداد خریداران و میزان سودی است که با اعلام قیمت p بدست می‌آیند. بدیهی است که داریم: $E[C_p] = p \times E[X_p]$. در این حالت به دنبال p_{OPT} هستیم که $E[C_{p_{\mathrm{OPT}}}]$ بیشینه شود.

برای این پیکربندی یک FPTAS ارائه شده‌است. FPTAS گونه‌ای از الگوریتم‌های تقریبی است که به ازای هر $\epsilon > 0$، فاکتور آن می‌تواند $\alpha(1-\epsilon)$ باشد. زمان FPTAS چندجمله‌ای برحسب تعداد ورودی و $\frac{1}{\epsilon}$ است. قضیه‌ی زیر جزییات را مشخص می‌کند:

قضیه ۱۴. *[۶و۱۷] برای هر قیمت داده‌شده‌ی p و هر مقدار $\epsilon > 0$ و مقدار صحیح $m \geq 3$ و $t \geq 1$ یک الگوریتم با زمان اجرای $O(\frac{n^2 t^2 m}{\epsilon^2} \times \log_{1+\epsilon}^{\max\{p_i\}})$ وجود دارد که قیمت p را به نحوی پیدا می‌کند که با احتمال حداقل $1 - \frac{e^m \log_{1+\epsilon}^{\max\{p_i\}}}{t^m}$ خواهیم‌داشت: $E[C_p] = E[C_{OPT} \times \frac{1-\epsilon}{(1+\epsilon)^2}$.*

۴) پیکربندی Basic(k) غیرقطعی: این پیکربندی مشابه پیکربندی Basic(k) قطعی است که با توابع ارزش غیرقطعی مدلسازی می‌شود. در [۶] و همچنین در [۱۷] برای این پیکربندی نیز یک FPTAS پیدا شده‌است:

قضیه ۱۵. *[۶و۱۷] الگوریتم پویایی وجود دارد که دنباله‌ی بهینه‌ای از قیمت‌ها را به نحوی پیدا می‌کند که سود آن حداقل $\frac{1-\epsilon}{2(1+\epsilon)}$ سود بهینه است. این الگوریتم در زمان اجرای $O(\frac{n^5 \log_{1+\epsilon}^{\max\{p_i\}}}{\epsilon^2} \times (\log\log\max\{p_i\}) + k\log^2(\max\{p_i\}))$ کار می‌کند.*

۵) پیکربندی Rapid(k) : در این پیکربندی فروشنده می‌تواند قیمت کالا را در k روز تعیید کند ولی هنگامی که قیمت در یک روز مشخص شد به بازار اجازه نمی‌دهیم به تعادل برسد و تنها تغییرات همان روز را اعمال می‌کنیم. در حقیقت در این پیکربندی فرض کرده‌ایم تاثیرات مربوط به خرید در یک روز در روز بعدی دیده می‌شود و نه در همان روز. هم در [۶] و هم در [۱۷] ثابت شده‌است که هیچ الگوریتم تقریبی با فاکتور α برای این مسئله وجود ندارد.

قضیه ۱۶. *[۶و۱۷] برای $Rapid(k)$ هیچ الگوریتم تقریبی با فاکتور α به شرط $P \neq NP$ وجود ندارد.*

برای اثبات این قضیه در [۶] و [۱۷] شیوه‌های متفاوتی اتخاذ شده‌است. در [۶] مسئله‌ی مجموعه‌ی مستقل (independent set problem) و در [۱۷] مسئله‌ی جمع زیر مجموعه (subset sum problem) به این مسئله کاهش داده‌شده‌اند.

۵ نتیجه گیری

در این مقاله تاثیر شبکه‌های اجتماعی بر سیاست‌ها، استراتژی‌ها و الگوریتم‌های بازاریابی و فروش بررسی شدند. نتایج کار محققان علوم اقتصادی و علوم رایانه در این امر ارائه شدند. انواع مدلسازی‌ها، پیکربندی‌ها و مسائلی که در این زمینه مطرح شده‌اند بیان گردیدند و شرح مختصری از جزییات آن‌ها مورد مطالعه قرار گرفتند.

مراجع

[1] [1] J.Hartline, V.S.Mirrokni and M.Sundarajan, *Optimal Marketing Strategies over social networks* , In WWW, Pages 189-198, 2008.

[2] M.Katz and C.Shapiro, *Network exernalities, competition and compatibility* , American Economics Review, 75(3):424-40, June 1985.

[3] D.Kempe, J.Kleinberg, and Eva Tardos, *Maximizing the spread of influence through a social network* , In KDD 03, pages 137-146, New York, Ny, USA, 2003, ACM.

[4] [4] E.Mossel and S.Roch, *On the submodularity of influence in social networks* , In STOC'07: Proceedings of the thirty-ninth annual ACM symposium on Theory of computing, pages 128-134, New York, NY, USA, 2007, ACM.

[5] D.Kempe, J.Kleinberg, and Eva Tardos, *Influential nodes in a diffusion model for social networks* , In in ICALP, pages 1127-1138. Springer Verlag, 2005.

[6] H. Akhlaghpour, M. Ghodsi, N. Haghpanah, H. Mahini, A. Nikzad, *Iterative Pricing with Positive Network Externalities* , 5th Workshop on Ad Auctions, Stanford, 2009.

[7] http://www.orgnet.com/sna.html

[8] http://en.wikipedia.org/wiki/Social-network

[9] Carrington, Peter J., John Scott and Stanley Wasserman (Eds.). 2005, *Models and Methods in Social Network Analysis* , New York: Cambridge University Press. ISBN 9780521809597.

[10] V. Krebs, *Uncloaking Terrorist Networks*, FirstMonday, 2001, available at http://firstmonday.org/htbin/ cgiwrap/bin/ojs/index.php/fm/article/view/941/863 .

[11] P.domingos , M.Richardson, *Mining the network value of the customers* , seventh international conference on knowledge discovery and data mining, 2001.

[12] M. Richardson, P. Domingos, *Mining Knowledge-Sharing Sites for Viral Marketing* , Eighth Intl.

[13] R. Myerson, *Optimal auction design* , Mathematics of Operations Research, 6(1):58-73,1981.

[14] G. Nemhauser, L. Wolsey, M. Fisher, *An analysis of the approximations for maximizing submodular set functions* , Mathematical Programming, 14(1978), 265–294.

[15] G. Cornuejols, M. Fisher, G. Nemhauser, *Location of Bank Accounts to Optimize Float* , Management Science, 23(1977).

[16] Uriel Fiege, Vahab S.Mirrokni, and Jan Vondark, *Maximizing non-monotone, submodular functions* , in FOCS'07: Proceeding of the 48th annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science(FOCS'07) pages 461-471, Washington, DC, USA, 2007, IEEE Computer Society.

[۱۷] ح. مهینی *الگوریتمهای نوین در بازارهای الکترونیکی* ، پیشنهاد رسالهی دکتری نرمافزار کامپیوتر، دانشکدهی مهندسی کامپیوتر، دانشگاه صنعتی شریف، مهر ۱۳۸۷.

مدلسازی عامل-گرا[۱] و شبیه‌سازی پدیده‌های اجتماعی

مسعود آموزگار

مقدمه

در جهان ما، ذرات بنیادین، اتم‌ها را و اتم‌ها، مولکول‌ها را تشکیل می‌دهند، ساده و در عین حال پیچیده! و مولکول‌ها نیز اشیا جهان را می‌سازند. در این میان مولکول‌های پیچیده‌ی ارگانیک، سلول‌های زنده را می‌سازند و سلول‌ها نیز بافت‌ها و میکروارگانیسم‌ها را تشکیل می‌دهند و ارگانیسم‌ها نیز اکوسیستم‌ها را بوجود می‌آورند. نورون‌ها، نوع خاصی از سلول‌ها هستند که انسان را قادر می‌سازند که خودآگاه باشد. انسان‌ها در کنار هم دیگر، گروه‌ها و دیگر ساختارهای اجتماعی را تشکیل می‌دهند.

پیچیدگی‌ها

قبلا از طریق شناسایی بخش‌ها و اجزای کلیدی و مد تقابلی آن‌ها با یکدیگر، برای هر یک از لایه‌های یک فریم‌ورک[۲] با روشی خاص، هویت و مفهوم آن لایه قابل توضیح بود اما هریک از این لایه‌ها، خوشه‌ها یا انبوهی از بخش‌های پایین دستی[۳] نبوده‌اند؛ بلکه کلیتی پیچیده داشتند که دارای ساختارهایی مرتبط و متعامل بوده‌اند که ویژگی‌ها و نظم جدیدی را در برداشتند. با توجه به موفقیت بسیار کم روش‌های قبلی در تشریح چگونگی تبدیل (سازماندهی) یک سری اجزای ساده به یک کلیت پیچیده‌تر و کارآمدتر، روش‌های علمی جدید از جمله "علم شناخت پیچیدگی" یا "نظریه پیچیدگی" توانسته‌اند روش‌های ناکارآمد قبلی را از صحنه بیرون کنند. عموما کلمه "پیچیدگی" به سیستم‌های پیچیده‌ی انطباقی اطلاق می‌شود. در واقع این سیستم‌های پویا از تعداد زیادی از اجزای ساده و غیرخطی تشکیل شده‌اند که می‌توانند با محیط دائما در تغییر خود سازگار شوند. کارایی اصلی علم شناخت پیچیدگی بیشتر در این حوزه تمرکز یافته است که چگونه تقابل تعدادی از اجزای سطح پایینی به الگوهای ماکروسکوپی تاحدودی باثبات و یک‌پارچه تبدیل شده‌اند؟

ویژگی‌های اصلی مدل‌سازی عامل-گرا

در توضیح مدلسازی عامل-گرا باید به تفاوت آن با روش‌های دیگر مدلسازی از جمله مدلسازی ریاضی[۴] مایکروشبیه‌سازی[۵] و سیستم داینامیک[۶] اشاره کرد. این نوع مدلسازی شباهت زیادی به روش شی‌گرا در برنامه‌نویسی کامپیوتری دارد با این تفاوت که بر عامل خود تعیین می‌کند که چگونه با جهان خود تعامل داشته باشد و چگونه ورودی‌های گرفته از جهان خود را پردازش کند. در

[۱] Agent-based moddeling
[۲] framwork
[۳] low level
[۴] Mathematical Modelling
[۵] Micro simulation
[۶] System Dynamic

این روش برخلاف سیستم دینامیک هر عامل می‌تواند خود عمل متقابل با دیگر عامل‌ها را انتخاب کند و این عمل ممکن است با عمل عاملی که مقادیر درونی کاملا مشابهی دارد متفاوت باشد. لذا می‌توان پیچیدگی‌هایی که در سیستم اجتماعی وجود دارد را با این مدل با تقریب خوبی در شبیه‌سازی‌ها نشان داد.

همچنین در این روش مدلسازی، محدودیتی در تعداد المان‌های استفاده شده برای عامل‌ها وجود ندارد چون با وجود پردازنده‌های قوی، می‌توان میلیون‌ها عامل با المان‌های زیاد را بطور همزمان شبیه‌سازی کرد.

مدلسازی عامل‌گرا در علوم اجتماعی

در ابتدا باید بر این موضوع تاکید شود که هدف اولیه مدلسازی و شبیه‌سازی عامل-گرا در علوم اجتماعی، پیش بینی نیست، بدین معنی که پروسه‌های اجتماعی معمولا آنقدر پیچیده هستند که امکان همانندسازی آن‌ها وجود ندارد. پس مدل‌های عامل-گرا دارای دقت لازم برای اهدافی نظیر پیش‌بینی کردن، کارآمد نیستند.

هدف اصلی مدلسازی عامل-گرا کمک به ایجاد تئوری‌های جدید یا فرمالایز کردن تئوری‌های قبلی است. در واقع با توجه به پروسه‌ی فرمالایز کردن که شامل فرمول‌بندی یک تئوری است (به طوری که یکپارچگی و تمامیت آن حفظ شود)، شبیه‌سازی کامپیوتری در علوم اجتماعی همان نقش ریاضیات در علوم طبیعی را ایفا می‌کند. پس با این دید که شبیه‌سازی کامپیوتری نسبت به مدل‌های ریاضی برای علوم اجتماعی روش بسیار مناسب‌تری برای فرمالایز کردن است، می‌توان موارد زیر را از ویژگی‌های خوب مدل‌سازی عامل-گرا برشمرد:

- زبان‌های برنامه‌نویسی بسیار واضح‌تر و رساتر هستند و انتزاع کمتری نسبت به تکنیک‌های ریاضی دارند.
- با برنامه‌های کامپیوتری به راحتی می‌توان پروسه‌های موازی را پیاده‌سازی کرد تا با معادله‌های ریاضی.
- برنامه‌ها براساس مبانی مهندسی نرم‌افزار ساخته می‌شوند، بنابراین ساخت‌یافته‌تر هستند و این باعث تسهیل ویرایش آن‌ها می‌شود که معمولا سیستم‌های ریاضیاتی فاقد این ویژگی هستند.
- امکان شبیه‌سازی سیستم‌هایی با عامل‌های همگن بسیار ساده‌تر است (برای مثال برای شبیه‌سازی مردمی متفاوت در نگاه اجتماعی آن‌ها، میزان دانش و توانایی‌هایشان) که این امر با استفاده از ریاضیات نسبتا سخت‌تر است.
- امکان مدل کردن عامل‌هایی با عقلانیت محدود[۷] که با توجه به موقعیت و میزان دانشی که دارند تصمیم می‌گیرند.
- امکان مدل کردن پروسه‌هایی خارج از تعادل.

محیط‌ها و ابزارهای مدلسازی عامل-گرا

محیط‌های رایجی که برای مدلسازی عامل-گرا رایج هستند، عبارتند از:

NetLogo، Mason، Repast

که از حوصله‌ی این متن خارج است که هرکدام بررسی شوند. ولی نکته‌ی مهم و جالبی که نباید فراموش کرد این است که بیشتر ابزارهای مدلسازی عامل-گرا بر پایه‌ی زبان‌های برنامه نویسی جاوا[۸] یا پایتون[۹] هستند که این بخاطر راحتی در مدل کردن سیستم‌های چندعاملی توسط این زبان‌ها است. از جمله آخرین کتابخانه که برای مدلسازی عامل-گرا برای زبان برنامه‌نویسی جاوا آمده است می‌توان به JADE اشاره کرد که به نظر می‌رسد قدرتمندترین آن‌ها نیز باشد.

[۷] Boundedly rational
[۸] Java
[۹] Python

مراجع

[1] N. Gilbert, *Agent-Based Models* , London: Sage Publications, 2007.

[2] N. Gilbert and K. G. Troitzsch , *Simulation for the social scientist* , Buckinghum, Philadelphia: Open University Press, 1999.

[3] I. Lustic, *Agent based modeling of collective identity Testing constructivetheory* , Journal of Artificial Societies and Social Simulation , 1, 2000.

[4] A. Srbljinovic and O. Skunca , *An introduction to agent based modeling and simulation of social processes* , Interdisciplinary description of complex systems , 1-8, 2003.

الگوریتم‌های آنلاین

کاوه حسینی

بخش اول

مقدمه

در طول ۲۰ سال گذشته الگوریتم‌های آنلاین بسیار مورد توجه واقع بوده‌اند. مسایل آنلاین در بسیاری از حوزه‌های کاربردی مطالعه شده‌اند، از جمله مدیریت منابع در سیستم‌های عامل، داده ساختارها، برنامه‌ریزی، شبکه و امور مالی محاسباتی.

به طور رسمی یک الگوریتم آنلاین دنباله‌ای از درخواست‌های $\sigma = \sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(m)$ را دریافت می‌کند. این درخواست‌ها باید به ترتیب ورود پاسخ داده شوند. هنگام پاسخ به درخواست $\sigma(t)$ الگوریتم از درخواست‌های $t' > t$، $\sigma(t')$ اطلاع ندارد. پاسخ دادن به هر درخواست هزینه‌ای را می‌طلبد. هدف کمینه کردن هزینه کلی پرداخت شده برای دنباله‌ی درخواست‌هاست. این فرایند را می‌توان به عنوان یک بازی پاسخ به درخواست[1] در نظر گرفت. دشمن درخواست‌ها را تولید می‌کند و الگوریتم بایستی به هر کدام پاسخ دهد. کارایی الگوریتم‌های آنلاین را معمولا به روش تحلیل رقابتی می‌سنجد[۴]. در این روش الگوریتم آنلاین ALG با الگوریتم آفلاین[2] بهینه‌ی OPT که از دنباله‌ی درخواست‌ها، σ، از همان اول اطلاع دارد و می‌تواند در هر مرحله پاسخی با هزینه‌ی کمینه بدهد، مقایسه می‌شود.

تعریف ۱. *فرض کنید σ داده شده و $ALG(\sigma)$ و $OPT)(\sigma)$(به ترتیب هزینه‌ی الگوریتم‌های ALG و OPT را نشان می‌دهد. الگوریتم ALG را c- رقابتی[3] می‌نامیم اگر ثابت b وجود داشته باشد به طوری که $ALG(\sigma) \leq c.OPT(\sigma) + b$، برای همه‌ی دنباله‌های σ.*

گفتنی است تحلیل رقابتی ابزاری قوی برای تحلیل الگوریتم در بدترین حالت است.

نتایج اولیه

مسئله‌ی صفحه‌بندی[4] یکی از مسایل مهم و احتمالا قدیمی‌ترین مسئله‌ای است که در حوزه‌ی محاسبات تعاملی مطرح شده است. مسئله از تعامل داده توسط CPU با سلسله مراتب حافظه ناشی می‌شود. در این مسئله دارای دو لایه حافظه هستیم. یک حافظه‌ی کم ظرفیت و سریع M_1 و یک با ظرفیت بالاتر ولی سرعت کم M_2. اطلاعات به بخش‌های[5] مساوی تقسیم شده است. CPU به طور مستقیم تنها می‌تواند با حافظه‌ی M_1 تبادل اطلاعات کند. سیستم دنباله‌ای درخواست دریافت می‌کند که هر درخواست به یک بخش از اطلاعات مربوط می‌شود. درخواست را بلافاصله می‌توان جواب داد اگر وتنها اگر بخش مربوطه در M_1 وجود داشته

[1] Request answer game
[2] Offline algorithm
[3] c-Competitive
[4] Paging
[5] Page

باشد، در غیر این صورت یک خطا[۶] رخ می‌دهد. سپس بخش مربوط از حافظه‌ی M_2 به M_1 آورده می‌شود و درخواست پاسخ داده می‌شود. با هر بار کپی کردن یک بخش به M_1 یکی از بخش‌های فعلی M_1 حذف می‌شود تا جا برای بخش جدید باز شود. الگوریتم صفحه‌بندی تعیین می‌کند کدام یک از بخش‌ها حذف شود. این تصمیم هم باید به شکل آنلاین صورت گیرد. هزینه‌ای که تمایل به کمینه کردن آن داریم تعداد خطاهاست.

عمده‌ترین الگوریتم‌های صفحه‌بندی در زیر آورده شده‌اند:

- LRU (اخیرا کمترین استفاده شده[۷]): بخشی را حذف کن که اخیرا کمتر از بقیه استفاده شده است.
- FIFO (اولین ورودی-اولین خروجی[۸]): بخشی را حذف کن که زمان بیشتری نسبت به بقیه در M_1 باقی‌ماند است.
- LIFO (آخرین ورودی-اولین خروجی[۹]): آخرین بخشی را حذف کن که به حافظه وارد شده است.
- LFU (اخیرا کمترین استفاده شده[۱۰]): بخشی را حذف کن که اخیرا از بقیه کمتر استفاده شده است.

سلیتورو تارجان[۴] کارایی دو الگوریتم اول را بررسی کرده‌اند. فرض کنید ظرفیت M_1، k بخش باشد.

قضیه ۲. *LRU و $FIFO$ هردو k-رقابتی هستند.*

اثبات. نشان می‌دهیم LRU، k-رقابتی است. برای الگوریتم FIFO هم به شکل مشابه اثبات می‌شود.

فرض کنید پیکربندی[۱۱] اولیه‌ی الگوریتم MIN (الگوریتم بهینه‌ی آفلاین) و LRU در حافظه‌ی M_1 یکی باشد. بایستی نشان دهیم برای هر k بخش اولیه در حافظه‌ی M_1 و برای هر دنباله‌ی σ، $\sigma C_{\text{LRU}}(\sigma) \leq k.C_{\text{MIN}}(\sigma)$.

عملیات LRU را برای هر دنباله‌ی σ ای خاص بررسی می‌کنیم. دنباله‌ی σ را به چند مرحله[۱۲] تقسیم می‌کنیم

$$\sigma = \sigma_1, \ldots \quad [\sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_j], [\sigma_{j+1}, \ldots, \sigma_l], \ldots$$

که هر مرحله دارای دقیقا k خطا است و در آخرین عضو آن هم خطا رخ داده‌است. برای مثال اولین مرحله با σ_j پایان می‌یابد که

$$j = \min\{t : \text{LRU has k page faults in } \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_t\}$$

حالت هزینه‌ی یک مرحله را برای هر دوی LRU و MIN بررسی می‌کنیم. بنابر تعریف LRU ، k خطا دارد. نشان می‌دهیم که الگوریتم MIN در هر مرحله بایستی حداقل یک خطا داشته باشد. دو حالت متفاوت را بررسی می‌کنیم.

حالت ۱: در مرحله‌ی یکسان LRU دو بار برای یک بخش p خطا می‌کند. بنابراین مرحله به شکل زیر است:

$$\ldots, [\sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_{p_1} = p, \ldots, \sigma_{p_2} = p, \ldots, \sigma_j], \ldots$$

توجه کنید که پس از اولین خطا روی p، p به M_1 آورده‌می‌شود و دوباره از M_1 حذف می‌شود تنها در صورتی که p اخیرا از بقیه کمتر استفاده‌شده‌باشد. بنابراین اگر یک خطای دیگری روی p رخ دهد نشان می‌دهد که همه‌ی k بخش دیگر موجود در M_1 که قبل از σ_{p_2} هستند، پس از اولین خطا روی p و قبل از درخواست دوم به p وارد M_1 شده‌اند. بنابراین $k+1$ بخش مختلف در این مرحله درخواست‌شده‌اند. این یعنی MIN در هر مرحله حداقل یک خطا داشته‌باشد.

حالت ۲: LRU روی k بخش مختلف خطا می‌کند.

در اینجا دو زیر حالت را بررسی می‌کنیم. با توجه به اینکه آخرین خطایی (مثلا p) که قبل از شروع مرحله صورت گرفته‌است.

الف) در مرحله‌ی فعلی، روی p دوباره خطا رخ می‌دهد.

$$\sigma_i = p, [\sigma_{i+1}, \ldots, p \ldots, \sigma_j]$$

این حالت بسیار شبیه به حالت ۱ است. قبل از اینکه دومین خطا روی p رخ دهد بایستی k درخواست به بخش‌های غیر از p داده‌شود، بنابراین در مرحله‌ی فعلی کلا $k+1$ درخواست به بخش‌های متفاوت وجود دارد. بنابراین الگوریتم MIN در این مرحله هم حداقل یک خطا دارد.

---
[۶] Page Fault
[۷] Least recently used
[۸] First-in First-out
[۹] Last-In-First-Out
[۱۰] Least-Frequently-Used
[۱۱] Configuration
[۱۲] Phase

ب) در مرحله‌ی فعلی هیچ خطایی روی p وجود ندارد.

$$\sigma_i = p, [\sigma_{i+1}, \dots, \sigma_j]$$

رفتار MIN را بررسی می‌کنیم. قبل از شروع مرحله بایستی p در M_1 موجود باشد. توجه شود که در طول مرحله‌ی فعلی k درخواست متفاوت می‌رسند که هیچ کدام از آن‌ها p نیستند. بنابراین برای جا دادن همه‌ی آن‌ها MIN باید p را حذف کند.

نشان دادیم در همه‌ی حالت‌ها برای هر مرحله $C_{\text{MIN}}(\text{phase}) \geq 1$. ولی راجع به خطاهای قبل از شروع اولین مرحله حرفی نزدیم. با توجه به اینکه پیکربندی اولیه برای هر دو الگوریتم را یکسان گرفته‌ایم اولین خطا برای هر دو باید یکسان باشد. □

دسته‌ی کلی‌تری از الگوریتم‌ها وجود دارد که همه k-رقابتی هستند.

علامت‌گذاری[13]. الگوریتم علامت‌گذاری دنباله‌ی درخواست‌ها را در چند مرحله پاسخ می‌دهد. در ابتدای هر مرحله همه‌ی بخش‌های حافظه بدون علامت هستند. هرگاه یک بخش لازم می‌شود آن بخش علامت‌دار می‌شود. هنگام بروز خطا یکی از بخش‌های حافظه که علامت‌دار نیست به طور دلخواه انتخاب شده و حذف می‌شود. یک مرحله تمام می‌شود وقتی که همه‌ی بخش‌های حافظه علامت‌دار هستند و یک خطا بروز کند. در این صورت همه‌ی علامت‌ها پاک می‌شود و یک مرحله‌ی جدید شروع می‌شود.

الگوریتم LRU در واقع یک نوع الگوریتم علامت‌گذاری است. به طور کلی استراتژی‌های علامت‌گذاری در [۲و۳] بررسی شده‌اند. تورینگ[14] [۵] نشان داد که هر الگوریتم علامت‌گذاری k-رقابتی است. در واقع الگوریتم‌های قطعی در بهترین حالت k-رقابتی هستند.

یک الگوریتم بهینه‌ی آفلاین برای مسئله‌ی صفحه‌بندی توسط بلادی[15] [۱] ارایه شده‌است. الگوریتم MIN نام دارد و به شکل زیر عمل می‌کند.

MIN : هنگام بروز خطا بخشی را حذف کن که در آینده‌ی دورتر از بقیه دوباره درخواست می‌شود.

بلادی نشان داد که روی هر دنباله از درخواست‌ها این الگوریتم کمترین تعداد خطا را دارد.

قضیه ۳. [۱] *الگوریتم MIN یک الگوریتم بهینه‌ی آفلاین برای مسئله‌ی صفحه‌بندی است.*

قضیه ۴. [۴] *الگوریتم قطعی آنلاین برای مسئله‌ی صفحه‌بندی وجود ندارد که ضریب رقابتی[16] آن کمتر از k باشد. به عبارت دیگر برای هر الگوریتم آنلاین A دنباله‌ای مانند $\sigma^A = \sigma_1^A \dots \sigma_n^A$ وجود دارد به طوری که $C_A(\sigma^A) \geq k.C_{MIN}(\sigma^A)$. در واقع این دنباله را می‌توان از مجموعه‌های $k+1$ بخش انتخاب کرد.*

اثبات. فرض کنید σ_i^A بخشی باشد که از M_1 پس از پاسخ دادن به $\sigma_1^A \dots \sigma_{i-1}^A$ حذف شده است.

لم ۵. *برای هر دنباله‌ی متناهی σ که از بین $k+1$ بخش انتخاب شده است داریم:*

$$C_{MIN}(\sigma) \leq \frac{|\sigma|}{k}$$

اثبات. فرض کنید σ_i یک خطا برای MIN به وجود می‌آورد. نشان می‌دهیم MIN روی هیچ کدام از $\sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{i+k-1}$ هیچ خطایی نخواهد داشت. فرض کنید p بخشی باشد که MIN برای پاسخ به σ_i حذف می‌کند. با توجه به اینکه دقیقا $k+1$ بخش داریم، خطای بعدی باید روی p رخ دهد. توجه شود که هر بخش دیگر موجود در M_1 باید قبل از درخواست بعدی p درخواست داده شود.(بنا بر تعریف p بعد از همه درخواست داده می‌شود.) بنابراین حداقل $k-1$ درخواست σ_i را از خطای بعدی جدا می‌کند. □

حال فرض کنید σ یک پیشوند σ^A به طول kl باشد. بنابراین $C_A(\sigma) = kl \geq k.C_{\text{MIN}}(\sigma)$. پس A در بهترین حالت k-رقابتی است. □

[13] Marking
[14] Toring
[15] Belady
[16] Competitive ratio

مراجع

[1] LA .Belady, *A study of replacement algorithms for virtual storage computers* , IBM Systems Journal 5:78–101, 1966.

[2] A. Borodin and S. Irani and P. Raghavan and B. Schieber , *Competitive paging with locality of reference* , Journal of Computer and System Sciences 50:244–258.

[3] A. Fiat and RM. Karp and LA. McGeoch and DD. Sleator and NE. Young , *Competitive paging algorithms* , Journal of Algorithms 12:685–699, 1991.

[4] DD. Sleator and RE. Tarjan , *Amortized efficiency of list update and paging rules* , Communications of the ACM 28:202–208, 1985.

[5] E. Trong , *A unified analysis of paging and caching* , Algorithmica 20:175– 200, 1998.

تماس با ما:

mathematicsjournal@gmail.com
www.sharifmathjournal.ir